

**Localisation précise en position et attitude des robots mobiles
d'extérieur à évolutions lentes**

Thèse de DOCTORAT

Spécialité : Automatique et Informatique Appliquée

**ECOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGENIEUR DE NANTES**

Présentée et soutenue publiquement par :

Philippe BONNIFAIT

le 24 Novembre 1997

à l'Ecole Centrale de Nantes.

devant le jury ci-dessous :

Michèle ROMBAUT,	Professeur, I.U.T. de Troyes,	L.M.2.S. ;	présidente
Marie-José ALDON,	Chargée de Recherche C.N.R.S.,	LIRMM ;	rapporteur
Dominique MEIZEL,	Professeur, U.T.C.,	HEUDIASYC ;	rapporteur
Cécile DURIEU,	Maître de Conférences, E.N.S. Cachan,	LESiR ;	
Wisama KHALIL,	Professeur, E.C.N.,	IRCyN ;	
Gaëtan GARCIA,	Maître de Conférences, E .C.N.,	IRCyN ;	
François PEYRET,	Chargé de Recherche	L.C.P.C. ;	invité

Directeur de thèse : Gaëtan GARCIA.

Institut de Recherche en Cybernétique de Nantes (IRCyN U.M.R. 6597).

à mon père et à ma famille.

Remerciements

Les travaux présentés dans ce document ont été réalisés à l'Institut de Recherche en Cybernétique de Nantes (IRCyN UMR 6597), dirigé par Monsieur M. Guglielmi, au sein de l'équipe robotique dont Monsieur W. Khalil est responsable.

Je voudrais d'abord exprimer toute ma reconnaissance à Madame M. Rombaut pour avoir accepté la présidence du jury de thèse.

Je tiens à remercier Madame M.-J. Aldon et Monsieur D. Meizel pour l'attention qu'ils ont portée à ce travail en me faisant l'honneur d'être rapporteurs.

Je remercie également Madame C. Durieu d'avoir participé activement au jury et pour sa lecture attentive du manuscrit.

Je tiens à témoigner ma gratitude à Monsieur F. Peyret du LCPC qui n'a cessé de soutenir et valoriser mon travail, notamment par les moyens expérimentaux qu'il a mis à ma disposition.

Toute ma reconnaissance va à Monsieur G. Garcia pour l'encadrement de ce travail. Je tiens à rendre un hommage particulier à sa grande disponibilité et à son très bon sens physique, grâce auquel les orientations initialement choisies ont souvent été les bonnes.

Je voudrais témoigner toute ma gratitude à Monsieur W. Khalil pour son soutien constant, tant technique que moral. J'espère que ce travail est à la hauteur de sa rigueur scientifique.

J'adresse des remerciements particulièrement chaleureux à Messieurs D. Morel et J. Robin, sans qui l'aspect expérimental de ces travaux aurait été notablement réduit.

Je suis très reconnaissant envers Messieurs S. Bellavoir, G. Branchu et P. Molina qui ont conçu et réalisé les prototypes qui ont servi lors des manipulations.

A Messieurs D. Bétaille et C. Lemaire du LCPC je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères pour leur enthousiasme et leur grande disponibilité.

Je tiens à remercier très vivement tous les membres de l'équipe robotique pour leurs conseils et remarques. J'espère que l'expérience de la recherche que j'ai acquise à leur contact me sera profitable.

Enfin, je tiens à remercier Monsieur J.-F. Le Corre à qui je dois mes premiers pas dans le domaine de la recherche universitaire.

Localisation précise en position et attitude des robots mobiles d'extérieur à évolutions lentes.

RESUME :

Le sujet traité ici concerne la localisation dynamique en position et attitude (6 degrés de liberté) de robots mobiles d'extérieur avec des capteurs embarqués, dans un environnement connu et balisé.

Le champ d'application pratique concerne la conduite d'engins de travaux publics de finition dont les tâches présentent des exigences de précision très strictes. Ces engins se déplacent à des vitesses très faibles (qq cm/s) sur des surfaces préparées.

Nous proposons une approche multi-sensorielle, hybridant des capteurs proprioceptifs et le capteur SIREM, qui est un goniomètre optique mesurant des angles d'azimut et de site de balises de positions connues. A l'arrêt, le problème de la localisation est résolu. Par contre, en mouvement, les balises sont détectées une par une, à cadence lente et de façon asynchrone. Les capteurs proprioceptifs permettent alors de s'affranchir d'hypothèses restrictives sur le mouvement.

Une première étude 2D considère un odomètre associé à SIREM. Un formalisme de Kalman permet alors de prendre en compte les bruits des capteurs et de recalibrer l'odométrie, à chaque nouvelle mesure de SIREM. Une étude de l'observabilité du système non linéaire permet de détecter des trajectoires problématiques.

L'extension au cas 3D de l'algorithme 2D avec deux inclinomètres est ensuite étudiée. Grâce à une nouvelle représentation de l'attitude utilisant les angles de "déclivité" et "dévers orthogonal", deux des 6 paramètres sont directement mesurés par les inclinomètres. La généralisation du cas 2D conduit à un filtre dont le vecteur d'état contient 6 éléments. Une deuxième approche propose un filtre à 4 éléments à bruits corrélés dont les performances sont semblables mais dont l'exécution est plus rapide.

Grâce à un étalonnage soigné, la précision obtenue sur données réelles est de l'ordre de 0,1 degré pour les angles d'attitude, de deux cm en z et de quelques cm en (x, y), et ce, en extérieur, à une vitesse de 6 cm/s et avec 3 balises distantes de 30 m.

MOTS CLES :

Robotique mobile ; localisation ; représentation de l'attitude ; inclinométrie ; goniométrie ; odométrie ; filtrage de Kalman ; observabilité.

TABLE DES MATIERES

Introduction générale	9
------------------------------------	----------

CHAPITRE 1

LA LOCALISATION 3D DE VÉHICULES TERRESTRES D'EXTÉRIEUR

1 Introduction.....	15
2 La localisation de véhicules terrestres.....	17
3 Le capteur SIREM.....	21
4 Quelques systèmes de localisation d'extérieur	31
5 Conclusion	32

CHAPITRE 2

ANALYSE D'UN ALGORITHME DE LOCALISATION DYNAMIQUE 2D

1 Introduction.....	35
2 Localisation dynamique 2D avec un odomètre et le capteur SIREM	37
3 Simulation informatique	54
4 Détermination de trajectoires problématiques grâce à l'étude de l'observabilité du système	57
5 Amélioration de l'odométrie par identification en ligne des rayons	79
6 Conclusion	90

CHAPITRE 3

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX 2D

1 Introduction.....	93
2 Implantation de l'algorithme 2D sur le robot MELODY.....	94
3 Méthodologie des essais réels.....	101
4 Réglage des paramètres du filtre.....	103
5 Résultats expérimentaux 2D	115
6 Conclusion	123

CHAPITRE 4**POSITION ET ATTITUDE DE SIREM DANS L'ESPACE : REPRESENTATION
ADAPTEE A L'UTILISATION D'INCLINOMETRES**

1 Introduction.....	127
2 Adjonction de capteurs permettant une localisation à l'estime 3D.....	128
3 Les repères	130
4 Représentation de l'attitude	133
5 Représentation de la pose 3D.....	141
6 Simulation de MELODY avec ses capteurs se déplaçant sur une surface gauche.....	141
7 Conclusion	149

CHAPITRE 5**ODOMÉTRIE 3D AVEC DEUX INCLINOMÈTRES RECALÉE PAR SIREM :
ETUDE D'UN SYSTÈME SIMPLIFIÉ EN SIMULATION**

1 Introduction et simplifications	153
2 Odométrie 3D avec deux inclinomètres.....	154
3 Relation entre la position et l'attitude du robot et les mesures de SIREM	165
4 Première approche conduisant à un filtre de Kalman étendu à 6 éléments.....	166
5 Deuxième approche conduisant à un filtre de Kalman étendu à 4 éléments.....	181
6 Comparaison des deux filtres 3D.....	186
7 Conclusion	190

CHAPITRE 6**VERS UN FILTRE 3D COMPLET ... RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX**

1 Introduction.....	193
2 Méthodologie des manipulations	195
3 Etalonnage géométrique du système multisensoriel	200
4 Evaluation de la précision de SIREM seul à l'arrêt	205
5 Etude des signaux des inclinomètres sur MELODY	206
6 Conception et essai d'un filtre à 4 éléments prenant en compte les offsets des inclinomètres par rapport aux repères RS et RM.....	212
7 Améliorations à apporter au filtre	229
8 Conclusion	232
Conclusion générale.....	233

Références bibliographiques et bibliographie.....237

ANNEXES

ANNEXE A

Du filtre de Kalman linéaire variant au filtre de Kalman étendu (EKF) avec commande bruitée et transmission directe de l'entrée sur la sortie253

ANNEXE B

Deuxième formulation du filtre 2D.....267

ANNEXE C

Commutations entre les filtres 2D avec et sans identification des rayons269

ANNEXE D

Expression des matrices jacobiniennes des filtres 3D à 6 et 4 éléments.....273

Introduction générale

1 PROBLEMATIQUE ET CONTEXTE DU TRAVAIL

Le sujet traité dans le cadre de ce travail concerne la localisation dynamique de robots mobiles d'extérieur avec des capteurs embarqués. On s'intéresse plus particulièrement aux applications relatives à des engins assez lents, mais dont les tâches exigent une grande précision de localisation. Par ailleurs, on vise à traiter le cas de la localisation d'un mobile dans ses six degrés de liberté de position et d'attitude avec un dispositif de localisation embarqué. Enfin, on suppose que l'environnement dans lequel évolue le véhicule est connu et, plus précisément, on suppose qu'il existe au minimum trois amers de position parfaitement connue.

Le champ d'application pratique visé est celui de l'aide à la conduite des engins de travaux publics, dont les tâches, en particulier pour les engins effectuant des travaux de finition (« finisseurs¹ »), présentent des exigences de précision très strictes : quelques centimètres en (x, y), mieux que le centimètre en « z » et de l'ordre du dixième de degré pour les angles d'attitude. On s'intéresse plus particulièrement à ces machines, dont le déplacement est très lent (quelques centimètres par seconde). En outre, la surface de roulement sur laquelle évolue un finisseur a été préparée par des machines de terrassement : elle est donc très régulière. Par conséquent, les variations d'attitude et d'altitude d'un finisseur sont « lentes ».

La localisation dynamique 3D (position et attitude) est un besoin fondamental pour ces machines puisqu'elle permet de faire le lien entre les données de C.A.O. et la réalisation pratique de la route. En outre, les épaisseurs des couches de matériau à répandre peuvent être mieux maîtrisées. Cela conduit, d'une part, à l'amélioration de la qualité et, d'autre part, à une économie de matériau.

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un partenariat entre le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées de Nantes (L.C.P.C) et l'Institut de Recherche en Cybernétique de Nantes (IRCyN, U.M.R. 6597). Aujourd'hui ce partenariat se poursuit au sein de l'axe prioritaire « robotique de chantier » de l'action « machines intelligentes » du C.N.R.S., axe animé par l'IRCyN.

¹ Un finisseur est la machine qui répand la dernière couche (enrobé) lors de la construction de routes.

Le capteur extéroceptif que nous utilisons est le capteur « SIREM » qui permet de mesurer des angles de balises de position connue. Il s'agit d'un système optique spécialement conçu pour la localisation de finisseurs. Pour simuler un finisseur, nous utiliserons le robot mobile d'extérieur MELODY (Mobile d'Extérieur à Localisation DYnamique) sur lequel est embarqué SIREM. Un terrain extérieur sur une pelouse de l'Ecole Centrale de Nantes (E.C.N.) a été balisé par des géomètres, comme pourrait l'être un chantier d'autoroute. Ainsi, de nombreux essais ont été réalisés dans des conditions très réalistes. Il est à noter que l'aspect expérimental doit beaucoup au partenariat avec le LCPC : utilisation du logiciel de simulation « SimuCirc » du LCPC, prêt d'inclinomètres, prêt d'un système GPS différentiel de précision centimétrique, et étalonnage du système multisensoriel à l'aide d'une station de mesure de grande précision.

Dans cette thèse, nous présentons et détaillons les étapes du développement d'un système de localisation dynamique 3D pour finisseur. Le système utilise un odomètre, deux inclinomètres et SIREM. L'hybridation multi-sensorielle est réalisée au travers d'un formalisme de Kalman.

Avec trois balises et quand le véhicule se déplace à une vitesse de 6 cm/s, la précision obtenue avec des données réelles est de quelques centimètres en (x, y) , de l'ordre de deux centimètres en « z », et meilleure que 0,1 degré pour les angles de *déclivité* et *dévers*². La fréquence des localisations est de 20 Hz et la distance maximale entre le capteur et les balises est de 40 m.

2 PLAN DU MEMOIRE

- Le chapitre 1 présente la problématique de la localisation dynamique 3D. Une attention particulière est portée aux systèmes de localisation 3D d'extérieur. On y présente le capteur SIREM ainsi que le résumé des travaux de recherche dont ce capteur a déjà fait l'objet. Notre approche du problème y est définie.
- Le chapitre 2 traite de l'hybridation 2D de SIREM avec un odomètre. On présente l'algorithme de localisation qui permet d'utiliser les mesures de SIREM, une par une et dès qu'elles sont disponibles. On s'intéresse ensuite à la recherche de trajectoires problématiques, grâce à une étude de l'observabilité du système non linéaire. Cette étude renseigne en plus sur le comportement du système en cas de perte de balise. On

² Ces termes seront précisés ultérieurement.

présente ensuite une méthode d'amélioration de la précision du système dans le cas où le véhicule est équipé, comme MELODY, de pneus.

- Dans le chapitre 3, l'implantation de l'algorithme 2D sur le robot MELODY est décrite. Après avoir évoqué le réglage des paramètres de l'algorithme, on présente plusieurs essais réels dont les localisations ont été calculées en temps réel. Une attention particulière est accordée à la méthodologie des essais.
- A partir du chapitre 4, le problème est considéré dans ses trois dimensions. On s'intéresse alors à la généralisation de l'algorithme 2D en ajoutant des inclinomètres. Une nouvelle représentation de l'attitude avec les angles de « direction, déclivité et dévers orthogonal » est présentée. On décrit ensuite la maquette de simulation de MELODY se déplaçant avec ses capteurs sur une surface gauche.
- Le chapitre 5 considère un système simplifié pour lequel un modèle odométrique 3D avec deux inclinomètres est introduit. Grâce à la représentation de l'attitude introduite au chapitre précédent, les équations sont très simples. Deux filtres de Kalman sont ensuite présentés et comparés en simulation. Le filtre dont le vecteur d'état contient 4 éléments est finalement retenu.
- Le chapitre 6 présente les modifications à apporter au filtre à 4 éléments pour l'implanter sur le système réel. L'étalonnage du système multisensoriel est ensuite décrit. Enfin, différents essais réels réalisés avec MELODY sont comparés aux localisations d'un GPS différentiel de précision centimétrique.

CHAPITRE 1

LA LOCALISATION 3D DE VEHICULES TERRESTRES D'EXTERIEUR

Résumé du chapitre 1

La problématique qui nous intéresse dans cette thèse est présentée dans ce premier chapitre. Il s'agit d'un problème de localisation dynamique 3D avec des capteurs embarqués, dans un environnement parfaitement connu et balisé. Les engins considérés se déplacent lentement mais nécessitent des localisations précises. Une spécificité de notre problème réside dans le fait que les méthodes statiques, très précises à l'arrêt, n'ont pas de performances suffisantes en mouvement : il faut prendre en compte les déplacements de l'engin au cours des mesures.

Tout au long du chapitre, on reporte une étude bibliographique, au travers de laquelle on s'intéresse particulièrement à des travaux relatifs à des véhicules terrestres d'extérieur. On montre la grande complémentarité des capteurs proprioceptifs et extéroceptifs, qui permet d'accroître la robustesse et la précision des systèmes de localisation.

Le système optique SIREM est ensuite décrit et modélisé. Les travaux dont il a déjà fait l'objet sont présentés et notre approche du problème est définie : elle se veut multisensorielle afin de s'affranchir autant que possible d'hypothèses sur le mouvement du véhicule. On souhaite de plus apporter une solution efficace aux problèmes de lenteur et de mesures non cadencées de SIREM.

Enfin, on montre que plusieurs systèmes optiques sont analogues à SIREM dans le sens qu'ils mesurent eux aussi des angles d'azimut et de site de balises parfaitement connues. Les études portant sur SIREM leurs sont donc applicables.

La localisation 3D de véhicules terrestres d'extérieur

1 INTRODUCTION

Le problème de la localisation d'un engin peut être abordé sous deux angles, selon que les capteurs sont embarqués sur l'engin ou non. Dans le cas où le système de localisation est fixe, l'engin doit rester dans le domaine de visibilité des capteurs. C'est le domaine de la trajectographie d'avions à proximité d'aéroports, par exemple.

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse à la localisation d'un véhicule terrestre en mouvement avec des capteurs embarqués. L'environnement peut être entièrement inconnu (exploration planétaire par exemple), semi-structuré ou structuré (navigation dans un bâtiment où l'on repère des coins de murs grâce à une carte, etc.), ou enfin entièrement connu. C'est ce dernier cas que nous considérerons, c'est-à-dire qu'il existe dans l'environnement du véhicule des amers de position parfaitement connus. En outre, le véhicule se déplace dans un milieu extérieur, ce qui implique des variations de température, de luminosité, de la pluie, du brouillard, etc.

Le problème de la localisation est lié, pour une part, au choix des capteurs et, d'autre part, à la méthode de traitement des données de ces capteurs. Il s'agit d'un problème très ancien qui remonte à l'antiquité, pour des besoins de navigation maritime. On distingue les méthodes « à l'estime » (compas, loch, dans un contexte marin) des méthodes « absolues » se référant à des amers connus (soleil, étoiles, phares, balises, cornes de brume, etc.). La première partie de ce chapitre présente ces techniques, en vue de la localisation d'un véhicule terrestre.

Les méthodes de localisation sont fortement dépendantes de la dynamique de l'engin. Lorsque le véhicule est arrêté, la méthode est dite « statique » ; lorsqu'il est en déplacement, on parle de méthode « dynamique ». Cette classe est très vaste puisqu'elle dépend de l'ordre de grandeur des accélérations et des vitesses, et de la nature de la surface de roulement (plane, gauche, lisse, accidentée, etc.). En fonction de ces critères, des besoins et des coûts, on peut

alors définir les capteurs à mettre en œuvre. Il n'est donc pas surprenant qu'il y ait un grand nombre de travaux de recherche dans ce domaine, compte tenu de la variété des problèmes.

Le problème qui nous concerne est relatif à la localisation dynamique 3D d'engins de travaux publics de construction des routes, évoluant donc en milieu extérieur. On s'intéresse en particulier à un type de machine appelé « finisseur ».

Un finisseur répand les dernières couches de matériau lors de la construction d'une route. La photographie de la figure 1.1 montre un finisseur en fonctionnement. Le matériau, dont la température est de l'ordre de 150 °C, est acheminé par des camions. Sur la photographie, on voit un camion déverser son chargement dans la « trémie » du finisseur. Le matériau est ensuite guidé sous l'engin, pour être répandu à l'aide de la « table ». L'objectif est de contrôler cet outil en altitude et dévers, conformément aux données de position et d'attitude de C.A.O. définies dans le projet routier. Si cet objectif est atteint, l'épaisseur des couches pourra être mieux contrôlée, ce qui permettra de faire une économie de matériau, qui est très coûteux. Un projet de recherche européen Brite Euram baptisé « CIRC » (Computer Integrated Road Construction) a débuté dans ce sens le premier janvier 1997.

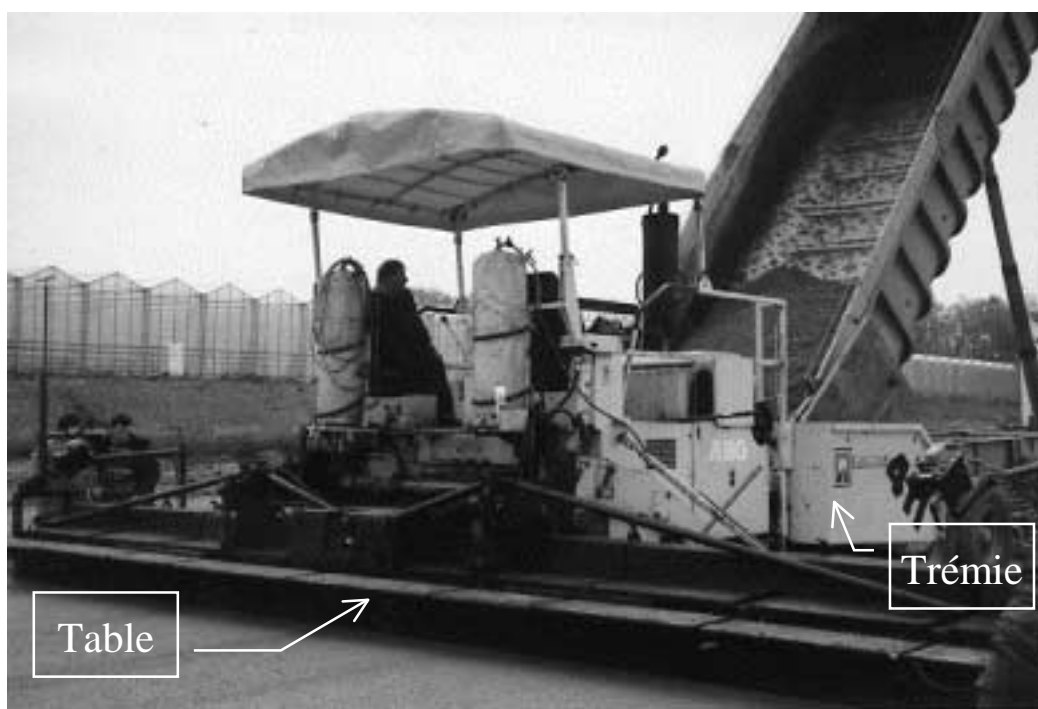


figure 1.1 : un finisseur en fonctionnement

Pour réaliser leurs tâches, ces machines exigent une localisation précise en position et attitude (six degrés de liberté). La position doit être connue à quelques centimètres près, l'altitude à quelques millimètres près, et le dévers avec une précision supérieure à un dixième de degré (pour que les extrémités de l'outils soient correctement positionnées).

Mais, un finisseur a des caractéristiques qui vont compenser les difficultés de ce cahier des charges très strict. En effet, un finisseur est un engin particulièrement lent (sa vitesse typique est de quelques centimètres par seconde) qui se déplace sur une surface préalablement préparée. Par conséquent, les variations d'attitude et d'altitude sont « lentes ».

Dans ce contexte, le capteur SIREM (qui est l'acronyme de « Système Intégré de Repérage d'Engin Mobile ») a été étudié au laboratoire, à partir de 1989. Sa présentation est faite dans le paragraphe 3. Notre approche du problème y est définie, comparativement aux travaux dont ce capteur a déjà fait l'objet. On présente aussi d'autres systèmes goniométriques semblables à SIREM.

On reporte, enfin, une étude bibliographique des systèmes de localisation 3D d'extérieur et des méthodes qui sont utilisées.

2 LA LOCALISATION DE VEHICULES TERRESTRES

En fonction de la nature proprioceptive ou extéroceptive¹ des capteurs utilisés, on distingue deux approches complémentaires : la localisation relative et la localisation absolue [Fargeon, Quin et al, 93].

2.1 Localisation relative

La localisation relative, aussi appelée localisation à l'estime, utilise des capteurs proprioceptifs. En partant d'une configuration initiale connue, les mesures des capteurs sont intégrées pour estimer la position courante de l'engin. Les erreurs de mesure et de modèle sont elles aussi intégrées, ce qui a pour incidence d'augmenter les erreurs de localisation au fur et à mesure du temps et/ou de la distance parcourue. Cependant, comme les capteurs proprioceptifs sont souvent rapides (ils ont en général un caractère analogique), les techniques à l'estime permettent de calculer des localisations à fréquence élevée.

Parmi les capteurs les plus souvent utilisés, on trouve des codeurs optiques ou des tachymètres disposés sur des roues de l'engin, des radars (ou sonar) à effet Doppler, des accéléromètres, des gyromètres.

Les codeurs optiques permettent de mesurer des rotations élémentaires de roues et les tachymètres des vitesses de rotation des roues. A faible vitesse, les tachymètres ont un

¹ Un capteur extéroceptif fournit des mesures relatives à l'environnement du robot, alors qu'un capteur proprioceptif renseigne sur l'état interne du robot (vitesse des roues, accélération centrifuge, etc.).

mauvais rapport signal sur bruit. La technique de localisation 2D à l'aide de ces capteurs s'appelle « odométrie ». Il existe différentes variantes en fonction du nombre de capteurs nécessaires et de leurs dispositions sur l'engin. Nous en présentons une en détail dans le chapitre suivant.

Les capteurs inertiels (accéléromètres et gyromètres) sont le plus souvent utilisés conjointement, dans des « centrales inertielles » comportant fréquemment trois accéléromètres et trois gyromètres [Radix, 80, Vaganay 93, Barshan, Durrant-Whyte, 95]. Les centrales inertielles les plus anciennes sont « à plate-forme stabilisée », c'est-à-dire qu'un asservissement mécanique, utilisant les mesures des capteurs, permet de maintenir une orientation constante (après une phase d'initialisation assez longue). De cette façon, les capteurs sont soumis à peu de vibrations, ce qui accroît la durée de fonctionnement du système. Il est par contre évident que ce dispositif est compliqué et donc coûteux. Dans le cas où les capteurs sont fixés de façon rigide à l'engin, la centrale est dite « strap-down ». Les capteurs sont alors directement soumis aux vibrations, ce qui augmente les bruits de mesure. Il est par contre facile d'ajouter des capteurs ; la redondance permet alors d'augmenter sensiblement les performances [Rintanen *et al.*, 94]. Ce n'est pas seulement leur coût élevé qui rend les centrales inertielles peu utilisables en robotique mobile, mais aussi le fait qu'elles nécessitent l'utilisation d'un système absolu pour les initialiser et les recalibrer périodiquement.

Un radar à effet Doppler permet de mesurer la vitesse linéaire du véhicule par rapport au sol (la réflexion d'une onde émise sur le sol subit une variation de fréquence proportionnelle à la vitesse). Ce dispositif est particulièrement bien adapté dans le cas où il existe des glissements importants ou bien quand la surface de roulement est bosselée (une distance mesurée à l'aide d'une roue est alors surestimée). Il faut remarquer que, comme pour les tachymètres, à faible vitesse (inférieure à 0,5 km/h), les radars Doppler ne sont pas utilisables. Ceci est donc gênant pendant les phases de manœuvre.

2.2 Localisation absolue

La localisation absolue utilise des capteurs extéroceptifs dont les mesures sur l'environnement, télémétriques et/ou goniométriques, permettent de déterminer la position et l'attitude de l'engin dans un repère lié à l'environnement. L'avantage principal de cette technique est d'obtenir des localisations qui ne dérivent pas dans le temps. La précision dépend des capteurs et de la configuration des amers par rapport au système. Par contre, le temps de traitement des informations des capteurs est, en général, plus long qu'avec des capteurs proprioceptifs, ce qui engendre des difficultés lorsque le véhicule est en mouvement.

Il est à noter que les compas et les inclinomètres font partie de cette catégorie puisqu'ils fournissent des angles par rapport au nord magnétique et à un plan horizontal, localement perpendiculaire à la gravité terrestre.

Les ultrasons sont abondamment utilisés en robotique d'intérieur à condition de disposer d'une carte de l'environnement. Leur faible portée et leur sensibilité au vent les rendent difficilement utilisables en milieu extérieur (sauf éventuellement pour l'évitement d'obstacles).

Concernant les systèmes utilisant des balises dont les positions sont parfaitement connues (ce sont eux qui nous intéressent), il existe de nombreux systèmes, de nature optique (caméras, lasers, systèmes infrarouges, SIREM...) ou hyperfréquence (radars, G.P.S....). Pour montrer la grande variété de capteurs ou plutôt systèmes extéroceptifs, on en reporte ci-après quelques exemples.

Le laser à balayage panoramique utilisé dans [Durieu, Opderbecke, 93] permet de mesurer des angles et des distances à des cibles catadioptriques, en vue d'une localisation dynamique 2D.

Dans [Le Bris, 95], on trouve trois systèmes lasers. Le « LASERNET » est un goniomètre laser dont le faisceau parcourt des secteurs angulaires grâce à un miroir tournant (20 tours / s). Le système « light-stripe » est constitué d'une diode laser et d'une caméra matricielle. La diode émet grâce à une lentille cylindrique un faisceau plan de lumière. La trace lumineuse sur un objet est détectée par la caméra. La portée de ce système, tel qu'il est monté sur le robot VEGA est faible (quelques mètres). Enfin, un télémètre laser par temps de vol, appelé « LADAR », permet de mesurer des distances jusqu'à 20 m (la portée maximum est de 30 m) avec une précision de 10 cm. C'est ce dernier matériel qui est utilisé dans [Le Bris, 95] pour effectuer les recalages dynamiques.

Le radar rotatif hyperfréquence du CEMAGREF [Monod, Faure, 95] permet de mesurer des angles d'azimut et des distances par temps de vol, à une fréquence élevée. Bien qu'il soit sensible à la pluie, sa grande portée (100 m) le rend intéressant pour des applications de localisation 2D en extérieur. Un radar du même type est utilisé dans [Durrant-Whyte, Bell, Avery, 95] pour guider des « porte-containers » dans des zones portuaires.

Les systèmes à caméra(s) matricielle(s) C.C.D. [Chenavier, Crowley, 92] sont, quant à eux, gourmands en temps de traitement (ou en puissance de calcul) et assez peu précis. Par exemple dans [Kim, Cho, 94], une caméra matricielle est montée sur une tourelle trois axes. Des lignes verticales noires et blanches peintes sur un mur constituent l'unique balise ; la

caméra est asservie de façon à avoir toujours la balise dans son champ de vision. Cette technique est mécaniquement compliquée, sensible à l'étalonnage de la caméra et a une faible portée. Le système utilisé dans [Brassart, 95] est constitué de balises à diodes électroluminescentes disposées sur le plafond de la zone d'évolution du robot. Une caméra matricielle scrutant le plafond permet de détecter ces balises, ce qui permet de calculer une localisation par triangulation sous hypothèse que le plafond soit parallèle au sol.

Le système ASTEREL de la société Micromaine [Micromaine, 89] utilise des émetteurs infrarouges. Pour obtenir une localisation 3D, le système doit être fixe, les balises étant embarquées. La portée de ce dispositif est de 50 m.

Parmi les systèmes extéroceptifs utilisables en extérieur et permettant une localisation 3D, nous connaissons les systèmes G.P.S. et les systèmes optiques (goniométriques) de même nature que SIREM. Le principe de ces derniers sera présenté au paragraphe 3.

Le G.P.S. (Global Positioning System) est un système télémétrique américain de radiopositionnement par satellite, dont le développement a commencé en 1970. Début 1993, le G.P.S. a été déclaré officiellement opérationnel. Il est constitué de 24 satellites à une altitude de 20 000 km, de telle sorte que chaque point de la terre reçoive en permanence les émissions d'au moins quatre d'entre eux. L'utilisation de séquences pseudo-aléatoires permet aux satellites d'émettre tous sur les mêmes fréquences, chacun ayant un code spécifique. Afin d'éviter que des ennemis n'utilisent ou ne brouillent le G.P.S., des dégradations volontaires ont été appliquées aux signaux. Les récepteurs civils ne peuvent déchiffrer les signaux codés ; la précision en absolu est alors de 100 m, au lieu de quelques mètres avec des récepteurs militaires. Un certain nombre d'études ont été menées pour localiser des engins extérieurs en absolu [McMillan, 87, Geier, Cabak, Sieh, 88].

Cependant, peu de temps après le lancement du premier groupe de satellites, l'idée d'utiliser deux récepteurs en mode différentiel a permis d'augmenter la précision de plusieurs centaines de fois. Un récepteur placé en un point fixe de position connue peut calculer les décalages d'horloge et transmettre les corrections aux récepteurs G.P.S. des environs. La précision obtenue est meilleure que le mètre. Par ailleurs, en utilisant une technique d'analyse de phase des fréquences porteuses (L1 et L2) de longueurs d'onde très courtes (19 et 24 cm), on peut obtenir une précision de quelques millimètres. Le principal problème consiste à déterminer la bonne solution parmi celles qui sont proches de la position de l'antenne (on parle de résolution des « ambiguïtés »). C'est un problème complexe, ce qui fait que lorsqu'un récepteur subit un masquage par exemple, il lui faut plusieurs dizaines de secondes (pour les

meilleurs actuellement) pour lever les ambiguïtés. Le département américain de la défense a rendu le problème plus complexe et plus coûteux en introduisant la dégradation « anti-copie ». Pour plus de détails, le lecteur peut se reporter aux très bons articles [Botton, 96, Herring, 96].

Dans le cadre de cette thèse, nous utiliserons un système G.P.S. différentiel centimétrique temps réel (deux récepteurs « Trimble 7400 », RTK *Real Time Kinematic*). Il s'agit d'un système qui fournit, dans un référentiel lié à la terre, des localisations (x, y, z) avec un indicateur de précision, à une fréquence de 1 Hz. Par rapport à un traitement différé, la précision est légèrement moins bonne, car le calculateur utilise des orbites estimées pour les satellites.

3 LE CAPTEUR SIREM

SIREM est un capteur extéroceptif goniométrique, embarqué sur l'engin à localiser. Comme le montre la figure 1.2, il mesure, sur des balises lumineuses dont les positions sont connues (relevées par des géomètres), un angle d'azimut (ou gisement) et un angle de site (ou angle de hauteur).

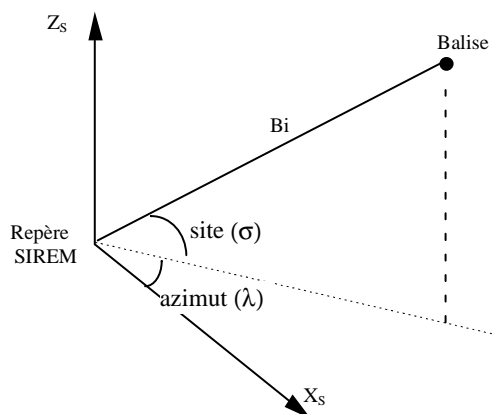


figure 1.2 : angles mesurés par SIREM

3.1 Réalisation technologique

Comme nous le verrons plus tard, il existe différentes solutions technologiques pour mesurer les angles d'azimut et de site sous lesquels sont vues des balises.

Le capteur SIREM, qui sera utilisé dans le cadre de ce travail, a été imaginé par François Peyret [Peyret, 89]. Il est constitué d'une caméra linéaire C.C.D. verticale de 1728 pixels, en rotation à une vitesse constante de 1 rad/s (cf. figure 1.3). Les balises lumineuses sont constituées de deux ampoules halogènes de 50 W, espacées de 3 centimètres, ce qui permet de rejeter un grand nombre de parasites lumineux [Morel, 95].

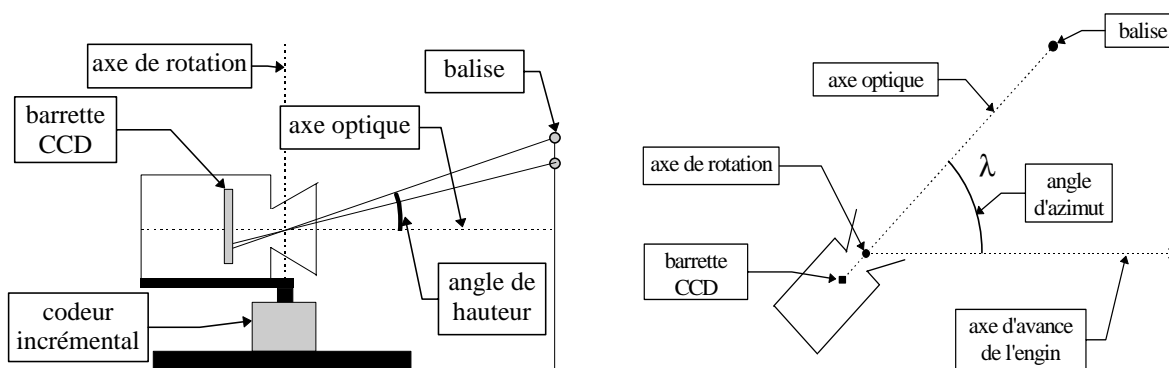


figure 1.3 : vue en coupe et vue de dessus du capteur SIREM

L'angle d'azimut (noté « λ ») est mesuré relativement à l'axe d'avance de l'engin, grâce au codeur incrémental solidaire du moteur (20 000 impulsions/tour). Au même instant, l'angle de hauteur (noté « σ ») est obtenu grâce à la position de l'image de l'ampoule du haut sur la barrette C.C.D..

En fonctionnement normal, hormis des situations dégénérées, il suffit de trois balises dans la zone de détection de SIREM pour calculer des localisations. Comme les balises sont alimentées par des batteries, elles sont munies d'un interrupteur qui permet de les allumer à distance, grâce à une liaison « HF », uniquement lorsque le SIREM s'apprête à les détecter. Une fois la mesure effectuée, elles sont éteintes dans le but de diminuer la consommation d'énergie et d'augmenter le temps de fonctionnement sur batterie. La distance maximum au delà de laquelle une balise ne peut être repérée est de 40 mètres. Cette distance pourrait être augmentée en utilisant des ampoules plus puissantes, mais on verra par la suite que ceci est inutile, car la précision de SIREM n'est dans ce cas pas suffisante pour atteindre une précision de 1 cm en altitude.

Le système informatique qui mesure les angles et gère l'allumage des balises est constitué d'un ordinateur compatible « PC ». Afin de respecter les contraintes de temps strictes, un exécutif temps réel est utilisé².

3.2 Modélisation de SIREM

On propose de considérer une modélisation simple de SIREM, en émettant les hypothèses suivantes.

² Il s'agit d'un exécutif de marque « RTC ».

On suppose que l'axe de rotation est parallèle à la barrette C.C.D, orthogonal à l'axe optique, et qu'il passe par le centre optique³.

Pour déterminer l'angle de site « σ » on utilise un modèle « trou d'aiguille » pour la caméra (figure 1.4).

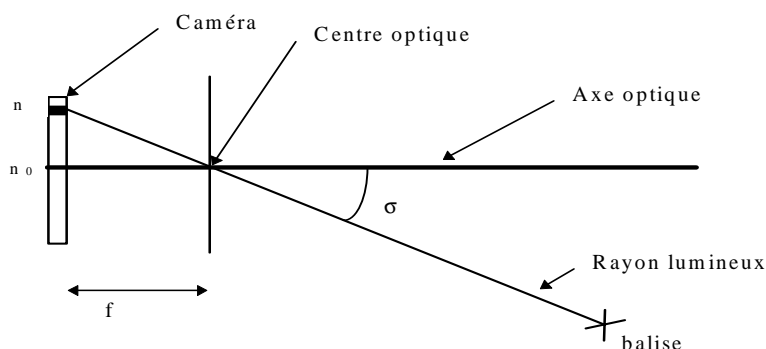


figure 1.4 : modèle trou d'aiguille pour mesurer l'angle de site

L'angle de site est obtenu par la relation :

$$\sigma = \arctan\left(\frac{(n - n_0) \cdot \text{pix}}{f}\right) \quad (1.1)$$

où « f » est la distance focale, « n » est le numéro du pixel correspondant à la tache de l'ampoule du haut, « n_0 » est le pixel correspondant à un angle de site nul et « pix » est la hauteur d'un pixel ($\text{pix} = 10 \mu\text{m}$). Les paramètres « f » et « n_0 » ont été étalonnés par le constructeur du capteur ($f = 51,6 \text{ mm}$, $n_0 = 887,3$).

3.3 Avantages et inconvénients

Le capteur SIREM est utilisable en extérieur, en plein soleil comme par temps de pluie. Il est par contre sensible au brouillard et son fonctionnement peut être perturbé par un soleil trop bas ou par des réflexions parasites du soleil sur des pare-brise de voitures, par exemple.

Une des qualités de SIREM est son « temps de réponse » très court (quelques millisecondes). Le temps de réponse correspond au temps qui s'est écoulé entre l'instant où une balise est détectée et l'instant où les mesures angulaires sont disponibles dans le logiciel. Cette qualité est une conséquence immédiate de l'utilisation d'une caméra linéaire avec une carte de seuillage associée.

Compte tenu du fait que la période minimale de lecture du C.C.D. est de 1,2 ms, pour obtenir une précision azimutale suffisante, la vitesse de rotation est faible ($\approx 1 \text{ rad/s}$). Ainsi,

³ Le centre optique est un point immatériel.

chaque balise est repérée toutes les 5 à 6 secondes en moyenne, ce qui représente un laps de temps assez important. SIREM est donc un capteur « lent », dans le sens où il fournit des mesures angulaires espacées dans le temps. En outre, les instants de détection des balises sont asynchrones, à cause du déplacement du véhicule.

SIREM est donc un capteur lent, à temps de réponse faible, avec un comportement asynchrone.

3.4 Précision

Sans entrer pour l'instant dans les détails⁴, les erreurs maximales de mesure propres à SIREM sont les suivantes :

- $1,6 \cdot 10^{-3}$ rad (= $92 \cdot 10^{-3}$ deg = $5'30''$ d'arc) en azimuth.
- $0,2 \cdot 10^{-3}$ rad (= $11 \cdot 10^{-3}$ deg = $40''$ d'arc) en site.

Grossièrement, la précision azimuthale dépend principalement de la vitesse de rotation et de la fréquence de lecture du C.C.D. et la précision de l'angle de site est définie par la taille d'un pixel et la distance focale.

Il apparaît donc que SIREM est un capteur relativement précis, juste dimensionné pour répondre au cahier des charges (pour une balise à 40 m, l'erreur maximum en azimuth provoque 6,5 cm d'erreur en position et l'erreur maximum en site provoque 8 mm d'erreur en altitude). Il est à noter que pour des balises distantes de plus de 40 m, la résolution du C.C.D. n'est pas suffisante.

3.5 Localisation 3D avec SIREM

3.5.1 Approche déterministe

Le problème de la localisation statique peut être résolu de façon symbolique [Khalil, Murareci, 93]. Dans le cas 2D avec 3 angles d'azimut, on trouve dans [Skewis, Lumelsky, 94] une autre résolution polynomiale exacte. Cependant, ces résolutions symboliques sont assez compliquées et peuvent être mal conditionnées, dans certaines configurations géométriques. On préfère des méthodes numériques.

⁴ Au chapitre 3, une étude détaillée des sources d'erreur sera réalisée.

3.5.1.1 Méthode statique de Le Corre

L'idée de la méthode de Le Corre [Le Corre, 93] est de ne pas considérer le problème en bloc avec 6 inconnues, mais de calculer, dans un premier temps, les trois distances « SIREM-balise » de façon numérique. Grâce à cette approche, la solution est facile à trouver, et la convergence de la méthode est très bonne.

L'engin est immobile. Supposons connus à l'instant « i » les relevés (λ_i, σ_i) de 3 balises non alignées. Dans le repère de SIREM « R_S », les coordonnées des balises satisfont les équations (cf. figure 1.2) :

$$\begin{cases} {}^S x_i = b_i \cos(\sigma_i) \cos(\lambda_i) \\ {}^S y_i = b_i \cos(\sigma_i) \sin(\lambda_i) \\ {}^S z_i = b_i \sin(\sigma_i) \end{cases} \quad (1.2)$$

où « b_i » est la distance capteur-balise n°i.

Dans le repère de référence « R_0 », les positions des balises $({}^0 x_i, {}^0 y_i, {}^0 z_i)$ sont connues. Soit « d_{ij} » la distance entre les balises « i » et « j ». Nous avons donc :

$$d_{ij}^2 = ({}^0 x_i - {}^0 x_j)^2 + ({}^0 y_i - {}^0 y_j)^2 + ({}^0 z_i - {}^0 z_j)^2 \quad \text{dans } R_0 \text{ (connues)} \quad (1.3)$$

$$d_{ij}^2 = ({}^S x_i - {}^S x_j)^2 + ({}^S y_i - {}^S y_j)^2 + ({}^S z_i - {}^S z_j)^2 \quad \text{dans } R_S \quad (1.4)$$

En développant (1.4) et après introduction de (1.2), on obtient :

$$d_{ij}^2 = b_i^2 + b_j^2 - \alpha_{ij} b_i b_j \quad (1.5)$$

$$\alpha_{ij} = 2 \left(\cos(\sigma_i) \cos(\lambda_i) \cos(\sigma_j) \cos(\lambda_j) + \cos(\sigma_i) \sin(\lambda_i) \cos(\sigma_j) \sin(\lambda_j) + \sin(\sigma_i) \sin(\sigma_j) \right) \quad (1.6)$$

Les coefficients « α_{ij} » et « d_{ij} » sont connus. Il faut donc résoudre un système de 3 équations non linéaires en « b_i ». Pour cela, la méthode itérative de « Newton-Raphson » est employée [Le Corre, Garcia, 91a].

Soit le vecteur $f = [f_{12}, f_{23}, f_{31}]^T$ tel que :

$$f_{ij} = b_i^2 + b_j^2 - \alpha_{ij} \cdot b_i \cdot b_j - d_{ij}^2 \quad (1.7)$$

La solution du problème est $\hat{b} = [\hat{b}_1 \hat{b}_2 \hat{b}_3]$ tel que :

$$\|f(\hat{b})\| \leq \varepsilon \quad (1.8)$$

où « ε » est une constante donnée « suffisamment » petite.

La méthode consiste à rechercher « Δb » tel que $f(\hat{b} + \Delta b)$ n'évolue plus. Pour cela, on effectue une linéarisation de « f » autour de « \hat{b} » et on résout un système linéaire en « Δb ».

Soit la matrice jacobienne :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Algorithme de la méthode :

$\hat{\mathbf{b}} \leftarrow$ valeur initiale grossièrement estimée

Répéter $\hat{\mathbf{b}} \leftarrow \hat{\mathbf{b}} + \Delta \mathbf{b}$ où $\Delta \mathbf{b}$ vérifie $J \Delta \mathbf{b} = -f$

Jusqu'à $\|f(\hat{\mathbf{b}})\| < \varepsilon$

Lorsque les distances « \mathbf{b}_i » sont connues, les positions des trois balises dans R_S sont calculées grâce à l'équation (1.2). On en déduit ensuite la position et l'orientation de SIREM dans un repère lié aux balises ; enfin, la matrice homogène est ramenée dans le repère de référence « R_0 ».

Cette méthode a été abondamment testée en temps réel. Sa très bonne convergence est à souligner et ce, en quelques itérations de la méthode de Newton-Raphson (typiquement 3 pour une précision de quelques centimètres). C'est la méthode qui est utilisée actuellement pour donner la position et l'attitude de SIREM à l'arrêt.

3.5.1.2 Méthode dynamique

En mouvement, la méthode statique ne peut être utilisée du fait de la « lenteur » de SIREM : les relevés des balises ne correspondent plus à la même position de l'engin. Des extrapolations déterministes des angles, trop sujettes aux bruits de mesure, ne permettent pas de réutiliser la méthode statique⁵.

Sans l'adjonction d'autres capteurs, une solution pour traiter ce problème consiste à établir des hypothèses sur le déplacement. Ainsi, en supposant que le mobile a une vitesse linéaire constante vectoriellement et avec les relevés de 4 balises, les distances capteur-balise et le module de la vitesse peuvent être déterminés, à l'aide d'une formulation itérative du même type que la méthode statique [Lormeau, 91]. Grâce à une mise en forme astucieuse, la méthode dynamique a une formulation très simple et sa mise en œuvre est rapide.

Cette méthode a été testée en conditions réelles [Le Corre, Garcia, 92]. Sa convergence est rapide, mais elle s'est montrée assez sensible aux bruits de mesure.

⁵ On parle dans ce cas de méthode « quasi statique »

3.5.2 Approche stochastique : les travaux de Devise

Olivier Devise et Christian Doncarli [Devise, 93] se sont d'abord intéressés à la sensibilité de la méthode dynamique de Le Corre aux bruits de SIREM. Leurs résultats de simulation montrent que la méthode dynamique est très sensible, dans certaines situations, aux bruits des capteurs, sans pour autant diverger. Ces mêmes simulations indiquent que les phases de manœuvre constituent aussi un point faible de la méthode déterministe, ce qui découle immédiatement de l'hypothèse de vitesse constante.

Compte tenu de cette faiblesse vis-à-vis des bruits de mesures, des approches stochastiques, plus complexes, ont été étudiées. Dans ce cadre, les erreurs peuvent être prises en compte de manière statistique.

Une première approche dite « centralisée » a été étudiée et simulée en 2D. Elle est basée sur l'utilisation d'un filtre de Kalman étendu à état continu et mesure discrète non cadencée, ce qui permet de résoudre le problème de l'asynchronisme de SIREM. Grâce à une intégration arrière, une mesure vectorielle à 4 éléments (contenant les 4 derniers azimuts) peut être utilisée. Cette méthode a montré sa robustesse vis-à-vis des bruits, mais la complexité des calculs 2D la rend pratiquement inutilisable en 3D.

Ainsi, une approche « décentralisée » a été proposée. Son principe réside dans des « pré-traitements » des mesures de SIREM pour chaque balise. Chaque pré-traitement est un module autonome qui estime de manière continue les relèvements angulaires (cf. figure 1.5). Il s'agit donc d'un problème d'extrapolation des mesures de SIREM sur 4 balises, dont une solution stochastique utilise un filtre de Kalman basé sur un modèle de type triple intégrateur.

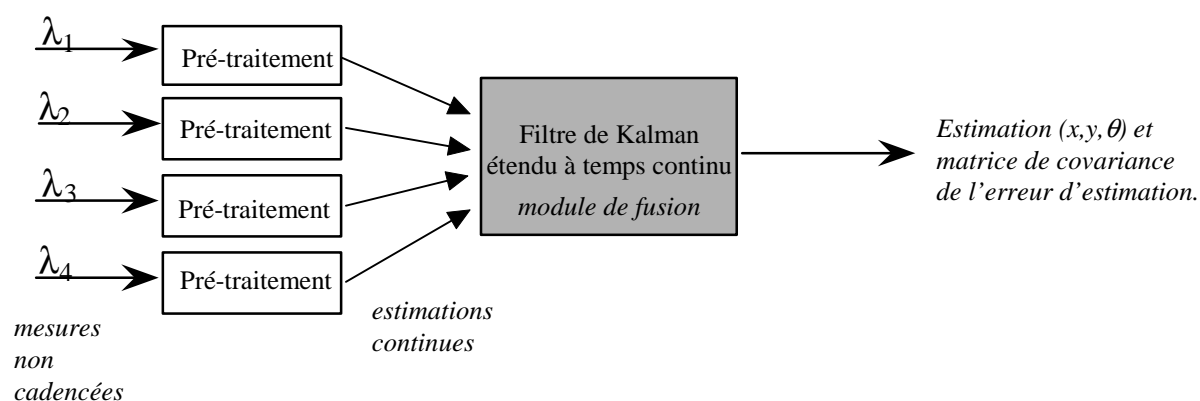


figure 1.5 : approche 2D décentralisée de Devise.

Grâce à ce formalisme, la mise en œuvre de l'algorithme de localisation est plus simple que dans le cas précédent. Les résultats 2D obtenus en simulation avec cette approche sont du

même niveau que ceux obtenus avec l'approche centralisée. Dans [Devise, Doncarli, 93], le même algorithme a été présenté mais, cette fois, n'utilisant que 3 balises.

La généralisation au cas 3D de l'approche décentralisée s'obtient en ajoutant trois modules de pré-traitement des angles de site et en modifiant le module de fusion. Ces six modules, mettant en œuvre chacun un filtre de Kalman à trois éléments, et le filtre de Kalman à temps continu doivent se dérouler en parallèle. L'implantation en temps réel de cette méthode n'est donc pas simple.

Par ailleurs, le module de fusion inclut un modèle cinématique où l'entrée est constituée de l'accélération tangentielle et de la vitesse angulaire appliquées à l'engin, supposées mesurées sans bruit. Par conséquent, si l'on souhaite l'implanter sur un véhicule, la méthode de Devise nécessite l'adjonction d'autres capteurs comme, par exemple, un accéléromètre et un gyromètre.

3.5.3 Conclusions de ces études

On conclut de ces travaux qu'à l'arrêt la position et l'attitude de SIREM peuvent être obtenus de façon très satisfaisante avec la méthode statique de Le Corre. Les problèmes apparaissent lorsque l'engin se déplace. Dans ce cas, les difficultés principales sont les suivantes :

- les mesures de SIREM sont obtenues une par une, et ne correspondent pas à la même position de l'engin. Ceci est une conséquence de la lenteur de SIREM.
- elles ne sont pas cadencées (mesures asynchrones).
- les équations sont non linéaires.

La méthode dynamique déterministe est sensible aux bruits de mesure et aux phases de manœuvre. La principale contribution de Devise est de montrer que des méthodes stochastiques peuvent améliorer sensiblement le processus de localisation dynamique en permettant de résoudre le problème de l'asynchronisme.

3.5.4 Notre approche

Fondamentalement, notre approche se veut « multi-sensorielle ». On souhaite, en ajoutant des capteurs économiques, améliorer la précision, la dynamique et la robustesse du système, notamment en cas de perte momentanée de balise. En effet, il est possible que des balises soient masquées par un autre engin par exemple, ou bien il se peut que SIREM ne détecte pas une balise, ce qui est d'autant plus fréquent qu'elle est loin de l'engin.

Par ailleurs, entre les relevés des balises qui peuvent être espacés de quelques secondes, les capteurs proprioceptifs peuvent continuer à fournir une localisation à l'estime. De cette façon, on souhaite lever les hypothèses de mouvement à dynamiques « très faibles ». Il est intuitivement évident qu'en estimant de façon précise le mouvement relatif de l'engin entre deux relevés, la précision du système sera améliorée. En outre, grâce à la navigation à l'estime, le système sera d'avantage robuste aux pertes de balises.

Il s'agit donc d'un problème d'hybridation de capteurs que l'on propose de traiter dans un contexte stochastique, comme le recalage d'une localisation à l'estime à l'aide des mesures de SIREM. De cette manière, l'asynchronisme et la lenteur de SIREM peuvent être simplement résolus.

Contrairement à la méthode décentralisée de Devise, dont le principe est d'estimer de façon continue les angles d'azimut et de site et de les utiliser dans un filtre de Kalman (vecteur de mesure à 6 éléments dans le cas 3D), on propose de ***considérer les mesures de SIREM, une par une, et dès qu'elles sont disponibles*** (ce qui conduira à des filtres dont le vecteur de mesure a 2 éléments dans le cas 3D).

3.5.5 D'autres capteurs analogues à SIREM

Il existe plusieurs systèmes optiques embarqués ayant le même principe que SIREM, c'est-à-dire des capteurs qui mesurent conjointement un angle d'azimut et un angle de site de balises dont les positions sont connues. Nous en connaissons trois, utilisant une technologie laser : le système de la société suédoise « ARNEX », le « LASERTRACK » de l'université d'East London et un système russe.

Le système « AB » d'ARNEX [Arnex, 95], dont le principe est proche de celui de SIREM, utilise un plan laser vertical en rotation. Grâce à des réflecteurs semi-cylindriques (diamètre de 1 m, hauteur de 60 cm), une partie du faisceau laser est renvoyée puis détectée par une caméra linéaire C.C.D., placée en dessous de l'émetteur laser. On peut calculer un angle de hauteur grâce au point milieu de la tache lumineuse sur le C.C.D.. Ce système a une portée de 100 m (elle peut atteindre 300 m avec des réflecteurs spéciaux), et nécessite au minimum 4 balises. Plus elles sont éloignées, plus il en faut un nombre important pour obtenir une précision convenable. Du fait que la vitesse de rotation est élevée (plusieurs tours par seconde), pour des vitesses faibles du véhicule, une méthode quasi-statique est utilisée. La précision est de quelques centimètres.

Le système LASERTRACK⁶ est d'un principe différent [Gorham, 94]. Il est constitué de deux plans lasers en rotation, inclinés de 45 degrés par rapport à la verticale. Lorsque le premier faisceau rencontre un prisme, il est retourné à son point d'émission et repéré par un détecteur photosensible. A cet instant, l'angle de rotation est mémorisé. Lorsque le deuxième faisceau repère à son tour le prisme, le système mesure le temps séparant les deux mesures, ce qui permet de mesurer un angle de site, par comparaison à un temps correspondant à un angle de site nul (cf. figure 1.6). L'angle d'azimut est obtenu en prenant la valeur moyenne des deux angles de rotation.

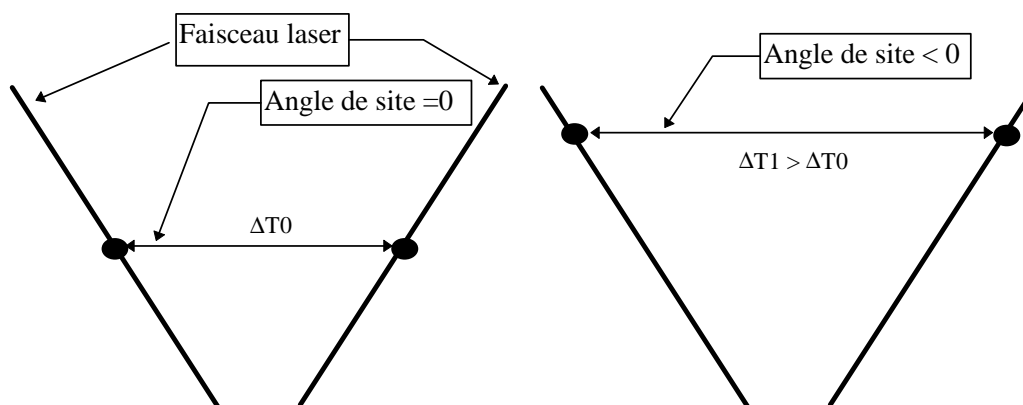


figure 1.6 : impact des faisceaux lasers du LASERTRACK sur un mur

A une vitesse de rotation de un tour par seconde, la précision du LASERTRACK est bien meilleure que celle de SIREM, puisqu'elle est de 1 seconde d'arc en azimut et en site (soit plus de 300 fois meilleure en azimut et 20 fois en site). Compte tenu de ces très bonnes caractéristiques, les balises du LASERTRACK peuvent être assez distantes de l'engin à localiser (jusqu'à 100 m).

Le système russe [Malinovsky, Rufov, Kovalec, 91] a le même principe de fonctionnement que le LASERTRACK, mais, cette fois, les deux plans lasers se coupent et l'un est vertical.

⁶ C'est le système extéroceptif utilisé dans le projet européen Brite Euram CIRC.

4 QUELQUES SYSTEMES DE LOCALISATION D'EXTERIEUR

Au cours de ce chapitre, nous avons déjà présenté des capteurs de localisation en extérieur, tels que le G.P.S., SIREM, le LASERTRACK, etc. Intéressons-nous maintenant à quelques systèmes d'extérieur, le plus souvent multisensoriels.

Les systèmes télémétriques à ondes radars [Monod, Faure, 95, Durrant-Whyte, Bell, Avery, 95] permettent d'atteindre une précision de quelques centimètres avec des méthodes quasi-statiques, et ce, avec des balises assez distantes (de l'ordre de 100 m). Ils sont par contre sensibles à des engins se déplaçant dans leur zone de visibilité (apparition de mesures aberrantes) et leur utilisation 3D n'est pas évidente. Des systèmes hybridant de l'estime (gyromètre + codeur) avec du G.P.S. [Mäkelä et al, 95, Rintanen et al, 95] ou avec des systèmes optiques [Scheding et al., 97, Horn, Schmidt, 95b], permettent de résoudre le problème des masquages des amers pendant des durées raisonnables. En outre, le nombre d'amers est réduit, et le temps de réponse et la précision globale du système sont améliorés.

Dès lors que l'on s'intéresse au cas 3D, le nombre de systèmes de localisation est considérablement réduit (si l'on ne s'intéresse pas aux centrales inertielles à coût élevé dont l'utilisation reste militaire ou concerne des problèmes d'exploration planétaire, par exemple [Fuke, Krotkov, 96]).

Dans [Vaganay, 93], un filtre de Kalman permet de tirer profit des avantages complémentaires de gyromètres (bons à court terme) et d'accéléromètres (pas de dérive à long terme si l'on parvient à distinguer la composante de la gravité des accélérations). Les estimations du roulis et du tangage ne dérivent pas et peuvent être utilisées pour améliorer la localisation 2D du robot, lorsque ce dernier se déplace sur un sol incliné.

Un environnement tridimensionnel est considéré dans [Fillatreau, 94]. Le problème est de localiser un véhicule d'exploration planétaire sur des terrains accidentés. Dans ce cas, le robot se déplace à l'estime et est obligé de s'arrêter pour recalibrer sa position, car le temps d'acquisition des données extéroceptives (caméra C.C.D.) est assez long. Ainsi, faire une acquisition sensorielle en mouvement nécessiterait de corriger les différents points de mesure. Par ailleurs, les vibrations dues au mouvement créent trop de perturbations. Dans ce travail, les capteurs extéroceptifs conduisent à des méthodes de localisation statique.

Dans un environnement montagneux non balisé (extraterrestre), une carte décrivant l'altitude du terrain, un compas, un altimètre et une caméra orientable permettent de localiser le véhicule [Talluri, Aggarwal, 92]. La précision en statique obtenue de cette façon est au mieux de quelques mètres.

Les deux précédents systèmes sont en fait très éloignés de la problématique qui nous intéresse. Dans un environnement parfaitement connu [Tsumura, Okubo, Komatsu, 93], les auteurs utilisent des faisceaux lasers plans émis par deux lasers différents. Sur des prismes réfléchissants de position connue, chacun des deux lasers permet de mesurer un azimut. Comme les plans d'émission sont inclinés l'un par rapport à l'autre d'un angle connu, en écrivant que les balises détectées sont dans les plans lasers, on obtient un système non linéaire à 6 inconnues. Par ailleurs, comme la vitesse de rotation des lasers est élevée, les auteurs émettent l'hypothèse que les trois balises ont été détectées au même instant. Ils utilisent alors une méthode quasi-statique de type Newton-Raphson. L'article auquel nous nous référons ne présente que des résultats de simulation : nous ne connaissons donc pas la précision réelle, ni la portée et la vitesse maximum admissible.

5 CONCLUSION

La localisation de robots mobiles terrestres d'extérieur a fait l'objet d'un nombre de travaux de recherche bien moins important que la localisation en intérieur.

Compte tenu des niveaux de précision que nous recherchons, il est indispensable de travailler dans un environnement connu et balisé. Dans ce cadre, la localisation 3D précise de véhicules terrestres d'extérieur peut être obtenue par G.P.S. différentiel centimétrique (G.P.S. RTK) ou par des systèmes optiques goniométriques équivalents à SIREM, avec un balisage local. Les centrales inertielles ne pouvant être utilisées seules, leur utilisation entraîne des coûts élevés.

Etant réalisé avec une caméra linéaire C.C.D. très standard, le capteur SIREM est, vis-à-vis de ses cousins, plus lent et moins précis. Quoiqu'il en soit, les méthodes dont il fera l'objet dans ce travail sont également applicables aux autres goniomètres.

Il est à noter la très bonne complémentarité des capteurs proprioceptifs et des capteurs extéroceptifs qui, en fonction des besoins, peut être mise à profit pour augmenter la fiabilité et la précision de systèmes de localisation. C'est dans ce sens que s'inscrit la suite de notre travail.

CHAPITRE 2

ANALYSE D'UN ALGORITHME DE LOCALISATION

DYNAMIQUE 2D

Résumé du chapitre 2

Ce chapitre s'intéresse à l'hybridation 2D de SIREM avec un odomètre réalisé avec deux codeurs incrémentaux directement montés sur les roues du robot mobile MELODY.

On considère un système simplifié pour lequel on suppose que l'axe de rotation de SIREM passe par le milieu de l'essieu des roues. Cette hypothèse simplifie les équations et facilite la simulation du processus.

Les principes généraux de l'algorithme sont d'abord présentés. On s'intéresse ensuite à la modélisation du problème sous forme d'état, pour appliquer un filtrage de Kalman étendu. Grâce à ce formalisme, les bruits de mesure des capteurs sont pris en compte, mais surtout les mesures de SIREM sont utilisées une par une, et dès l'instant où elles sont disponibles (les mesures de SIREM ont un retard négligeable compte tenu des dynamiques des engins). De cette façon, on résout les problèmes de lenteur et d'asynchronisme de SIREM. En outre, grâce à un test de cohérence, le filtre est capable de détecter un fonctionnement aberrant.

Après avoir présenté le principe des simulations, une étude de l'observabilité est réalisée dans le but de déterminer des trajectoires problématiques. On rappelle d'abord les concepts de l'observabilité en non linéaire, ainsi qu'une condition suffisante de rang. On s'aperçoit ensuite que l'observabilité dépend du nombre de balises et des vitesses de l'engin. Comme en non linéaire l'observabilité ne garantit pas la convergence d'un observateur, à chaque résultat théorique sont associées des simulations. On en conclut que le système est entièrement observable avec trois balises, sauf, à l'arrêt, sur le cercle passant par les trois balises. Par ailleurs, on montre qu'avec deux balises et dès lors que l'engin se déplace, le filtre fonctionne correctement, sauf dans quelques situations dégénérées. Ce résultat est particulièrement intéressant car il montre que le système de localisation est robuste à des pertes momentanées de balises.

Enfin, on s'intéresse à l'amélioration de l'odométrie grâce à une identification en ligne des rayons des roues à pneus. Cette méthode permet d'abord d'identifier la valeur des rayons, mais elle permet aussi de suivre des variations de ces paramètres (variation de charge de l'engin, variation de température, etc.). L'incidence d'erreurs sur les rayons sur la qualité du processus de localisation est étudiée en simulation : quelques pour-cent d'erreurs entraînent un biais de plusieurs centimètres.

Analyse d'un algorithme de localisation dynamique 2D

1 INTRODUCTION

La localisation 2D d'un robot mobile est définie par la connaissance à chaque instant du triplet (x, y, θ) , définissant la position et le cap du véhicule dans un repère de référence, que nous appellerons systématiquement « R_0 ».

L'algorithme de localisation présenté dans ce chapitre repose sur une approche stochastique qui permet d'associer de façon itérative des capteurs proprioceptifs, fournissant un déplacement à l'estime, et un capteur extéroceptif mesurant des angles d'azimut de balises de positions connues.

L'odométrie constitue ici la méthode de navigation à l'estime ; c'est une technique simple et bon marché. Elle consiste à mesurer et à intégrer des rotations élémentaires de roues, grâce à un modèle d'évolution, pour en déduire un déplacement du véhicule. L'estimation de la position et du cap de l'engin est ainsi obtenue de façon périodique, à une fréquence d'échantillonnage qui peut être suffisamment élevée par rapport aux dynamiques de l'engin. Dans un modèle d'état, l'odométrie permet d'établir le modèle d'évolution qui exprime le déplacement relatif du robot.

Comme toute méthode relative qui intègre des bruits de mesures, l'odométrie fournit une estimation dont l'erreur croît en fonction du temps de fonctionnement et de la distance parcourue. En outre, les hypothèses de fonctionnement (sol plan, mouvement sans glissement¹, paramètres géométriques du robot connus) ne sont que partiellement vérifiées, ce qui dégrade le processus d'estimation. Ces inconvénients, qui s'amplifient pour un véhicule d'extérieur, rendent des informations odométriques exploitables uniquement à court terme.

Compte tenu des avantages et inconvénients de l'odométrie, le capteur SIREM en apparaît comme complémentaire. En effet, grâce à ses mesures précises sur des amers

¹ Pour nous, le terme de « glissement » est synonyme de « dérapage » et/ou « patinage ».

parfaitement connus, il présente un caractère absolu qui permet de « recalcr » la navigation odométrique. A l'inverse, l'odométrie fournissant un modèle d'évolution de bonne qualité entre deux mesures de SIREM, ces dernières peuvent être prises en compte « à la volée ». On apporte ainsi une solution très intéressante aux problèmes d'asynchronisme et de cadence lente de SIREM.

Ce chapitre est organisé comme suit. Après avoir présenté le principe de fonctionnement de l'algorithme, nous nous proposons de simplifier la présentation en supposant que le capteur SIREM se situe à la verticale du milieu de l'essieu des roues. De nombreux robots de laboratoire vérifient cette hypothèse [Opderbecke, 94, Nishizawa, Ohya, Yuta, 95, Hashimoto et al., 92, Chenavier, Crowley, 92].

Nous présentons une méthodologie qui conduit à une forme d'état. Grâce à cette approche, que l'on trouve abondamment dans la littérature (citons par exemple [Opderbecke, 94, Vaganay, 93, Chenavier, Crowley, 92, Durieu, Aldon, Meizel, 96]) un algorithme d'observation d'état peut être mis en œuvre. Si l'on suppose ensuite que les équations odométriques et d'observation sont perturbées par des bruits, additifs, indépendants et de statistiques connues, le filtrage de Kalman apporte une solution classique à l'estimation récurrente de l'état. Après avoir décrit le modèle d'évolution (équations odométriques) et établi l'équation d'observation, le modèle d'état stochastique est présenté. Le filtre présente les particularités suivantes : il a une entrée bruitée, l'étape de prédiction est répétée entre deux recalages de SIREM, et un test de cohérence des mesures avec leurs prédictions est intégré.

Dans le paragraphe 4, une étude de l'observabilité de l'état est proposée. Cette étude permet de mettre en évidence des trajectoires problématiques sur lesquelles les performances du filtre sont dégradées. De plus, grâce à cette étude, la sensibilité du filtre à des pertes de balises peut être testée.

Enfin, certains paramètres géométriques jouent un rôle crucial sur le bon fonctionnement du filtre, c'est-à-dire que des valeurs erronées de ces paramètres engendrent des erreurs systématiques qui dégradent sensiblement le fonctionnement du reconstructeur d'état. Dans ce sens, nous proposons, dans le paragraphe 5, une méthode d'identification en ligne des rayons des roues.

2 LOCALISATION DYNAMIQUE 2D AVEC UN ODOMETRE ET LE CAPTEUR SIREM

2.1 Principes généraux de l'algorithme

L'algorithme multisensoriel qui recalcule l'odométrie en utilisant les données fournies par le capteur extéroceptif SIREM, s'inscrit dans le principe général suivant :

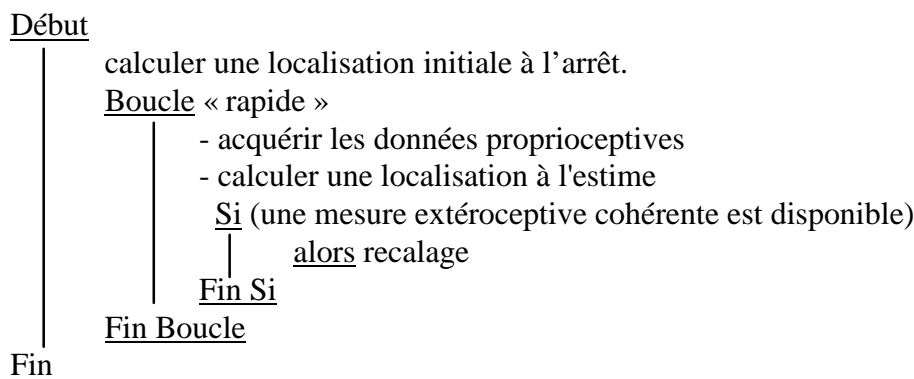


figure 2.1 : principe général de l'algorithme de localisation dynamique

Pour que le fonctionnement de l'algorithme soit correct, il est nécessaire que les conditions suivantes soient remplies :

- la période d'échantillonnage doit être petite en comparaison des dynamiques du système.
- l'acquisition et le traitement des mesures extéroceptives doivent être réalisés en une période d'échantillonnage.

Grâce à la condition a), on obtient une bonne intégration des données proprioceptives, donc une bonne navigation à l'estime. Grâce aux conditions a) et b), on considère que l'instant d'une mesure extéroceptive est un multiple de la période d'échantillonnage (fonctionnement synchrone) et on admet que le système a « suffisamment peu évolué » pour que la mesure soit considérée comme « valable ».

On peut résumer ces deux conditions de fonctionnement en une seule : *entre l'instant où les données du capteur extéroceptif sont relevées et l'instant où la mesure est utilisée, il faut que le système ait suffisamment peu évolué pour que la mesure puisse être considérée comme valable.*

Les localisations discrètes sont fournies à cadence élevée ce qui les rend directement utilisables, par exemple par un système de pilotage. Un test de cohérence, effectué dès qu'une nouvelle mesure extéroceptive apparaît, permet de rejeter des mesures aberrantes. A l'inverse, si toutes les mesures absolues deviennent non cohérentes, il rend compte de la divergence de la méthode (par exemple, les roues ont patiné ou bien dérapé sensiblement et la localisation odométrique est trop dégradée). Il est alors nécessaire de réinitialiser le processus à l'arrêt. Ce test rend également possible la mise en correspondance d'une mesure avec un amer parmi un ensemble d'amers de coordonnées connues. Par exemple, si les balises sont toutes identiques, il est possible d'associer une mesure à l'amer le plus cohérent, et par là même d'identifier la balise.

J. Leonard et Hugh F. Durrant-Whyte [Leonard, Durrant-Whyte, 91] ont défini une procédure standard dans laquelle s'inscrit la majorité des algorithmes de localisation en robotique mobile. La figure 2.2 donne le synoptique de notre algorithme selon la procédure standard.

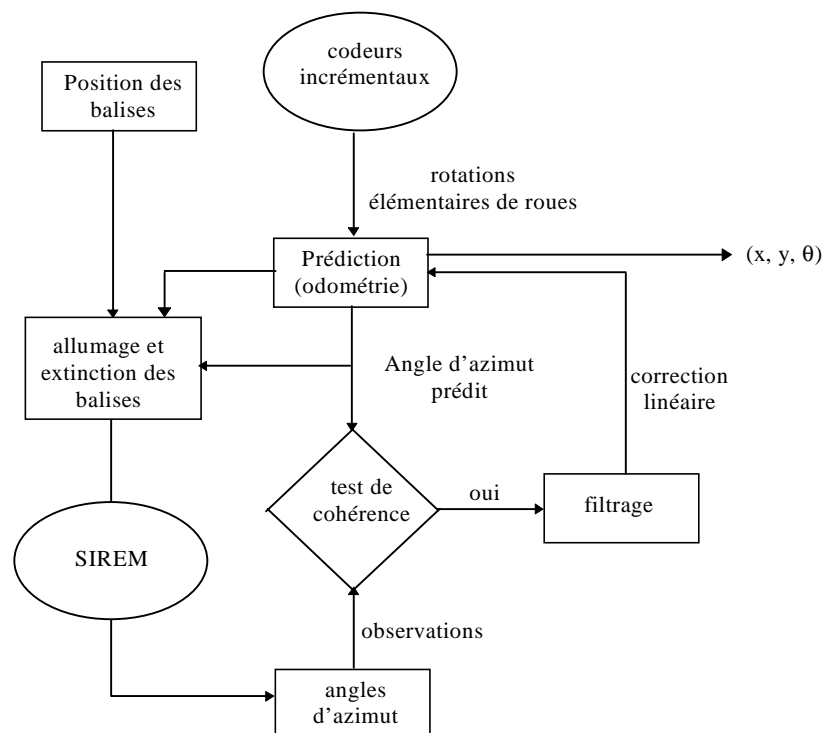


figure 2.2 : synoptique de l'algorithme s'inscrivant dans le principe général de Leonard et Durrant-Whyte

On trouve dans [Rombaut, 95] une généralisation de cet algorithme dans le cas où les mesures des capteurs extéroceptifs demandent un temps de traitement important (par rapport à la période de la localisation à l'estime). En effet, au moment où les mesures absolues sont disponibles pour réaliser l'étape de recalage, le système a évolué et la mesure ne correspond

plus à l'état actuel du système. La technique proposée consiste simplement à mémoriser les entrées et les états du système pendant un nombre suffisant de périodes d'échantillonnage. La prise en compte de l'information extéroceptive est faite en remontant dans le temps jusqu'à l'instant de la mesure. Cette prise en compte étant effectuée, on peut grâce à la mémorisation des entrées intégrer l'équation d'évolution jusqu'à l'instant courant.

2.2 Odométrie : modèle d'évolution

L'odométrie est une technique de localisation qui permet de déterminer la position et le cap (x, y, θ) d'un véhicule par rapport à un repère lié à sa configuration initiale, en intégrant des translations et rotations élémentaires. On appelle « odomètre » un dispositif qui permet de mesurer, grâce à des rotation de roues, ces translations et rotations élémentaires. Il existe différentes techniques pour les mesurer et différents algorithmes pour les intégrer. Nous avons retenu une configuration géométrique simple, qui consiste à monter des codeurs incrémentaux directement sur deux roues d'un même essieu de l'engin. Cependant, même si par la suite seule cette configuration odométrique sera considérée, notre approche et nos algorithmes sont applicables à des structures indépendantes, comme celles proposées dans [Ferrand, 92].

Entre deux instants d'échantillonnage « i » et « $i+1$ », on mesure ainsi des rotations élémentaires de roues, notées « Δq_{d_i} » et « Δq_{g_i} », correspondant respectivement à la roue droite et à la roue gauche. On juxtapose ces mesures pour constituer le vecteur d'entrée :

$$\Delta q_i = [\Delta q_{d_i} \quad \Delta q_{g_i}]^t \quad (2.1)$$

On suppose ici que les roues n'ont pas forcément le même rayon car il s'agit de pneus qui peuvent être gonflés différemment. La voie, c'est-à-dire la distance séparant les points de contacts des roues avec le sol, sera notée « e » (cf. figure 2.3).

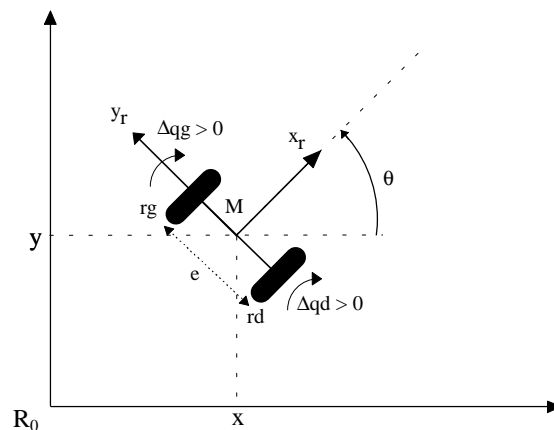


figure 2.3 : modélisation 2D du robot mobile

Le centre de l'essieu (noté M) est le centre du repère « R_M » lié au véhicule que l'on cherche à localiser. Ce point remarquable se situe sur la droite reliant les points de contact des roues avec le sol. Ces contacts avec le sol, s'il n'y a ni patinage ni dérapage (c'est-à-dire pas de glissement), font que le robot est non holonome et que la vitesse du point M est perpendiculaire à l'axe reliant les deux roues, et portée par l'axe (M, x_r) .

Quand le mobile se déplace, **s'il n'y a pas de glissement**, la translation élémentaire « Δ_i » et la rotation élémentaire « ω_i » du point M sont données par :

$$\begin{cases} \Delta_i = \frac{rd \cdot \Delta qd_i + rg \cdot \Delta qg_i}{2} \\ \omega_i = \frac{rd \cdot \Delta qd_i - rg \cdot \Delta qg_i}{e} \end{cases} \quad (2.2)$$

Si l'on divise les mesures Δ_i et ω_i par la période d'échantillonnage T_e et si T_e est « petite », on obtient les vitesses instantanées linéaire et angulaire. Cependant, l'odomètre est bien un capteur de déplacement et non pas un capteur de vitesse. Ainsi, il est utilisable pour de très faibles vitesses, contrairement aux dynamos tachymétriques (ou aux radars à effet Doppler par exemple) dont le rapport signal sur bruit devient mauvais dans ces conditions.

On cherche à exprimer de manière récurrente la position et le cap du robot à l'instant « $i+1$ » en fonction de la position et du cap à l'instant « i » et des déplacements élémentaires mesurés.

La première approche consiste à discrétiser le modèle cinématique continu (où v et w sont les vitesses linéaire et angulaire) :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos(\theta) \\ \dot{y} = v \sin(\theta) \\ \dot{\theta} = w \end{cases} \quad (2.3)$$

Il s'agit d'un modèle non linéaire, pour lequel il n'existe pas de méthode générale de discrétisation. Dans le cas particulier qui nous intéresse, on peut approcher « \dot{x} » par une différence finie, si T_e est petite (même chose pour « \dot{y} ») :

$$\dot{x}_{(t=i+1)} = \frac{x_{i+1} - x_i}{T_e} \quad (2.4)$$

La discrétisation du modèle continu (2.3) est alors :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + v_i T_e \cos(\theta_i) \\ y_{i+1} = y_i + v_i T_e \sin(\theta_i) \\ \theta_{i+1} = \theta_i + w_i T_e \end{cases} \quad (2.5)$$

On obtient donc en faisant apparaître les mesures odométriques Δ_i et ω_i , le modèle :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta_i \cos(\theta_i) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta_i \sin(\theta_i) \\ \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \end{cases} \quad (2.6)$$

Une autre façon d'aborder le problème revient à émettre des hypothèses sur le déplacement. Ce faisant, des relations géométriques permettent de déterminer le déplacement élémentaire du véhicule correspondant aux distances parcourues par chacune des roues.

Les formules les plus simples sont obtenues en supposant que le véhicule se déplace en ligne droite suivant la direction donnée par « θ_i » sur une longueur « Δ_i », puis effectue une rotation sur place de « ω_i » [Vaganay 93]. Le modèle obtenu est alors identique à la discrétisation proposée ci-dessus du modèle cinématique (équation (2.6)).

Une autre méthode, plus précise lorsque la trajectoire est courbe, consiste à supposer que le mouvement se fait localement suivant un arc de cercle de longueur Δ_i . Il existe plusieurs façons d'aboutir aux équations [Ming Wang, 88, Opderbecke, 94]. Même s'il s'agit d'un résultat classique, nous proposons une démonstration sensiblement différente qui présente l'avantage d'être extrêmement simple [Le Corre, 93].

Sous l'hypothèse d'un mouvement circulaire, on a :

$$\Delta = \rho\omega \quad (2.7)$$

où ρ représente le rayon de courbure (cf. figure 2.4).

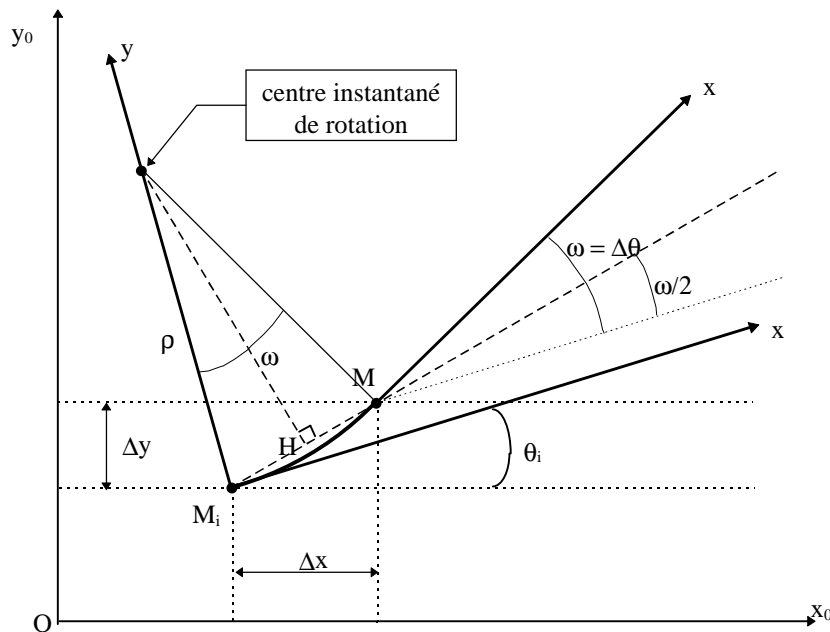


figure 2.4 : déplacement circulaire du robot entre deux instants d'échantillonnage

$$\|M_i H\| = \|HM_{i+1}\| \approx \rho \sin(\omega / 2) \tag{2.8}$$

$$\|M_i M_{i+1}\| \approx 2\rho \sin(\omega / 2) = 2 \frac{\Delta}{\omega} \sin(\omega / 2) = \Delta \frac{\sin(\omega / 2)}{\omega / 2} \tag{2.9}$$

Les variations Δx et Δy sont définies par le vecteur $M_i M_{i+1}$, dont l'angle avec l'horizontale est donné par :

$$\overbrace{\begin{matrix} \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\ \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \end{matrix}} \text{ (} M_i M_{i+1}, OX_0 \text{)} = \theta_i + \omega / 2 \tag{2.10}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \frac{\sin(\omega_i / 2)}{\omega_i / 2} \Delta_i \cos(\theta_i + \omega_i / 2) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{\sin(\omega_i / 2)}{\omega_i / 2} \Delta_i \sin(\theta_i + \omega_i / 2) \\ \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \end{cases} \tag{2.11}$$

Si de plus ω_i est petit, ce qui suppose que la période d'échantillonnage soit suffisamment « petite » par rapport aux dynamiques de l'engin, alors le noyau de Fourier est égal à un à l'ordre deux près :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta_i \cos(\theta_i + \omega_i / 2) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta_i \sin(\theta_i + \omega_i / 2) \\ \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \end{cases} \tag{2.12}$$

Ce dernier modèle odométrique est l'un des plus utilisés. Par rapport au modèle (2.6), il apparaît une correction « $\omega/2$ » dans les termes trigonométriques. C'est donc sur des trajectoires où le cap varie, que ce modèle est plus précis. Pour un engin se déplaçant principalement en ligne droite, ou bien à variation de cap lente (comme par exemple un finisseur) le terme « $\omega/2$ » n'est pas nécessaire. Néanmoins, comme il complique peu les expressions mathématiques, nous choisissons arbitrairement de le conserver pour l'algorithme 2D².

Il est à noter que, pour établir le modèle odométrique, il n'a pas été émis l'hypothèse que les vitesses sont constantes entre deux périodes d'échantillonnage (ce qui serait équivalent à négliger les accélérations).

² Dans le cas 3D, ce terme « $\omega/2$ » sera négligé ; sans cette simplification, les équations 3D sont alors nettement plus compliquées.

Pour faire apparaître les paramètres géométriques « rd, rg et e » du modèle du robot, nous proposons de considérer comme vecteur d'entrée « Δq », donné par la relation (2.1). Ainsi, en remplaçant « Δ_i » et « ω_i » par leurs expressions (équation (2.2)) dans le modèle (2.6), le modèle que nous utiliserons est donné par :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \frac{rd \cdot \Delta qd_i + rg \cdot \Delta qg_i}{2} \cos\left(\theta_i + \frac{rd \cdot \Delta qd_i - rg \cdot \Delta qg_i}{2e}\right) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{rd \cdot \Delta qd_i + rg \cdot \Delta qg_i}{2} \sin\left(\theta_i + \frac{rd \cdot \Delta qd_i - rg \cdot \Delta qg_i}{2e}\right) \\ \theta_{i+1} = \theta_i + \frac{rd \cdot \Delta qd_i - rg \cdot \Delta qg_i}{e} \end{cases} \quad (2.13)$$

On note $X_i = [x_i, y_i, \theta_i]^1$ la posture du mobile. Finalement, le système précédent peut se mettre sous la forme vectorielle :

$$X_{i+1} = f(X_i, \Delta q_i) \quad (2.14)$$

où la fonction vectorielle f est définie de $\mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$. Elle est continue et dérivable sur $\mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^2$.

2.3 SIREM : équation d'observation extéroceptive

Les observations qui servent au recalage de l'odométrie sont les angles d'azimut de balises de positions connues, mesurés par rapport au cap du robot (figure 2.5). On suppose que dans l'environnement « m » balises sont disposées en des points connus, le nombre « m » étant typiquement égal à 3 en fonctionnement normal.

Hypothèse simplificatrice :

Sans pour autant restreindre l'aspect générique de l'algorithme présenté dans ce chapitre, on suppose que le capteur SIREM se situe à la verticale du milieu de l'essieu des roues ; cette hypothèse permet de simplifier les équations et l'étude de l'algorithme. La généralisation au cas réel, où SIREM se situe en retrait de l'axe des roues, sera proposée dans le chapitre suivant.

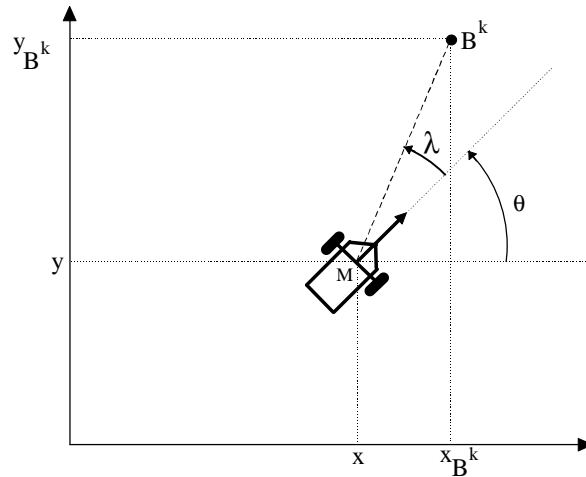


figure 2.5 : angle d'azimut mesuré par SIREM

Les grandeurs observées sont des fonctions non linéaires de l'état. Lorsqu'à l'instant « j » une balise « B^k » de coordonnées (x_{B^k}, y_{B^k}) est détectée, on mesure un angle « λ_j » relié à l'état par la relation :

$$\lambda_j = \text{atan2}(y_{B^k} - y_j, x_{B^k} - x_j) - \theta_j \quad (2.15)$$

La fonction « $\text{atan2}(x,y)$ » est analogue à la fonction « $\arctan(y/x)$ », mais possède deux arguments et renvoie ainsi un nombre compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

L'équation précédente sera notée de façon symbolique :

$$\lambda_j = g^k(X_j) \quad (2.16)$$

où la fonction g^k est définie de $\mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$. L'exposant « k » correspond à la balise repérée. Il est à noter que cette équation est *scalaire* et *non stationnaire* puisqu'elle dépend de la balise relevée.

De façon générale, les mesures sur l'environnement faites à l'aide de capteurs extéroceptifs, qu'elles soient de nature goniométrique ou télémétrique, permettent d'établir une relation du type de l'équation (2.16) ; cette équation est alors dite équation d'observation.

2.4 Mise sous forme d'état

Un des intérêts de la formulation sous forme d'état est qu'elle est bien adaptée pour faire apparaître les différents bruits qui peuvent ensuite être pris en compte par un observateur d'état.

L'odométrie fournit le modèle d'évolution (équation (2.14)), et SIREM l'équation d'observation extéroceptive (équation (2.16)). Pour être complet, il faut considérer

l'incertitude de mesure due aux codeurs. L'équation prenant en compte ce bruit de mesure est une équation dite de « mesure proprioceptive ».

En regroupant ces 3 équations, on obtient le modèle d'état :

$$\begin{cases} X_{i+1} = f(X_i, \Delta q_i) & \text{avec une erreur de modèle } \alpha_i \\ \Delta q_i = (\Delta q_i)_{\text{réel}} & \text{avec une erreur de mesure } \gamma_i \\ \lambda_j = g^k(X_j) & \text{avec une erreur de mesure } \beta_j \end{cases} \quad (2.17)$$

Pour l'instant aucune hypothèse n'est faite sur les bruits (statistiques, caractère additif...). Explicitons les différents termes :

- X est l'état à estimer, de dimension 3.
- Δq , de dimension 2, est le vecteur contenant les rotations élémentaires des roues, mesurées par les codeurs. C'est l'entrée bruitée du système.
- λ est l'angle d'azimut scalaire mesuré par SIREM.
- α_i est le bruit de modèle, de dimension 3. Il représente les erreurs de modélisation dues aux simplifications des équations, aux mauvais étalonnages des paramètres géométriques, au non respect des hypothèses de roulement sans glissement, etc.
- γ_i est le bruit de mesure dû aux codeurs.
- β_j est le bruit d'observation. Il modélise les erreurs de mesure de l'azimut de SIREM et des erreurs sur les positions des balises.

Dans le système (2.17), l'utilisation de deux indices temporels « i » et « j » joue un rôle important. Nous proposons ainsi de distinguer les instants des recalages des instants où sont calculées les prédictions odométriques. En effet, entre deux recalages, l'estimation de la position et du cap du véhicule est effectuée par odométrie seule de manière répétée, grâce à la première équation du système (2.17). Ceci est dû à la faible cadence d'acquisition des angles d'azimut.

2.5 Estimation de l'état : filtrage de Kalman ou approche géométrique ?

Etant donnée la modélisation d'état (2.17), le problème est maintenant d'estimer l'état X à partir des mesures bruitées dont on dispose.

Dans le cas d'un système linéaire perturbé par des bruits additifs de statistiques connues, le filtrage de « Kalman-Bucy » (appelé par la suite « filtrage de Kalman ») permet une

estimation optimale de l'état. Cette estimation est optimale dans le sens où la variance de l'erreur d'estimation est minimale au sens d'un critère qui dépend des hypothèses émises sur les bruits. Outre ce caractère optimal, le filtrage de Kalman prend en compte une éventuelle redondance des informations et en tire profit. Les équations relatives au cas linéaire variant sont données dans l'annexe A.

Selon un fonctionnement analogue, les techniques d'estimation à erreur bornée permettent, elles aussi, de combiner des informations proprioceptives et extéroceptives. Dans ce cas, les incertitudes ne sont pas caractérisées par les variances de variables aléatoires comme dans le cas statistique classique, mais par un ensemble de valeurs compatibles. Le bruit admet une borne supérieure et une borne inférieure connues. Aucune hypothèse n'est effectuée sur la distribution de ce bruit dans le domaine admissible. Une présentation très pédagogique de cette technique d'estimation est faite dans [Durieu, Aldon, Meizel, 96]. Cette approche paraît tout à fait naturelle si l'on considère que les bornes supérieures et inférieures des bruits des capteurs sont souvent données par les constructeurs. L'estimation de l'état peut, comme dans le cas du filtrage de Kalman, être réalisée par un formalisme récurrent. Un aspect intéressant de cette technique est qu'il est possible, en théorie, de déterminer un domaine dans lequel se trouve nécessairement l'état à estimer. Les différents algorithmes relevant de cette approche se distinguent principalement par la façon dont est modélisé le domaine admissible (ellipsoïde, pavé...), ce qui engendre des approximations ou bien une surestimation du domaine. En outre, l'approche géométrique permet de ne prendre en compte que les mesures qui améliorent l'estimation de l'état [Preciado et al., 91].

Uwe Hanebeneck et Günther Schmidt [Hanebeneck, Schmidt, 96] ont récemment proposé un algorithme de localisation, très semblable à celui que nous allons développer par la suite, et qui s'inscrit dans le fonctionnement de la figure 2.1. Cet article indique clairement que l'approche géométrique offre une alternative au filtrage de Kalman, même pour un système non linéaire. Deux principaux arguments mettant théoriquement en défaut le filtrage de Kalman sont avancés par les auteurs. D'abord, les positions des balises sont connues avec un offset constant. Ensuite, les techniques de localisation à l'estime souffrent bien souvent d'erreurs systématiques³ (par exemple une erreur sur le rayon des roues).

Intéressons-nous au premier problème des offsets sur la position des balises, même s'il ne nous concerne pas par hypothèse, puisque nous supposons que leurs coordonnées sont parfaitement connues. En pratique, les positions des amers sont relevées par des géomètres

³ A ces types d'erreurs correspondent en général des bruits non centrés.

avec une précision centimétrique en x et y , et millimétrique pour l'altitude. Le problème de savoir comment les erreurs sur les positions des balises se reportent sur la localisation n'est pas trivial ; par exemple, si toutes les balises ont une erreur de position d'un centimètre, dans des directions différentes, alors il n'est pas évident de savoir quelle est l'erreur de localisation qui en découle (les équations sont non linéaires). On peut considérer le problème sous un autre angle, en comparant l'influence d'une erreur de positionnement des balises sur les mesures de SIREM, aux bruits de mesure du capteur. Ainsi, 1 cm d'offset pour une balise à 10 m, provoque une erreur de 0,06 degré, soit une erreur 2,5 fois plus petite que le bruit d'observation⁴. Par ailleurs, 1 mm d'offset en altitude engendre $6 \cdot 10^{-3}$ degré d'erreur pour une balise à 10 m, soit 2 fois moins que l'erreur de l'angle de site de SIREM. Par conséquent, les erreurs systématiques provoquées par des offsets sur la position des balises sont au moins deux fois plus petites que les bruits inhérents au capteur, puisque la distance capteur-balise reste toujours supérieure à 10 m en fonctionnement normal.

Le deuxième argument est plus crucial dans notre cas. Afin de s'affranchir des erreurs systématiques de modèle, nous verrons au paragraphe 5 qu'il est possible, grâce au filtrage de Kalman, d'identifier en ligne des paramètres géométriques.

Par ailleurs, la technique d'estimation à erreurs bornées évite l'hypothèse habituelle de bruits de mesure indépendants. Cet argument mis en avant dans [Sabater, Thomas, 91] n'est pas pertinent dans le cas qui nous intéresse. En effet, les erreurs qui affectent les capteurs que nous utilisons (i.e. les codeurs et SIREM) peuvent être légitimement considérées comme indépendantes. En outre, en présence de corrélation des bruits, il existe un formalisme de Kalman adapté (cf. annexe A).

En conclusion de ce paragraphe, à la vue des travaux de recherche que nous connaissons à ce jour, l'estimation géométrique utilisée seule ne nous semble pas apporter d'amélioration sensible par rapport au filtrage de Kalman. Elle semble assez complémentaire du filtrage de Kalman ; dans [Durieu, Aldon, Meizel, 96], elle a été mise à profit pour compléter un filtre de Kalman (organe principal du processus d'estimation) de façon heuristique dans le cas de données manquantes. Ainsi, compte tenu de ces arguments, nous n'utiliserons dans la suite de ce document que des estimateurs basés sur le formalisme de Kalman.

⁴ L'erreur de mesure azimutale maximum de SIREM est 0,092 deg. Si on lui ajoute l'erreur due au temps de prise en compte du logiciel, l'erreur maximum devient égale à 0,15 deg. Les calculs permettant d'aboutir à cette valeur sont décrits dans le paragraphe 4.1 du chapitre 3.

2.6 Filtrage de Kalman

2.6.1 Hypothèses

Reconsidérons le modèle (2.17) en supposant maintenant que les bruits sont :

- additifs.
- blancs. La blancheur d'un bruit n'a de sens que par rapport au système. En pratique, cela revient à supposer que la largeur de bande du bruit est suffisamment grande par rapport à la bande passante du système perturbé.
- centrés (moyenne nulle) et de matrice de variance-covariance connue.
- indépendants de l'état et les uns par rapport aux autres.

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{i+1} = f(\mathbf{X}_i, \Delta q_i) + \alpha_i \\ \Delta q_i = (\Delta q_i)_{\text{réel}} + \gamma_i \\ \lambda_j = g^k(\mathbf{X}_j) + \beta_j \end{cases} \quad (2.18)$$

Les matrices de variance-covariance de « α », « β » et « γ » seront notées respectivement « Q_α », « Q_β » et « Q_γ ».

2.6.2 Matrices de variance-covariance des bruits

Le bruit α_i est discret et agit sur les équations d'évolution. Montrons que sa variance dépend de la période d'échantillonnage T_e [Larminat, 93].

Soit par exemple un bruit blanc « $v(t)$ » continu de spectre « Q » (rappelons que la variance d'un bruit blanc continu est infinie puisqu'elle est égale à une impulsion de Dirac de poids Q). Après discrétisation, la séquence aléatoire « v_k » a pour variance Q/T_e .

Supposons que $v(t)$ perturbe l'équation différentielle linéaire scalaire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + v(t) \quad (2.19)$$

En discrétisant cette équation, on obtient en supposant que T_e est petit :

$$x_{(k+1)T_e} = (AT_e + I)x_{kT_e} + T_e v_{kT_e} \quad (2.20)$$

équation de la forme :

$$x_{k+1} = A'x_k + v'_k \quad (2.21)$$

Ainsi :

$$\text{Var}(v'_k) = T_e^2 \cdot \text{Var}(v_k) = Q \cdot T_e \quad (2.22)$$

Si on suppose de plus que la matrice de variance-covariance Q_α est diagonale, alors en prenant en compte l'équation (2.22), on écrit :

$$Q_\alpha = T_e \begin{bmatrix} Q_x & 0 & 0 \\ 0 & Q_y & 0 \\ 0 & 0 & Q_\theta \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Si on suppose que les deux codeurs, identiques et indépendants, ont la même variance $Q_{\Delta q}$, la matrice de variance-covariance Q_γ s'écrit :

$$Q_\gamma = Q_{\Delta q} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Enfin, on supposera que Q_β est constant par soucis de simplification, c'est-à-dire que l'incertitude sur la mesure azimutale ne dépend pas de la distance capteur - balise.

En conclusion, les bruits s'appliquant au modèle d'état sont entièrement déterminés par les 5 termes scalaires $Q_{\Delta q}$, Q_β , Q_x , Q_y , et Q_θ indépendants de la période d'échantillonnage T_e . Notamment, en cas de changement (raisonnable) de la période d'échantillonnage, la matrice de covariance du bruit de modèle « α » est toujours correctement quantifiée.

2.6.3 Principe du filtrage

Le modèle (2.18) est une représentation d'état non linéaire avec entrée mesurée, sans transmission directe de l'entrée sur la sortie (cf. annexe A paragraphe 6). Nous proposons d'appliquer le filtrage de Kalman au système tangent, c'est-à-dire au système linéarisé au premier ordre (les différentes fonctions sont dérivables) [Chui, Chen, 91]. La linéarisation des équations se fait autour de la dernière estimation. Le filtre ainsi obtenu s'appelle « filtre de Kalman étendu » (en anglais Extended Kalman Filter ou EKF). Il est clair que cet estimateur n'est, en général, plus optimal. Son bon fonctionnement, autrement dit sa convergence, n'est jamais garanti : l'erreur d'estimation doit pour cela rester « faible ».

L'état estimé est noté avec un chapeau « \hat{X} ». « P » représente la matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation (de dimension 3x3) et traduit la confiance que l'on accorde à l'estimation. La notation habituelle en indice « i/p » (par exemple $\hat{X}_{i/p}$) signifie que l'estimation à l'instant « i » est faite en utilisant toute l'information disponible jusqu'à l'instant « p ». Dans le cas où $p < i$, il s'agit d'une prédiction, et si $p = i$, on parle de filtrage [Radix, 84]. Dans notre cas, nous adoptons la convention d'écriture suivante :

- « $\hat{X}_{i+1/i}$ » représente la prédiction de l'état entre les instants « i » et « $i+1$ » calculée grâce au modèle odométrique.
- « $\hat{X}_{j/j}$ » représente l'estimation de l'état (ou état filtré) à l'instant « j », c'est-à-dire quand la mesure de SIREM est prise en compte.

Le filtre que nous proposons répète de façon périodique l'étape de prédiction entre deux étapes de recalage, comme indiqué par l'algorithme du paragraphe 2.1. Même si les équations sont semblables à celles données dans l'annexe A (équations (A.92) à (A.99)), nous proposons de les décrire ci-après.

2.6.4 Etape de prédiction

Cette étape est répétée de façon périodique à 20 Hz entre deux mesures de SIREM. On suppose que sa période d'échantillonnage T_e est choisie suffisamment petite pour que, d'une part, les approximations effectuées au paragraphe (2.2) pour établir les équations odométriques soient correctes, et que, d'autre part, l'hypothèse de fonctionnement du paragraphe 2.1 soit vérifiée⁵.

En utilisant la nouvelle mesure de rotation des roues « Δq_i », on calcule l'état prédit à l'aide de l'équation odométrique (2.13). Deux cas sont possibles, si durant la dernière période d'échantillonnage :

- a) il n'y a pas eu de mesure extéroceptive. On utilise alors la dernière prédiction $\hat{X}_{i/i-1}$:

$$\hat{X}_{i+1/i} = f(\hat{X}_{i/i-1}, \Delta q_i) \quad (2.25)$$

- b) il y a eu une mesure extéroceptive à l'instant « $j = i$ ». On utilise alors la dernière estimation $\hat{X}_{i/i}$:

$$\hat{X}_{i+1/i} = f(\hat{X}_{i/i}, \Delta q_i) \text{ avec } \hat{X}_{i/i} = \hat{X}_{j/j} \quad (2.26)$$

Afin de simplifier les notations, nous omettrons volontairement de distinguer ces deux cas, en écrivant systématiquement :

$$\hat{X}_{i+1/i} = f(\hat{X}_{i/i}, \Delta q_i) \quad (2.27)$$

Le terme $\hat{X}_{i/i}$ dans l'expression (2.27) représente la meilleure estimation de l'état, qui est, selon le cas, une valeur prédite ou filtrée.

⁵ On verra, dans le chapitre 3 dédié aux essais réels, qu'une période d'échantillonnage de 50 ms ($f_e = 20$ Hz) est bien adaptée.

L'expression récurrente de la matrice de variance-covariance $P_{i+1/i}$ de l'erreur de prédiction est donnée de façon approximative par :

$$P_{i+1/i} = A_i P_{i/i} A_i^t + B_i Q_\gamma B_i^t + Q_\alpha \quad (2.28)$$

Les matrices A_i et B_i sont les matrices jacobiennes suivantes :

$$A_i = \left[\frac{\partial f}{\partial X}(\hat{X}_{i/i}, \Delta q_i) \right] \quad A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta_i \sin(\hat{\theta}_{i/i} + \omega_i/2) \\ 0 & 1 & \Delta_i \cos(\hat{\theta}_{i/i} + \omega_i/2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$B_i = \left[\frac{\partial f}{\partial \Delta q}(\hat{X}_{i/i}, \Delta q_i) \right] \quad B_i = \begin{bmatrix} \frac{rd \cdot a(i)}{2} & \frac{rg \cdot b(i)}{2} \\ \frac{rd \cdot c(i)}{2} & \frac{rg \cdot d(i)}{2} \\ \frac{rd}{e} & -\frac{rg}{e} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

où les scalaires $a(i)$, $b(i)$, $c(i)$ et $d(i)$ sont définis par les expressions ci-dessous :

$$\begin{cases} \psi_i = \hat{\theta}_{i/i} + \omega_i/2 \\ a(i) = \cos(\psi_i) - \frac{\Delta_i}{e} \sin(\psi_i) \\ b(i) = \cos(\psi_i) + \frac{\Delta_i}{e} \sin(\psi_i) \\ c(i) = \sin(\psi_i) + \frac{\Delta_i}{e} \cos(\psi_i) \\ d(i) = \sin(\psi_i) - \frac{\Delta_i}{e} \cos(\psi_i) \end{cases} \quad (2.31)$$

Comme pour l'équation (2.27), $\hat{\theta}_{i/i}$ représente la meilleure estimée du cap et $P_{i/i}$ la matrice de variance-covariance associée à $\hat{X}_{i/i}$.

2.6.5 Etape de recalage

Lorsqu'une mesure extéroceptive λ_j apparaît à l'instant « j » (que l'on suppose multiple de « i »), la prédiction odométrique de l'état est « recalée ». On pose :

$$\hat{X}_{j/j-1} = \hat{X}_{i+1/i} \text{ et } P_{j/j-1} = P_{i+1/i} \quad (2.32)$$

L'état filtré est donné par la relation :

$$\hat{X}_{j/j} = \hat{X}_{j/j-1} + K_j (\lambda_j - \hat{\lambda}_j) \quad (2.33)$$

Le vecteur « K_j » est appelé « gain de Kalman » et est donné par l'expression :

$$K_j = P_{j/j-1} C_j^t (C_j P_{j/j-1} C_j^t + Q_\beta)^{-1} \quad (2.34)$$

où :

$$C_j = \left[\frac{\partial g^k}{\partial X} (\hat{X}_{j/j-1}) \right] \quad (2.35)$$

Il est à noter que la matrice jacobienne dépend de la balise « B^k » relevée.

$$C_j = \left[\frac{y_{B^k} - \hat{y}_{j/j-1}}{(x_{B^k} - \hat{x}_{j/j-1})^2 + (y_{B^k} - \hat{y}_{j/j-1})^2} \quad \frac{\hat{x}_{j/j-1} - x_{B^k}}{(x_{B^k} - \hat{x}_{j/j-1})^2 + (y_{B^k} - \hat{y}_{j/j-1})^2} \quad -1 \right] \quad (2.36)$$

L'équation (2.33) indique que la prédiction est corrigée linéairement et proportionnellement à l'écart qui existe entre la mesure angulaire « λ_j » et sa prédiction « $\hat{\lambda}_j = g^k(\hat{X}_{j/j-1})$ ». Il est important de remarquer ici qu'un écart scalaire permet de recalculer un vecteur de dimension trois, via le gain de Kalman (le terme à inverser dans l'expression (2.34) est scalaire).

La nouvelle matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation s'obtient par :

$$P_{j/j} = (I_{33} - K_j C_j) P_{j/j-1} \quad (2.37)$$

L'implantation numérique d'un filtre de Kalman sur un ordinateur ne respecte en général jamais la forme brute des expressions mathématiques ci-dessus, ceci étant d'autant plus vrai que le nombre des mesures est grand. Le calcul de l'équation (2.37) en est un exemple. Dans cette expression, la matrice de variance-covariance risque de perdre sa définie-positivité et sa symétrie, ce qui est source de divergence du filtre. La définie-positivité de l'expression (2.37) peut être garantie en utilisant la forme de Joseph :

$$P_{j/j} = (I_{33} - K_j C_j) P_{j/j-1} (I_{33} - K_j C_j)^t + K_j Q_\beta K_j^t \quad (2.38)$$

Malgré cette précaution et l'utilisation de calculs en double précision, un bon fonctionnement à long terme ne peut être garanti que grâce à une formulation du filtre sous forme factorisée. La formulation de Bierman [Radix, 84] permet d'écrire « P » sous la forme du produit d'une matrice diagonale par deux matrices triangulaires supérieures. Des manipulations matricielles permettent de substituer aux expressions de « P », des expressions récurrentes faisant apparaître les matrices diagonale et triangulaires supérieures.

2.6.6 Autre formulation du filtre

Une autre formulation du filtre 2D peut être obtenue en considérant comme vecteur d'entrée $U_i = [\Delta_i \quad \omega_i]^t$ et non pas « Δq_i ». Il existe une relation matricielle déterministe entre

ces deux vecteurs qui permet de simplifier les expressions du filtre. Cette forme, utilisée dans [Opderbecke, 94], est donnée dans l'annexe B.

Nous avons fait le choix d'utiliser Δq_i comme entrée car cette forme se prête bien à l'identification des rayons, comme on le verra plus tard.

2.7 Cohérence des mesures de SIREM avec l'odométrie

Dès que le capteur SIREM détecte une balise, le filtre a la possibilité de vérifier si la mesure azimutale est cohérente avec le processus d'estimation odométrique. Grâce à ce test, plusieurs stratégies sont envisageables. On peut par exemple vérifier si la mesure effectuée correspond à une balise réelle et non pas à un parasite lumineux. Il est possible aussi de mettre en correspondance la mesure avec un amer si le système ne sait pas à l'avance quelle balise a été relevée⁶. Enfin, à l'inverse, des incohérences successives des mesures peuvent traduire une divergence du filtre.

La suite de ce paragraphe présente d'abord l'outil statistique de cohérence que nous utilisons et s'intéresse ensuite à sa stratégie d'utilisation dans l'algorithme.

2.7.1 Distance de Mahalanobis

Le principe de base consiste à comparer la mesure et sa prédiction de manière à vérifier leur cohérence. L'idée de la distance de Mahalanobis, notée « D », est que, pour effectuer cette vérification, il faut tenir compte des confiances accordées à la mesure et à sa prédiction.

Soit deux vecteurs aléatoires « X » et « Y » de \mathfrak{R}^n , de matrices de variance-covariance respectives « P_X » et « P_Y ». Alors, la distance de Mahalanobis est donnée par le scalaire (strictement positif) [Leonard, Durrant-Whyte, 91] :

$$D = (X-Y)^t(P_X+P_Y)^{-1}(X-Y) \quad (2.39)$$

Dans le cas particulier qui nous intéresse, il s'agit de tester la cohérence entre la mesure λ_j de variance Q_β , et la prédiction de cette mesure $\hat{\lambda}_j$ de variance $C_j P_{j/j-1} C_j^t$. Comme ces termes sont scalaires, on obtient :

$$D_j = (\lambda_j - \hat{\lambda}_j)^2 (C_j P_{j/j-1} C_j^t + Q_\beta)^{-1} \quad (2.40)$$

⁶ Ce cas de figure ne correspond pas à SIREM, car ce dernier allume et éteint les balises : il sait donc à l'avance quelle balise doit être relevée.

Le calcul de cette distance est très bien adapté à notre contexte stochastique et nécessite peu de calculs supplémentaires, puisque le terme à inverser apparaît lors de l'étape de filtrage.

Si D_j est inférieur à un seuil arbitraire D_0 , la mesure est jugée cohérente⁷. Classiquement [Durieu, Opderbecke, 93], $D_0 = 3$, ce qui correspond à $\sqrt{3}$ écarts types.

On pourra trouver des variantes de ce test dans [Hashimoto et al., 92, Curran, Kyriakopoulos, 93].

2.7.2 Stratégie de gestion des incohérences

L'algorithme général de la figure 2.1 peut donc être amélioré si l'on prend en compte le test de cohérence basé sur l'utilisation de la distance de Mahalanobis.

En effet, une incohérence des mesures azimutales de SIREM avec l'odométrie peut être interprétée de deux façons :

- a) la mesure de SIREM est aberrante,
- b) la prédiction odométrique est incorrecte, parce que le robot a dérapé par exemple, ou encore parce que le sol n'est pas plan, etc.

Il faut donc choisir une stratégie de gestion des incohérences. Nous proposons la suivante : des incohérences intermittentes sont attribuées à SIREM. A l'inverse, si les mesures deviennent toutes incohérentes, le filtre doit être initialisé à nouveau, véhicule à l'arrêt. En pratique, lorsque les azimuts d'une balise sont incohérents avec l'odométrie 3 fois successives, le filtre n'a plus un fonctionnement cohérent et doit être réinitialisé (véhicule à l'arrêt).

3 SIMULATION INFORMATIQUE

La maquette de simulation, présentée dans ce paragraphe, a pour objet de faciliter l'étude et la mise au point de l'algorithme. Notamment, puisque la posture théorique du mobile simulé est connue, on peut calculer les erreurs d'estimation commises par le filtre. Par ailleurs, la simulation permet de générer des trajectoires particulières qui ne sont que difficilement réalisables en conditions réelles.

⁷ L'analyse de la distance de Mahalanobis de données réelles montrera qu'un tel seuil existe.

3.1 Principe

Une simulation d'un engin équipé de SIREM et d'un odomètre se fait en quatre étapes :

- génération de trajectoire,
- calcul des mesures odométriques et des angles d'azimut correspondant à un véhicule suivant la trajectoire, avec ajout de bruits (centrés et gaussiens),
- mise en œuvre d'un filtre d'observation d'état sur les mesures bruitées obtenues à l'étape précédente,
- comparaison de la sortie du filtre à la trajectoire réellement suivie.

La communication entre ces étapes se fait par l'intermédiaire de fichiers, dont certains sont identiques à ceux générés par un essai réel. Les avantages sont multiples : sur une même trajectoire, on peut acquérir des données capteurs correspondant à différents bruits, sans répéter l'étape de génération de trajectoire. Ensuite, sur ces mêmes données, on peut appliquer, autant de fois que nécessaire, différents filtres. Le travail de mise au point des paramètres se trouve ainsi sensiblement facilité. Enfin, le filtre peut aussi bien fonctionner sur des données réelles que simulées.

Les fonctionnalités principales de la maquette de simulation sont les suivantes :

- les variances des bruits affectant les mesures des capteurs sont réglables et peuvent être différentes des variances introduites dans les équations du filtre,
- l'estimée de la localisation initiale est modifiable, ce qui permet de tester la sensibilité du filtre à une erreur de localisation initiale,
- les coordonnées réelles des balises peuvent être différentes de celles prises en compte par l'algorithme,
- l'asynchronisme de SIREM par rapport à l'odométrie est respecté.

Les procédures de traitement différé sont écrites en langage C. Puisque le développement d'applications informatiques sur MELODY se fait en langage C, l'implantation ultérieure du filtre en temps réel est facilitée. L'analyse et la visualisation se font à l'aide du logiciel Matlab. L'ensemble fonctionne sur un ordinateur de type PC. A titre d'information, un traitement différé est assez rapide puisqu'il dure moins de 3 minutes⁸, pour un essai de dix minutes.

⁸ Sur un PC équipé d'un processeur Pentium 90 MHz et de 16 Mo de mémoire RAM.

3.2 Paramètres d'analyse

Avant d'analyser les sorties d'un filtre de Kalman, il est important de vérifier si les erreurs d'estimation ne « sortent » pas du domaine constitué par plus ou moins trois écarts types estimés par le filtre de Kalman [Radix, 84]. Des dépassements indiquent un mauvais fonctionnement du filtre (modèle incorrect, bruits introduits dans le filtre mal appréciés, etc.). Cette précaution a été prise pour chaque essai de simulation, même quand les écarts types ne sont pas reportés sur les graphiques.

Connaissant à chaque instant la position et l'orientation du mobile réel, il est possible de comparer les sorties du filtre aux valeurs exactes. Nous proposons d'étudier le comportement du filtre à partir des paramètres suivants :

- l'erreur signée de cap (différence entre le cap estimé et le cap réel).
- l'erreur absolue de position, c'est-à-dire la distance euclidienne entre les positions estimée et réelle.

On aurait pu considérer les erreurs sur x et y , par exemple, ou encore les erreurs latérale et transversale de l'estimée dans le repère robot, mais ces erreurs ne sont bien adaptées que pour des cas particuliers. Nous préférons utiliser l'erreur absolue de position pour que l'outil d'analyse soit adapté à tous les types de trajectoire. En plus, compte tenu du nombre important de simulations de ce chapitre, le nombre total de graphiques est sensiblement diminué. Malheureusement, cette erreur, comme son nom l'indique, est absolue, ce qui ne permet pas d'apprécier visuellement si les sorties du filtre sont centrées ; c'est seulement l'erreur signée de cap qui permet de juger de ce caractère centré.

4 DETERMINATION DE TRAJECTOIRES PROBLEMATIQUES GRACE A L'ETUDE DE L'OBSERVABILITE DU SYSTEME

4.1 Introduction

La démarche présentée au paragraphe 2.1 a conduit à une représentation d'état du système. Via un certain nombre d'hypothèses, un filtre de Kalman étendu a été proposé pour réaliser l'observation d'état. Ce filtre est bien un *observateur d'état* puisqu'il estime des variables d'état à partir d'observations (SIREM) et de mesures de l'entrée appliquée au véhicule. Plusieurs questions se posent alors : l'estimation de l'état est-elle toujours possible ? Existe-t-il des situations dans lesquelles l'observateur diverge ?

Lorsque l'on est confronté à un problème d'estimation d'état d'un système linéaire, la démarche classique veut que l'on s'assure, au préalable, de l'observabilité de l'état. En effet, si un état est déclaré *observable*, alors il existe un observateur et sa vitesse de convergence peut être fixée grâce à différents gains.

Pour un système non linéaire, il convient d'être plus prudent car le problème de l'observabilité est différent de celui de la convergence d'un observateur. Notamment, dans ce cas l'observabilité n'implique pas la convergence d'un observateur non linéaire [Cherki, 96]. Conscients des limitations de cette analyse, nous proposons néanmoins d'étudier l'observabilité de l'état du système car elle permet de mettre en évidence des situations dans lesquelles l'observateur pourra rencontrer des difficultés, voire ne pourra converger. Ainsi, après l'étude théorique, une analyse en simulation de l'observateur doit être effectuée, pour confirmer ou infirmer les comportements prédits dans ces situations.

En outre, sans pour autant pouvoir l'affirmer avec certitude, il semble que cette étude soit *intrinsèque* au système, c'est-à-dire qu'elle ne dépend que de la modélisation continue du système. Ainsi, les situations problématiques semblent largement indépendantes de la technologie des capteurs et des algorithmes de reconstruction d'état. Ce caractère générique sera mis en évidence sur un système de localisation différent, de part ses capteurs et sa méthode de résolution [Boley, Sutherland, 96].

Un autre point d'intérêt a motivé cette étude : les effets de pertes momentanées de balises pourront être analysés grâce à l'étude de l'observabilité. Cette étude montrera en particulier que la localisation du mobile est en général possible avec deux balises seulement, si la vitesse de l'engin n'est pas nulle.

Ce paragraphe est organisé de la façon suivante. Après avoir rappelé quelques notions d'observabilité en non linéaire et un test d'observabilité, nous proposons d'étudier le système sous forme continue afin de pouvoir lui appliquer des conditions analytiques d'observabilité. Ensuite, pour trois, puis deux et enfin une balise, l'étude sera réalisée. Pour chacune des situations dites « potentiellement problématiques », la convergence du filtre sera étudiée à travers différentes simulations.

4.2 Observabilité en non linéaire

4.2.1 Notions et définitions

L'observabilité d'un système dynamique informe sur la possibilité de reconstruire ou non son état, étant données les entrées et les sorties du système.

Considérons un système à temps continu décrit par des équations différentielles de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) & x \in \mathfrak{R}^n \\ y = g(x) & y \in \mathfrak{R}^p \end{cases} \quad (2.41)$$

Le cas où la dimension de l'état est égale à celle de la sortie ($n = p$) est un cas particulier à considérer. En effet, il suffit dans ce cas d'inverser la fonction « g » (à condition qu'elle soit inversible) pour exprimer « x » en fonction des sorties « y » mesurées. Cette opération est rendue possible en utilisant le théorème de la fonction inverse, c'est-à-dire en vérifiant que la matrice jacobienne $[\partial g / \partial x]$ est de rang plein. Si les sorties sont indépendantes et si les « n » capteurs ont été convenablement choisis, cette inversion est généralement possible, sauf sur un ensemble de mesure nulle.

Dès lors que la dimension du vecteur de mesure devient inférieure à celle de l'état ($p < n$), la seule connaissance des sorties ne permet plus de retrouver l'état : c'est le problème de l'observabilité, qui prend en compte le modèle d'état du système.

4.2.1.1 Approche locale

Pour les systèmes non linéaires, la notion d'observabilité peut être formulée de plusieurs façons. En 1977, Hermann et Krener [Hermann, Krener, 77] donnent une définition de l'observabilité basée sur le concept d'*indiscernabilité*, pour les systèmes non linéaires décrits sous forme d'état. Leur approche est locale, c'est-à-dire qu'un système est observable si tous ses états le sont.

Définition 1 : indiscernabilité

Deux états initiaux $x(t_0)=x_0$ et $x(t_0)=x_1$ sont dits **indiscernables** si, $\forall t > t_0$ les sorties correspondantes $y_0(t)$ et $y_1(t)$ sont identiques quelle que soit l'entrée $u[t_0,t]$ appliquée au système.

Définition 2 : observabilité

Un état x_0 est **observable** s'il existe une commande u_0 qui permette de « discerner » x_0 de tous les autres états.

Ainsi, ce n'est pas parce qu'un système est observable que toute entrée permet de discerner tous les états. *L'observabilité dépend donc de l'entrée.* La définition ci-dessus a un caractère global, ce qui signifie qu'il faut peut-être attendre longtemps (voire infiniment) ou parcourir des trajectoires très grandes dans l'espace d'état avant de pouvoir déceler des comportements entrées/sorties différents.

Définition 3 : observabilité locale

Si, au contraire, il existe T tel que l'on arrive à distinguer x_0 sur $[t_0, T]$, alors x_0 est **localement observable** (les sorties sont "immédiatement ou rapidement" différentes).

L'observabilité locale implique donc l'observabilité.

Définition 4 : observabilité faible

Si on arrive seulement à distinguer x_0 de ses voisins, alors x_0 est **faiblement observable**.

En pratique, il est bien souvent suffisant de pouvoir distinguer « x_0 » de ses voisins, dès l'instant où l'on dispose d'une valeur approchée de « x_0 ». **L'observabilité faible locale** découle directement de la combinaison des deux notions précédentes. Elle peut être démontrée via une condition suffisante, présentée par la suite.

En résumé, on obtient donc le diagramme d'implications suivant [Cherki, 96] :

$$\begin{array}{ccc} \text{(S) localement observable} & \Rightarrow & \text{(S) observable} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{(S) localement faiblement observable} & \Rightarrow & \text{(S) faiblement observable} \end{array}$$

Pour les systèmes linéaires invariants ces quatre notions d'observabilité sont équivalentes.

4.2.1.2 Approche globale

Une deuxième définition de l'observabilité pour un système non linéaire utilise une approche globale : c'est l'observabilité générique [Diop, Fliess, 91a, Diop, Fliess, 91b].

Définition 5 : observabilité générique

Un système est observable si et seulement si on peut exprimer le vecteur d'état en fonction du vecteur d'entrée, du vecteur de sortie et de leurs dérivées temporelles. Soit :

$$x = \varphi(y, \dot{y}, \dots, y^{(k_1)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(k_2)}) \quad (2.42)$$

k_1 et k_2 entiers quelconques et pas forcément inférieurs à n , dimension du vecteur d'état.

Cette définition correspond à l'observabilité faible locale d'Hermann et Krener. Néanmoins, elle est globale dans le sens qu'un système dont les singularités¹ ont une dimension strictement inférieure à « n » est dit **génériquement** observable (autrement dit, si un système est observable sauf pour des ensembles dégénérés, ces derniers ne sont pas considérés).

Par ailleurs, Diop et Fliess [Diop, Fliess, 91b] démontrent que l'observabilité est un concept linéaire, dans le sens qu'un système non linéaire est observable si et seulement si son linéarisé tangent l'est aussi.

4.2.2 Condition de rang d'observabilité

L'observabilité peut être démontrée via une condition *suffisante* de rang. Pour les systèmes sous forme d'état, l'approche d'Hermann et Krener et l'approche de Diop et Fliess conduisent au même test.

Il existe différentes variantes de cette condition en fonction de l'ordre de dérivation maximal choisi. La forme présentée ici est extraite de [Hernandez, 94] et l'ordre de dérivation maximal est égal à $n-1$. Pour exprimer la condition de rang d'observabilité, introduisons d'abord la dérivation de Lie.

Définition 6 : dérivée de Lie

Soit $g: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ une fonction réelle dérivable et $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ une fonction réelle vectorielle, alors la dérivée de Lie de « g » par rapport à « f » est le champ de vecteurs défini par :

$$L_f g = \frac{\partial g}{\partial x} f \quad (2.43)$$

L'intérêt de la dérivation de Lie pour les systèmes dynamiques apparaît immédiatement en considérant par exemple le système mono-sortie suivant :

¹ Une singularité est ici un sous espace de l'espace d'état pour lequel le système n'est pas observable.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x) \end{cases} \quad (2.44)$$

les dérivées de la sortie par rapport au temps donnent :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial g}{\partial x} f = L_f g \\ \ddot{y} &= \frac{\partial [L_f g]}{\partial t} = L_f^2 g \end{aligned} \quad (2.45)$$

Par conséquent, en écrivant « $L_f g$ » à la place de « \dot{y} », on indique clairement que l'on prend en compte le modèle d'évolution du système dans la condition de rang ; c'est là un intérêt de la notation avec les dérivées de Lie.

Nous choisissons la convention d'écrire « dg » le vecteur gradient de la fonction « g » par rapport à l'état « X », soit :

$$dg = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g}{\partial x_n} \right]^t \quad (2.46)$$

Condition de rang

Soit, maintenant, $g : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^p$. Ses composantes s'écrivent :

$$g = \begin{bmatrix} g^1 & \dots & g^p \end{bmatrix}^t \quad (2.47)$$

Soit la matrice d'observabilité \mathbf{O} , définie par :

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} dg^1 & dL_f g^1 & \dots & dL_f^{n-1} g^1 & \dots & dg^p & \dots & dL_f^{n-1} g^p \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Si la matrice \mathbf{O} est de rang plein, alors le système est localement faiblement observable.

Par implication, le système est dans ce cas faiblement observable.

4.2.3 Entrées universelles et singulières

Comme on l'a remarqué, les entrées jouent un rôle important sur l'observabilité : ce phénomène est typique des systèmes non linéaires. Ainsi, on définit des entrées universelles et singulières.

Définition 7 : entrées universelles et singulières

*Une entrée est dite **universelle** pour un système, si elle discerne tout couple d'états initiaux discernables. Une entrée non universelle est dite **singulière**.*

L'incidence des entrées sur l'observabilité introduit un nouveau concept :

Définition 8 : observabilité complète

Un système dont toutes les entrées sont universelles est dit **complètement ou uniformément observable**.

4.3 Modélisation continue du problème de localisation

La théorie de l'observabilité nécessite de connaître à chaque instant les entrées appliquées au système, les sorties, et leurs dérivées temporelles respectives. Or, notre problème, outre son caractère discret, est assez différent puisque les mesures angulaires des balises ne sont pas simultanées, et pire encore elles ne sont pas cadencées. Nous allons donc supposer que ces mesures sont disponibles simultanément et de façon continue. Ceci pourrait être obtenu en considérant un capteur composé de trois caméras asservies en position sur les balises par exemple.

L'état continu du système est noté $X = [x, y, \theta]^t$. Ainsi l'équation d'observation correspondant à la balise B^k , de coordonnées (x_{B^k}, y_{B^k}) , s'écrit :

$$\lambda_k = \text{atan2}(y_{B^k} - y, x_{B^k} - x) - \theta = g^k(X) \quad 1 \leq k \leq m \quad (2.49)$$

Remarque : l'exposant « k » de la fonction « g » ne doit pas être confondu avec un ordre de dérivation ou une puissance. Il représente le numéro de la balise.

Si on a « m » balises, on regroupe les « m » mesures en un seul vecteur « λ ». Par exemple, dans le mode de fonctionnement normal (figure 2.6), $m=3$, et alors :

$$\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3]^t \text{ et } g(X) = [g^1(X) \quad g^2(X) \quad g^3(X)]^t \quad (2.50)$$

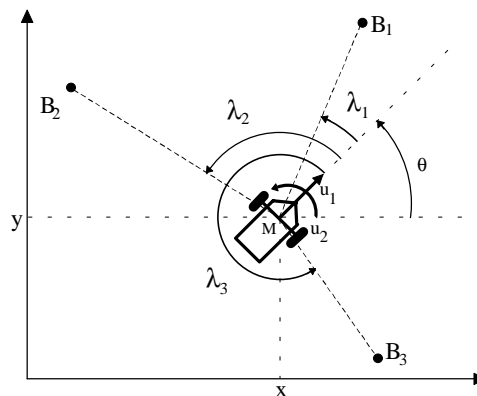


figure 2.6 : angles d'azimut avec trois balises

Par ailleurs, le vecteur de commande appliqué au mobile est $U = [v \quad w]^t$ où « v » représente la vitesse linéaire et « w » la vitesse angulaire.

Le modèle cinématique déjà présenté est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = w \end{cases} \quad (2.51)$$

Système d'équations que l'on réécrit :

$$\dot{X} = f(X, U) \quad (2.52)$$

Enfin, pour l'étude de l'observabilité, **on ne considère pas les bruits des différents capteurs**. On suppose donc que U et λ sont parfaitement connus.

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X, U) & X \in \mathcal{R}^3 \\ \lambda = g(X) & \lambda \in \mathcal{R}^m \end{cases} \quad (2.53)$$

4.4 Application au système (robot + SIREM + balises)

4.4.1 Démarche

Nous allons appliquer la condition de rang d'observabilité au système constitué du robot, du capteur SIREM et des balises [Bonnifait, Garcia, 96 b]. Ce système est donc caractérisé par son nombre de balises. Ainsi les systèmes (Robot + SIREM + 3 balises) et (Robot + SIREM + 2 balises) sont différents. Nous allons supposer ici que la dimension « p » du vecteur λ (c'est-à-dire « p » balises) est constante pendant un intervalle $[t_0, T]$ suffisamment grand :

$$\text{pour tout } t \in [t_0, T] \begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t), U(t)) & X \in \mathcal{R}^3 \\ \lambda(t) = g(X(t)) & \lambda \in \mathcal{R}^p \text{ avec } p \leq 3 \end{cases} \quad (2.54)$$

Nous allons considérer successivement les systèmes de trois, deux puis une balise, et leur appliquer la condition de rang d'observabilité. Comme cette condition est suffisante et non nécessaire (on peut pour s'en convaincre consulter des contre-exemples simples dans [Hernandez, 94]), les situations dans lesquelles elle ne sera pas vérifiée seront appelées « potentiellement problématiques ».

Nous proposons d'étudier le comportement de notre observateur sur ces trajectoires, en simulation², selon le principe suivant.

² Un autre intérêt des simulations est de vérifier si les hypothèses émises pour appliquer la condition de rang (modélisation continue du système et bruits des capteurs négligés) sont acceptables.

Le fait que, sur une trajectoire potentiellement problématique, les erreurs d'estimation du filtre aient une moyenne nulle et une variance bornée, après un éventuel régime transitoire, est nécessaire mais pas suffisant pour affirmer que l'état est observable le long de la trajectoire avec notre observateur. Il nous semble aussi intéressant de considérer l'effet des conditions initiales (notamment d'une erreur initiale) sur le fonctionnement du filtre. Ainsi, nous proposons de mettre en œuvre deux filtrages sur les mêmes données bruitées, l'un d'eux présentant une localisation initiale erronée. Nous dirons que l'état est observable le long de la trajectoire avec notre observateur si les erreurs d'estimation des deux filtrages, en plus d'être centrées et à variance bornée, se confondent en régime permanent. Pas abus de langage, on dira dans ce cas que la trajectoire est observable. Dans le cas inverse, la trajectoire sera dite « réellement problématique ».

4.4.2 Trois balises

Le cas de trois balises est d'une particulière importance puisqu'il constitue le mode de fonctionnement normal.

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t), U(t)) & X \in \mathfrak{R}^3 \\ \lambda(t) = g(X(t)) & \lambda \in \mathfrak{R}^3 \end{cases} \quad (2.55)$$

4.4.2.1 Utilisation du théorème de la fonction inverse.

Nous sommes dans le cas particulier évoqué au paragraphe 4.2.1, puisque $n=p=3$. Dans ce cas, on peut exprimer X en fonction de λ si on arrive à inverser « g » grâce au théorème de la fonction inverse.

Considérons la jacobienne \mathbf{O}_1 :

$$\mathbf{O}_1 = [dg^1 \quad dg^2 \quad dg^3] \quad (2.56)$$

$$dg^i = \left[\frac{y_{B^i} - y}{D_i} \quad \frac{x - x_{B^i}}{D_i} \quad -1 \right]^t \quad (2.57)$$

$$D_i = (y - y_{B^i})^2 + (x - x_{B^i})^2 \quad (2.58)$$

Le théorème de la fonction inverse est vérifié si le déterminant de \mathbf{O}_1 est différent de zéro (\mathbf{O}_1 de rang plein). On cherche donc si il existe des solutions à l'équation :

$$\det(\mathbf{O}_1) = 0 \quad (2.59)$$

Après calcul, les racines de cette équation forment l'unique cercle (C) passant par les trois balises supposées non-alignées (figure 2.7).

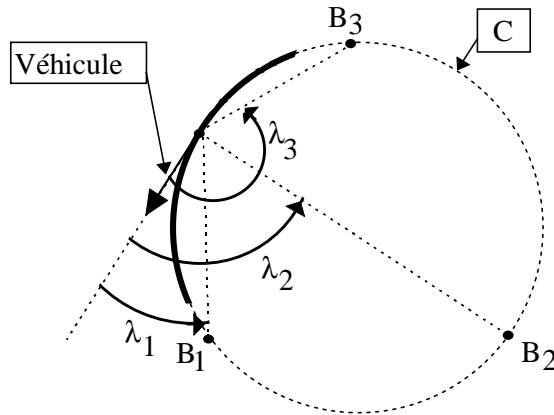


figure 2.7 : situation problématique avec trois balises

Puisque « g » est inversible pour X n'appartenant pas à (C), et puisque le terme de commande « U » n'a pas été considéré, on en conclut que **le système est faiblement localement uniformément observable pour tout X en dehors de (C)**. Comme de plus l'ensemble des configurations singulières est de mesure nulle, on en déduit que le système est « génériquement observable ». Ce résultat favorable est d'une grande importance pratique puisqu'en fonctionnement normal SIREM dispose de trois balises de manière à pouvoir initialiser sa localisation.

On peut fournir une explication géométrique du problème qui se produit sur (C). En effet, deux mesures azimutales définissent un arc de cercle, passant par les deux balises relevées, sur lequel se trouve le mobile. Cet arc est défini par la contrainte $\lambda_2 - \lambda_1 = \alpha$ (figure 2.8). Sur la portion restante du cercle, $\lambda_2 - \lambda_1 = \pi - \alpha$.

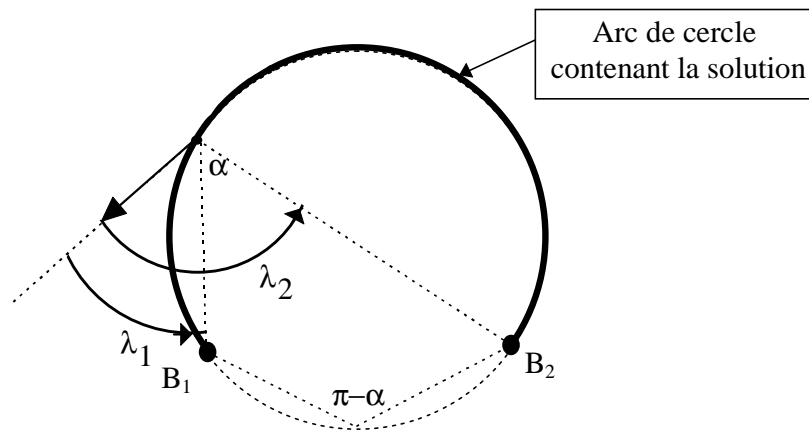


figure 2.8 : arc solution avec deux azimuts

En utilisant le troisième angle, on se ramène à l'intersection de deux arcs de cercles qui définissent la position de l'engin comme indiqué sur la figure 2.9 (le troisième cercle coupe les deux autres au même point). Le cap est donné par un des trois angles.

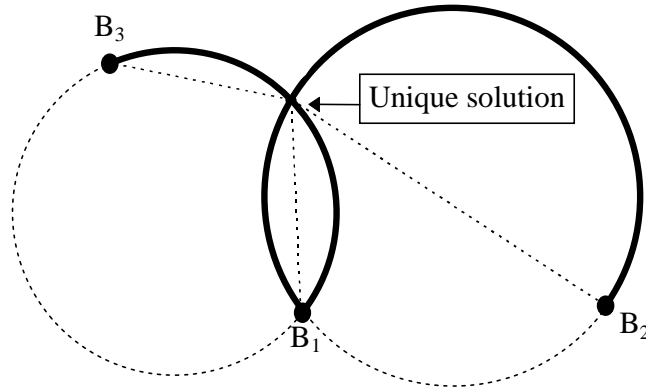


figure 2.9 : solution unique avec 3 azimuts

Si le robot se trouve sur (C), alors l'intersection des trois arcs de cercle est un arc de cercle de longueur non nulle, ce qui donne une infinité de solutions.

Il existe une deuxième interprétation du phénomène. On a (cf. figure 2.7) :

$$\begin{cases} \lambda_2 - \lambda_1 = \alpha_{12} \\ \lambda_3 - \lambda_1 = \alpha_{13} \\ \lambda_3 - \lambda_2 = \alpha_{23} \end{cases} \quad (2.60)$$

Les scalaires α_{ij} sont constants et ne dépendent que de (C). Ainsi, connaissant λ_1 on en déduit λ_2 et λ_3 . Par conséquent, quand la solution est sur (C), λ_2 et λ_3 n'apportent aucune information supplémentaire.

4.4.2.2 Utilisation de la condition d'observabilité sur le cercle passant par les trois balises

Dans le paragraphe précédent (4.4.2.1), la théorie de l'observabilité n'a pas été utilisée. Nous allons maintenant utiliser la condition de rang, ce qui sous entend que nous allons prendre en compte le modèle d'évolution. La matrice d'observation est :

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} dg^1 & dL_f g^1 & dL_f^2 g^1 & \dots & dg^3 & \dots & dL_f^2 g^3 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{3 \times 9} \quad (2.61)$$

où la notation $\mathfrak{R}^{i \times j}$ représente l'ensemble des matrices réelles de « i » lignes et « j » colonnes.

Les dérivées premières de Lie ont la forme suivante :

$$L_f g^i(\mathbf{X}) = v \left(\frac{y_{B^i} - y}{D_i} \cos \theta + \frac{x - x_{B^i}}{D_i} \sin \theta \right) - w \quad (2.62)$$

Ainsi, si $v = 0$ (pas de vitesse de translation ou véhicule tournant autour du point milieu de l'essieu), alors :

$$L_f g^i(\mathbf{X}) = -w \quad (2.63)$$

Ainsi :

$$\forall X, \forall w \quad dL_f g^i = dL_f^2 g^i = \vec{0} \tag{2.64}$$

Par conséquent :

$$\text{si } v = 0 \text{ alors } \mathbf{O} = [dg^1 \quad dg^2 \quad dg^3 \quad \vec{0} \quad \dots \quad \vec{0}] \tag{2.65}$$

Dans ce cas, le rang de \mathbf{O} est le même que celui de la matrice \mathbf{O}_1 du paragraphe précédent et est donc inférieur strictement à trois sur (C). La condition d'observabilité n'est donc pas vérifiée et nous sommes confrontés à une situation potentiellement problématique.

La figure 2.10 donne les résultats de simulations, pour un robot à l'arrêt sur (C). Comme annoncé, deux filtres sont mis en œuvre avec les mêmes mesures bruitées, mais l'un d'eux a en plus une localisation initiale avec une erreur. Le comportement des filtres est analysé grâce à l'erreur de cap et l'erreur absolue de position. Il est à noter que cette dernière est toujours positive et il est donc impossible de vérifier si elle est centrée, contrairement à l'erreur de cap.

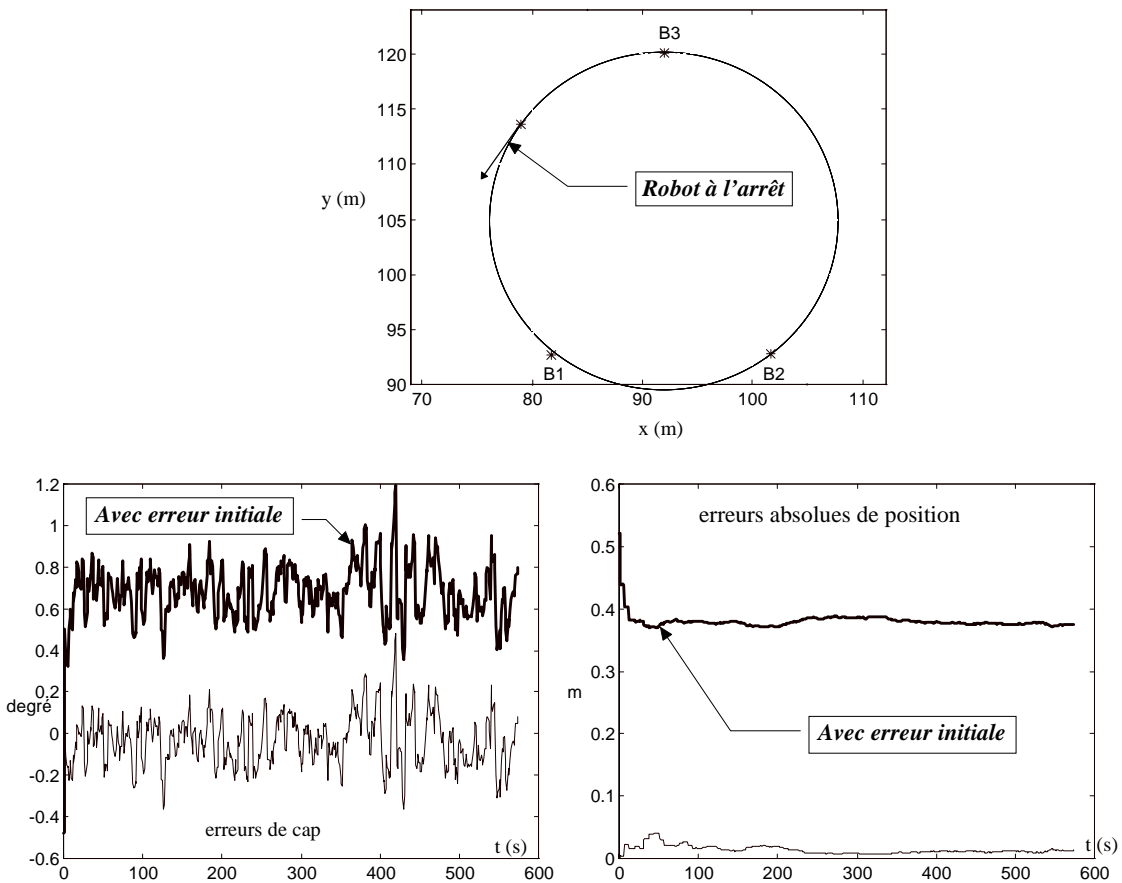


figure 2.10 : erreurs du filtre pour un véhicule à l'arrêt sur (C) avec trois balises

A la vue des courbes ci-dessus, on constate que le filtre avec erreur initiale fournit des localisations erronées, avec des erreurs différentes de celles introduites initialement mais qui

semblent, en moyenne, rester constantes : on vérifie que l'estimée se trouve aussi sur (C). Par ailleurs, le filtre sans erreur initiale ne prend pas de biais.

Nous pouvons donc conclure que si le véhicule est à l'arrêt sur (C), le filtre est incapable de ramener à zéro une erreur initiale. C'est donc une situation problématique. Par conséquent, ce résultat indique que, pour initialiser le processus d'estimation (véhicule arrêté), il convient de ne pas placer SIREM sur (C) et même qu'il faut certainement s'en éloigner. On verra lors d'essais réels, le comportement induit par une initialisation sur le cercle sur la méthode itérative déterministe d'initialisation.

Si maintenant le mobile se déplace sur le cercle (« v » et « w » non nuls), la matrice \mathbf{O} doit être considérée dans son ensemble pour en déterminer le rang. Ce problème n'est pas simple vu la complexité des expressions des fonctions « $dL_f g^i$ » et « $dL_f^2 g^i$ ». On peut essayer d'extraire des sous matrices 3x3 de \mathbf{O} et d'en calculer le rang, mais les calculs deviennent vite inextricables, même à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique. Alternativement, nous proposons de tester le comportement du filtre pour un véhicule se déplaçant sur (C) (à la vitesse constante de 0.2 m/s).

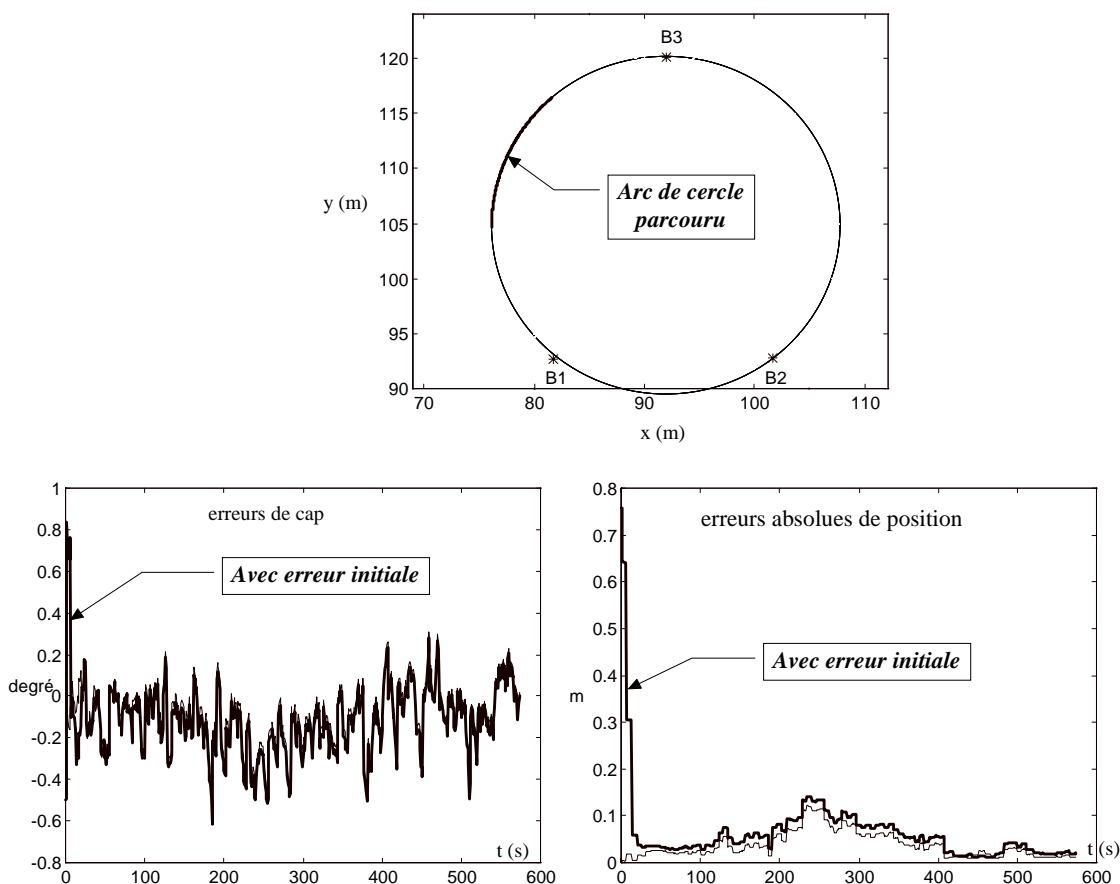


figure 2.11 : erreurs du filtre pour un véhicule parcourant un arc de (C) avec trois balises

Les résultats de la figure 2.11 indiquent clairement que le filtre est capable de corriger une erreur initiale (les erreurs de cap se confondent presque), même si la précision des localisations fournies est dégradée par rapport à d'autres trajectoires.

La trajectoire devient donc observable (pour notre filtre) grâce au modèle d'évolution (c'est-à-dire aux équations odométriques) qui apporte des informations supplémentaires sur l'évolution de l'état. On constate ici le rôle que peut jouer l'entrée sur l'observabilité.

4.4.3 Deux balises

Dans ce paragraphe, parce qu'une balise est cachée ou trop loin, le capteur SIREM ne détecte que deux balises, alors :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)) \\ \lambda(t) = \mathbf{g}(\mathbf{X}(t)) \end{cases} \quad \lambda \in \mathfrak{R}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{X}} & = & \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \\ \lambda_1 & = & \mathbf{g}^1(\mathbf{X}) \\ \lambda_2 & = & \mathbf{g}^2(\mathbf{X}) \end{cases} \quad (2.66)$$

Comme $p < n$, l'observation de l'état ne peut être réalisée en utilisant les mesures azimutales seules. Le modèle d'évolution (et par voie de conséquence les entrées) joue donc un rôle important sur l'observabilité.

La matrice d'observabilité s'écrit :

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} d\mathbf{g}^1 & d\mathbf{L}_f \mathbf{g}^1 & d\mathbf{L}_f^2 \mathbf{g}^1 & d\mathbf{g}^2 & d\mathbf{L}_f \mathbf{g}^2 & d\mathbf{L}_f^2 \mathbf{g}^2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{3 \times 6} \quad (2.67)$$

Si « v » est nul alors, comme pour l'équation (2.65) :

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} d\mathbf{g}^1 & d\mathbf{g}^2 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Par conséquent, dans ce cas le rang de \mathbf{O} est inférieur ou égal à deux. Nous rencontrons ici aussi une situation qui est effectivement problématique au vu des courbes de la figure 2.12.

Le filtre n'est pas capable de corriger l'erreur de localisation initiale. Ce résultat n'est pas surprenant car deux mesures azimutales sont évidemment insuffisantes pour déterminer la localisation statique (position et cap) du mobile.

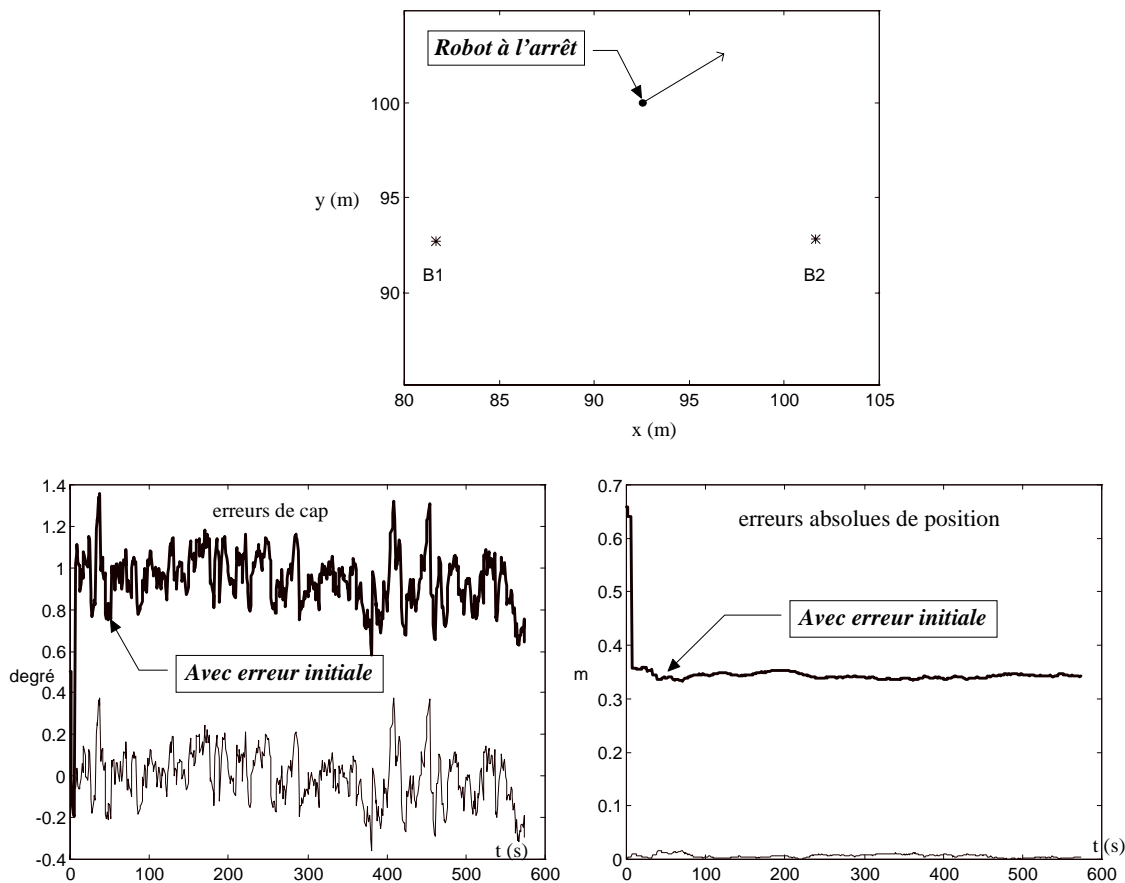


figure 2.12 : erreurs du filtre pour un mobile à l'arrêt avec deux balises

Par la suite, on suppose que « v » est non nulle. Considérons les déterminants, notés « s_i », des $C_3^6 = 20$ sous matrices de \mathbf{O} .

Comme pour le paragraphe 4.4.2.1, nous cherchons les trajectoires qui font chuter le rang de \mathbf{O} , c'est-à-dire que nous cherchons $(X, U) = (x, y, \theta, v, w)$ tels que :

$$\begin{cases} s_1 & = & 0 \\ & \dots & \\ s_{20} & = & 0 \end{cases} \tag{2.69}$$

Ce système est non linéaire et différentiel en U . Comme ce système est constitué de 20 équations (on verra au paragraphe suivant qu'en fait $s_1 = s_{11} = 0$, ce qui donne 18 équations) les calculs sont complexes et laborieux.

Afin de simplifier le problème, nous proposons d'introduire deux nouvelles variables « v' » et « w' » définies de la façon suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v' \quad \frac{\partial w}{\partial t} = w' \tag{2.70}$$

Le système (2.69) n'est plus différentiel et a pour inconnues $(x, y, \theta, v, w, v', w')$.

Nous avons utilisé un logiciel de calcul symbolique (Maple) qui a fourni *des* solutions. Les solutions obtenues (au nombre de 16) sont effectivement racines du système mais il n'est pas sûr que Maple n'en ait pas oublié.

Aux 16 solutions, nous appliquons les contraintes (2.70). Ces contraintes sont par exemple : si « v' » est nulle alors « v » est constante, ou bien « v » nulle implique « v' » égale à zéro, etc. Finalement, nous obtenons les situations potentiellement problématiques de la figure 2.13, c'est-à-dire trois droites à *vitesse et sens de parcours quelconques*.

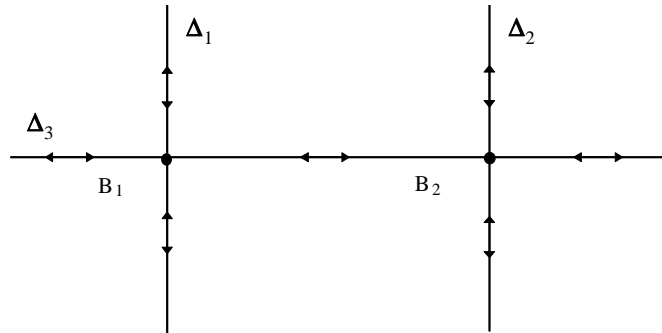


figure 2.13 : droites potentiellement problématiques avec deux balises

Nous nous sommes intéressés de plus près aux autres droites passant par B_1 ou B_2 . Nous avons pu, pour chaque droite non verticale et non horizontale extraire des sous matrices de rang plein, si, évidemment, la vitesse de translation est non nulle. L'observabilité est donc prouvée. Le test ci-dessous (figure 2.14) confirme ce résultat.

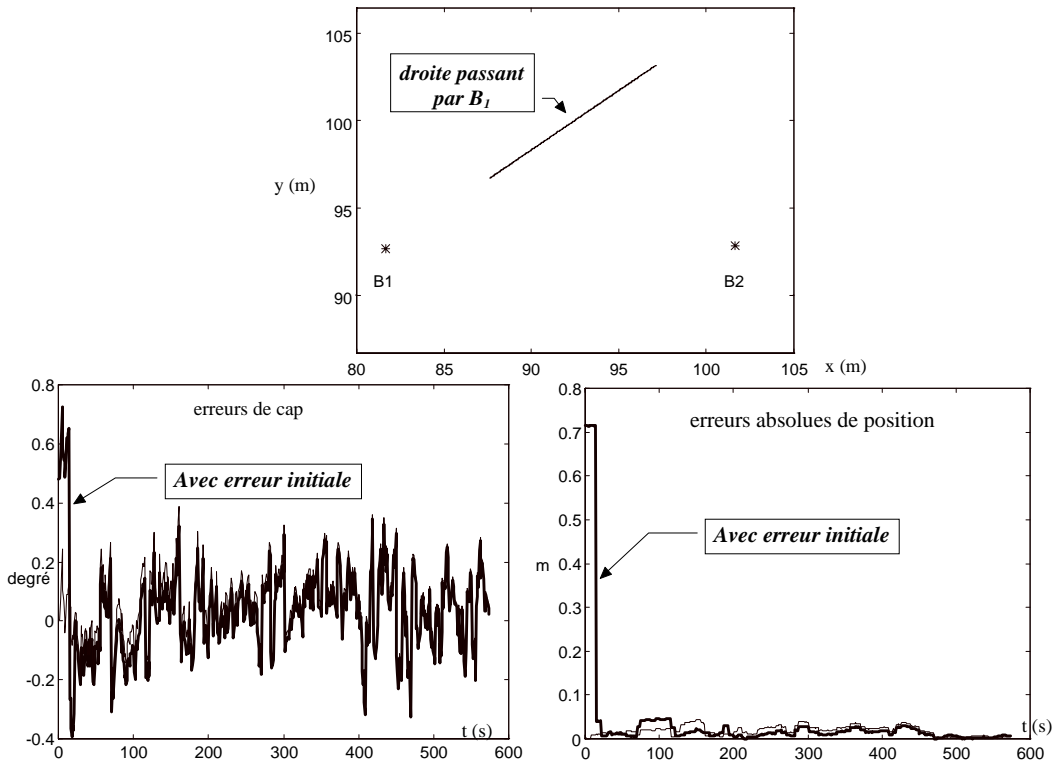


figure 2.14 : erreurs du filtre sur une droite passant par une des deux balises

Pour un véhicule suivant Δ_3 , tout se passe comme s'il ne voyait qu'une balise. Ce cas est étudié au paragraphe suivant.

Considérons maintenant le véhicule suivant Δ_1 en direction de B_1 .

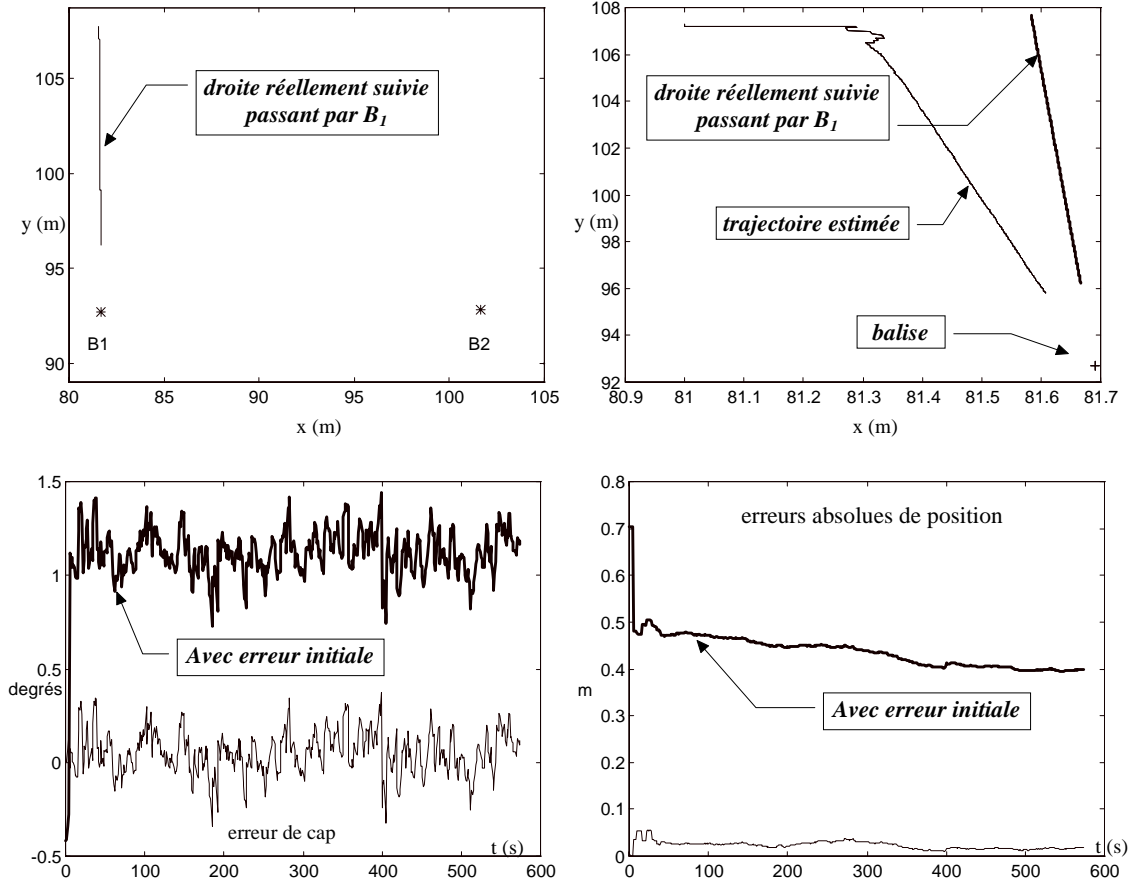


figure 2.15 : erreurs du filtre pour un mobile suivant Δ_1 vers B_1

On constate dans ce test (figure 2.15) que le filtre n'est pas capable de ramener à zéro une erreur initiale. On note de plus que la trajectoire estimée ressemble fort à une droite qui passe elle aussi par la balise (cf. figure 2.15 courbe en haut à droite - attention aux échelles). Cette trajectoire estimée dépend, en plus de l'erreur initiale, de la matrice de variance-covariance initiale.

Il faut remarquer qu'un mobile suivant par exemple Δ_1 mesure un azimut λ_1 constant dont toutes les dérivées temporelles sont nulles. Dans ce cas, \mathbf{O} ne peut être de rang plein que si λ_2 évolue dans le temps, ce qui implique un déplacement du mobile. Par contre, intuitivement il n'est pas facile de comprendre pourquoi Δ_1 et Δ_2 sont différentes des autres droites passant par B_1 ou B_2 . Nous proposons ci-après une explication géométrique.

Supposons qu'à un instant k , l'estimée et la vraie position du mobile soient toutes deux sur un même cercle passant par B_1 et B_2 et orientées vers B_1 . Puisque les deux angles d'azimut

de B_2 (la mesure et sa prédiction) sont les mêmes (figure 2.16), le filtre ne peut pas corriger l'erreur d'estimation.

A l'instant $k+1$, les systèmes réel et estimé ont parcouru la même distance ΔD et ainsi ne se retrouvent plus sur le même cercle. Par conséquent les angles d'azimut deviennent différents et le filtre peut corriger l'erreur.

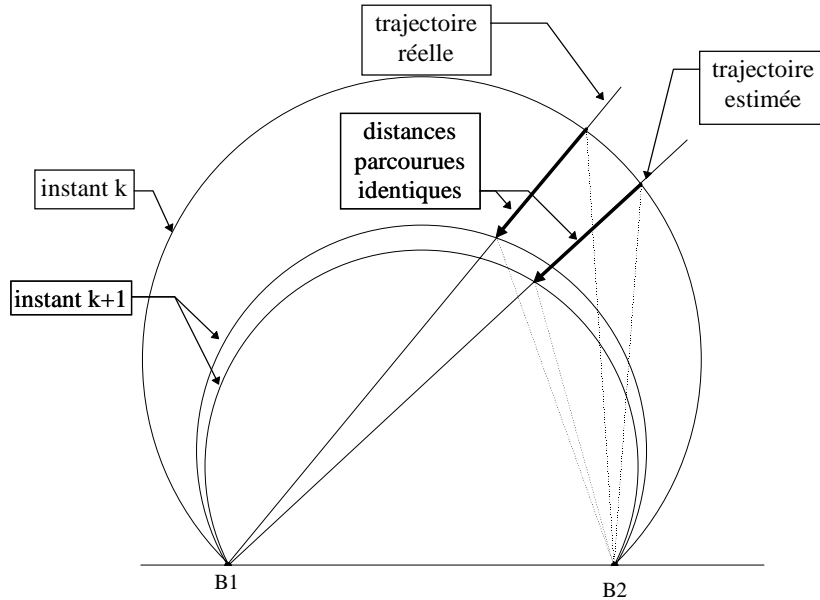


figure 2.16 : à l'instant k , les angles d'azimut de B_2 sont les mêmes à l'instant $k+1$, ils deviennent différents

En fait, plus les trajectoires réelle et estimée sont proches de Δ_1 , plus les cercles sont proches et, le bruit de mesures aidant, « le filtre n'a pas l'impression d'une erreur ». Pour mettre ce phénomène en évidence, comparons la différence de distance parcourue ($\Delta D_e - \Delta D_r$) (figure 2.17) par les systèmes estimé et réel pour un décalage angulaire $\delta = 0,1^\circ$ constant et une distance entre les balises de 20 m.

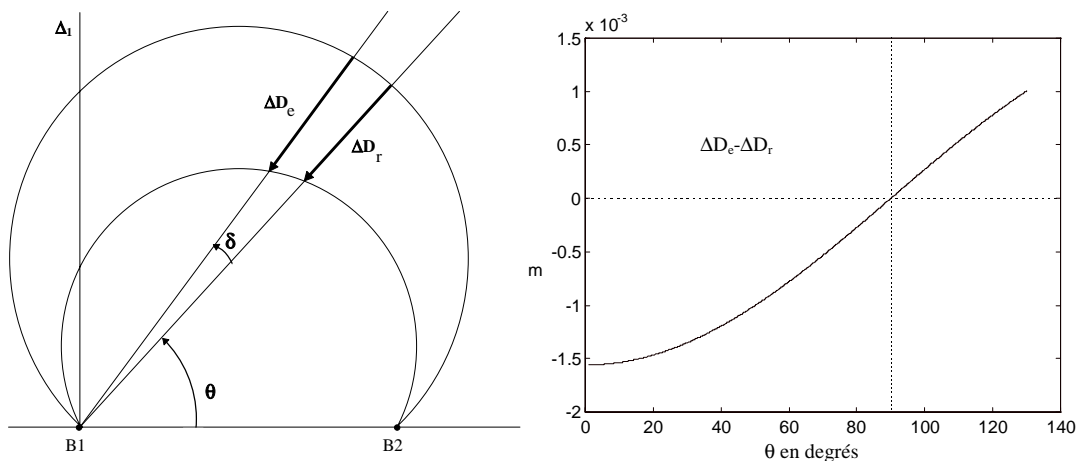


figure 2.17 : évolution de la différence de distance parcourue en fonction de θ

On constate donc, que quand θ égale 90° , c'est-à-dire pour la droite Δ_1 , la différence est nulle. La distance mesurée ne permet plus de discerner deux droites proches de Δ_1 .

Remarque 1 :

L'algorithme de localisation proposé dans [Boley, Steinmetz, Sutherland, 96] n'utilise qu'une caméra matricielle qui fournit des angles d'azimut relatifs identiques à ceux de SIREM. Sans utiliser de capteurs proprioceptifs et grâce à une hypothèse de mouvement approximativement en ligne droite, leur modélisation linéaire permet une résolution par moindres carrés récursifs. Sans entrer plus dans les détails, il est donc à noter les différences entre leur système et le nôtre, aussi bien au niveau des capteurs que des algorithmes mis en œuvre.

Nous avons demandé à Daniel Boley [Boley, 96] de tester son algorithme sur une perpendiculaire aux deux balises passant par une des balises ; il nous a rapporté que, sur ce chemin, sa méthode donne de mauvais résultats.

Sans pour autant pouvoir l'affirmer, il semble donc que le système ne soit pas observable sur les droites Δ_1 et Δ_2 , puisque deux observateurs de natures différentes sont mis en défaut sur ces droites.

Remarque 2 :

Daniel Boley nous a aussi fait part que son système ne fonctionne pas quelle que soit la droite dirigée vers une balise. Dans [Boley, Steinmetz, Sutherland, 96], il démontre que sa méthode de résolution ne peut converger quand le mobile se dirige sur une balise. Ceci représente une différence intéressante avec notre solution basée sur le filtre de Kalman. En effet, notre filtre fonctionne lorsque l'engin suit une droite passant par une des deux balises, sauf celles de la figure 2.13.

Remarque 3 :

Il est clair que les droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 ne sont pas des zones dégénérées où les performances de notre filtre se dégradent brusquement. En fait, plus le robot se trouve dans une situation proche de ces trois cas, plus son fonctionnement sera perturbé.

Enfin, pour être plus complet sur l'étude du cas où il y a deux balises, l'étude du rang de la matrice d'observabilité n'a pas mis en évidence de cercle problématique. Or, vu l'expérience du paragraphe 4.4.2, on peut se demander si Maple n'a pas oublié des solutions correspondant à des cercles. La figure 2.18 rapporte les résultats d'une simulation d'un engin se déplaçant à vitesse constante sur un cercle passant par les deux balises.

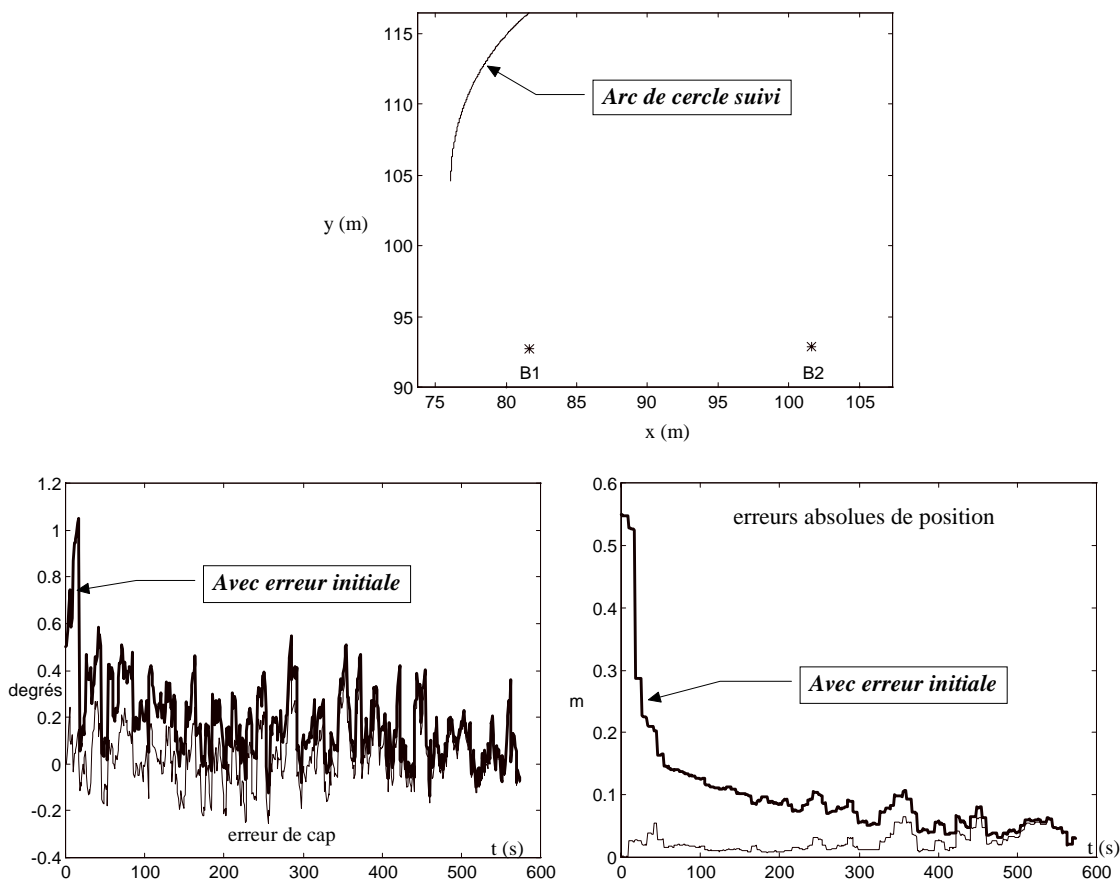


figure 2.18 : erreurs du filtre pour un mobile parcourant un arc de cercle passant par les deux balises

On vérifie donc le bon fonctionnement du filtre. Il est à noter que ce test a été réalisé dans des conditions plus défavorables que le test de la figure 2.11, puisqu'il n'y a que deux balises ici. Cet essai suffirait donc à lui seul pour indiquer que le cercle (C), dans le cas d'une vitesse non nulle et avec trois balises, constitue une trajectoire observable.

Sur un cercle passant par les deux balises, la différence des deux angles d'azimut sur le cercle est constante, quelle que soit la position du mobile. On peut aussi considérer un cercle dont une balise est le centre. Dans ce cas, un des deux angles d'azimut est constant et égal à $\pi/2$. Des simulations (non reportées ici) indiquent que, dans ce cas aussi, le filtre converge.

En conclusion de ce paragraphe, l'étude de l'observabilité a permis de trouver des situations problématiques qui n'étaient pas évidentes *a priori*. Par contre, du fait de la méthode, il nous est impossible de garantir que des trajectoires moins simples n'aient pas été oubliées. Les multiples simulations réalisées, même si elles ne sont pas exhaustives, nous rassurent cependant pour des trajectoires réalistes.

4.4.4 Une balise

Pour les mêmes raisons qu'au paragraphe précédent, SIREM peut ne voir parfois qu'une balise :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t), U(t)) \\ \lambda(t) = g(X(t)) \end{cases} \quad \lambda \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{X} = f(X, U) \\ \lambda_1 = g^1(X) \end{cases} \quad (2.71)$$

La matrice d'observation est maintenant carrée :

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} dg^1 & dL_f g^1 & dL_f^2 g^1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3 \times 3} \quad (2.72)$$

Après calculs, on obtient :

$$\det(\mathbf{O}) = 0 \text{ quels que soient } X \text{ et } U \quad (2.73)$$

Par conséquent, la matrice \mathbf{O} possède des colonnes ou des lignes qui sont combinaisons linéaires des autres. Dans ce cas, on dit que le système est *génériquement* non observable [Plestan, 95].

Ce résultat n'est pas surprenant puisqu'il est clair qu'avec une balise le système n'est pas observable. Par exemple, deux droites différentes à une même distance de la balise peuvent fournir les mêmes sorties pour une vitesse donnée : le véhicule estimé est en avance ou en retard par rapport au véhicule réel (figure 2.19a). On vérifie par simulation que le filtre se comporte comme prévu puisqu'il ne peut corriger une erreur initiale (figure 2.19b)

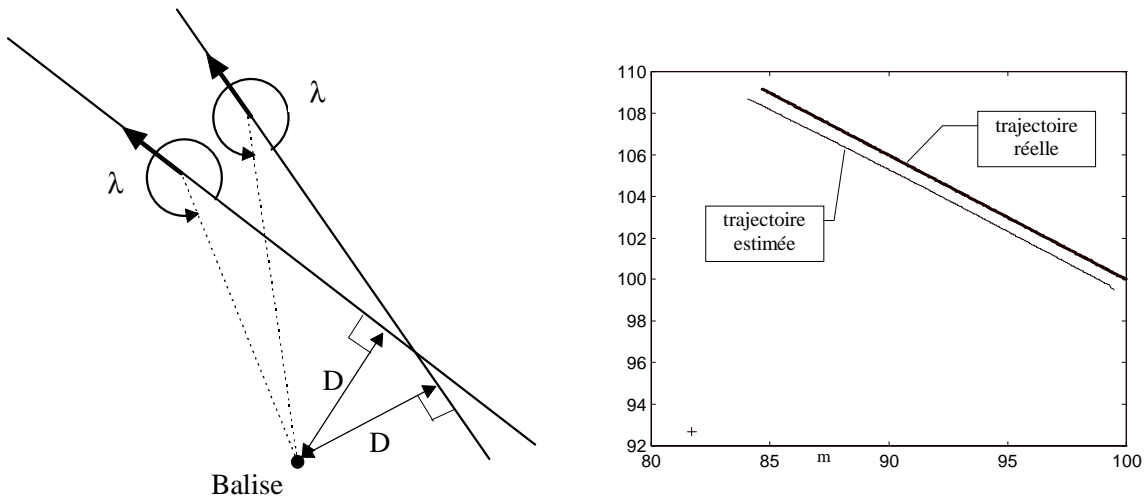


figure 2.19 : exemple de trajectoires donnant les mêmes angles d'azimut

Même si le mauvais fonctionnement du filtre avec une balise est clair, nous comparons néanmoins les comportements de deux filtres sans erreur initiale utilisant les mêmes données bruitées : le premier voit une balise et le deuxième n'en voit pas, c'est-à-dire fonctionne à l'odométrie pure (figure 2.20).

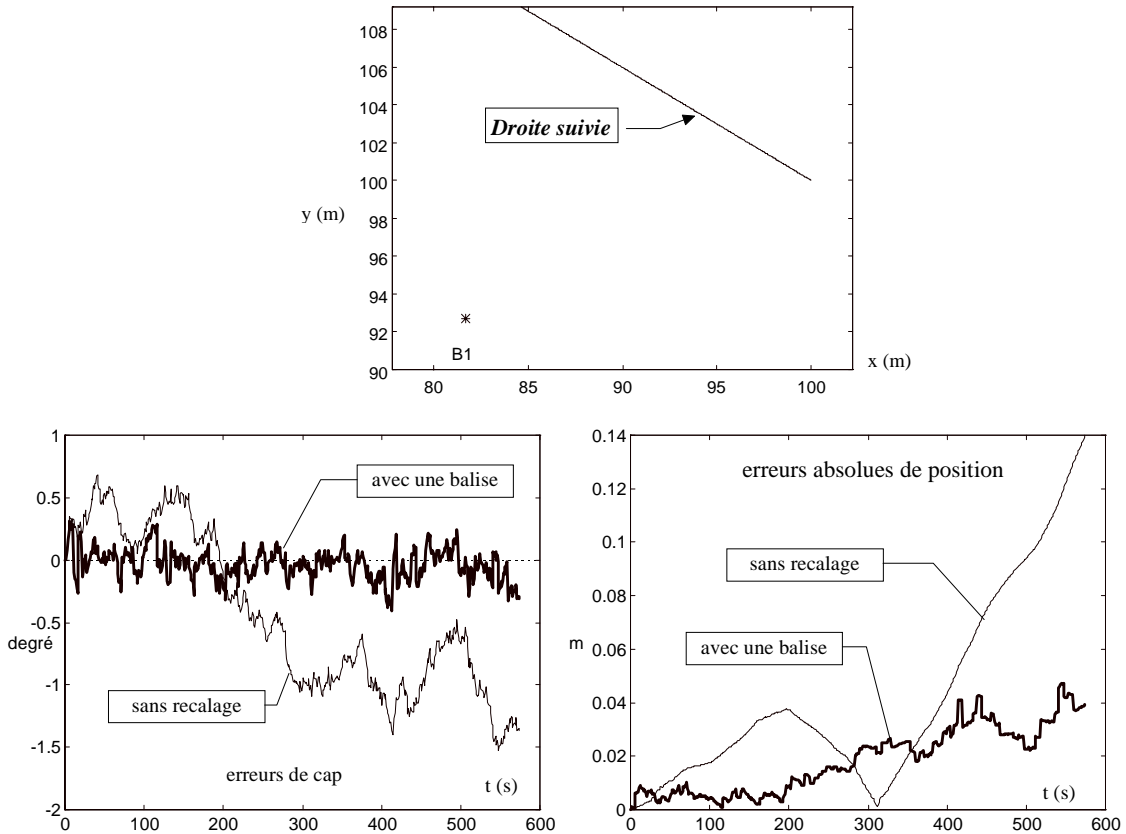


figure 2.20 : erreurs d'un filtre avec une balise et erreurs de l'odométrie pure

En conclusion, même si avec une balise on constate que les erreurs du filtre semblent croître sans borne, cette divergence est nettement moins rapide qu'à l'odométrie pure. Ainsi, le système peut accepter, pendant une durée limitée, de ne voir qu'une balise.

4.4.5 Bilan

Rappelons que ce qui nous intéresse n'est pas l'observabilité mais le bon fonctionnement de notre observateur. Or, nous pouvons déjà affirmer que notre filtre a un comportement satisfaisant sur un grand nombre de trajectoires.

On trouve ci-dessous le bilan des situations effectivement problématiques que nous avons pu déterminer grâce à l'étude de l'observabilité et grâce aux simulations :

- **3 Balises :** (1 cas dégénéré)

Le filtre ne peut corriger une erreur de localisation initiale, **si** le véhicule est sur le cercle (C) **et si** le véhicule est arrêté ou tourne sur place

- **2 Balises :**

Le filtre ne peut corriger une erreur de localisation initiale, si le véhicule est arrêté ou tourne sur place, ou s'il se déplace sur la droite (B_1, B_2) ou encore sur une des perpendiculaires à (B_1, B_2) passant par B_1 ou B_2 .

- **1 Balise :**

Divergence « lente » de l'observateur quelle que soit la trajectoire, c'est-à-dire que la divergence est moins rapide qu'à l'odométrie pure.

4.5 Conclusion de l'étude de l'observabilité

Il ressort de ce travail que l'étude de l'observabilité d'un système non linéaire permet de trouver des trajectoires problématiques, par forcément évidentes *a priori*. Les singularités obtenues doivent être alors testées par simulation. Cependant, le caractère non nécessaire de la condition de rang n'a jamais pu être mis en défaut puisque toutes les situations potentiellement problématiques l'étaient vraiment pour notre filtre, en présence d'une erreur d'estimation initiale.

Par ailleurs, si l'erreur d'estimation est nulle ou faible, les simulations ont montré que le filtre se comporte de façon normale à l'apparition d'une situation problématique. Ce résultat est très intéressant en pratique car le véhicule peut rester momentanément sur une singularité. Ceci est d'autant plus important que les situations problématiques n'ont pas une probabilité nulle de se produire.

En outre, l'observabilité a permis de se rendre compte qu'il n'est pas nécessaire à SIREM de voir en permanence trois balises, puisque deux suffisent dans une grande majorité des cas, pour peu que l'engin se déplace. Ceci autorise donc des masquages ou des pertes momentanées de balises. Par contre, l'étude de l'observabilité ne renseigne pas sur l'influence du nombre d'amers, ou de leur position relativement à l'engin, sur la précision du système (GDOP³) ; il est clair qu'avec deux balises au lieu de trois, la précision est dégradée.

Malheureusement, dans le cas de deux balises, la condition de rang d'observabilité est trop lourde à utiliser pour étudier tous les cas possibles. Ainsi, malgré les diverses simulations effectuées, il nous est impossible de garantir que toutes les trajectoires problématiques se résument à celles que nous avons déterminées.

Enfin, il est important de noter que l'observabilité en non linéaire n'implique pas la convergence d'un observateur. En effet, dans le paragraphe 4.4.3, il a été constaté que le système de localisation de Boley divergeait sur des droites où l'observabilité était pourtant démontrée.

³ Global Dilution Of Precision. Il s'agit d'un terme scalaire qui renseigne sur la bonne ou mauvaise configuration géométrique du système.

5 AMELIORATION DE L'ODOMETRIE PAR IDENTIFICATION EN LIGNE DES RAYONS

Afin de recourir le moins possible à l'utilisation de capteurs extéroceptifs, on peut prolonger la durée d'utilisation de l'odométrie seule de différentes façons. Dans le cas qui nous intéresse, on part du principe que meilleure sera la localisation à l'estime, meilleure sera la précision du système global. Ainsi, nous proposons dans ce paragraphe un filtre qui permet d'identifier en ligne (c'est-à-dire, en même temps que sont calculées les localisations) les rayons des roues à pneus. Après avoir donné nos motivations, nous présentons la méthode, basée sur le filtrage de Kalman. Nous étudions ensuite le comportement de l'identification en cas d'erreur sur les paramètres géométriques. En particulier, bien que le filtre n'identifie en ligne que les rayons des roues, il est robuste à des erreurs sur la largeur de la voie. Enfin, nous montrons que des erreurs, mêmes faibles, sur les paramètres géométriques, peuvent engendrer des biais importants dans le processus de localisation [Garcia, Bonnifait, Le Corre, 95].

5.1 Introduction

L'odométrie est une technique de navigation dont l'erreur d'estime, quoi que l'on fasse, croît sans borne. Comme les erreurs qui interviennent dans ce processus intégrateur n'ont pas toutes le même impact sur le résultat, on propose de les classer dans trois catégories.

a) Erreurs de modèle de déplacement

Ces erreurs sont le résultat d'un modèle de déplacement pas assez précis, ou bien dont les hypothèses (roulement sans glissement, par exemple), ne sont pas vérifiées (modèle inadapté). Le cas extrême où l'engin patine ou dérape régulièrement ne correspond pas à l'application qui nous intéresse, puisque les vitesses et accélérations sont faibles et puisque la surface de roulement est assez régulière¹. L'expérience montre qu'en l'absence de glissement, ces erreurs sont négligeables [Boreinstein, Feng, 96b] à condition que la période d'échantillonnage soit suffisamment petite par rapport aux dynamiques de l'engin.

b) Erreurs systématiques (elles sont relatives au robot)

- imprécisions sur les rayons des roues ou variations lentes dans le cas de pneus.

¹ On suppose en plus que les roues sont parfaitement parallèles. Si cette condition de fonctionnement n'est pas exactement vérifiée, les frottements alors engendrés nous semblent négligeables par rapport aux autres sources d'erreur.

- imprécisions sur la largeur de la voie. La distance « e », qui intervient dans le modèle odométrique, est, par définition, la distance entre les points de contact des roues avec le sol. Une erreur sur la voie se fait sentir dans les virages mais pratiquement pas en ligne droite.

c) Erreurs à caractère aléatoire centré sur l'estimation du cap² (elles sont principalement dues au monde extérieur au robot)

- légers patinages ponctuels

- surface de roulement irrégulière (graviers, bosses, trous etc.)

- résolution limitée des codeurs.

Ce classement est motivé, en particulier, par le fait que dans le formalisme de Kalman les bruits sont supposés avoir une valeur moyenne nulle. Ainsi, des imprécisions sur les paramètres géométriques (erreurs systématiques) vont biaiser le processus d'estimation.

Dans le cas d'un odomètre comme celui que nous utilisons, Boreinstein et Feng proposent une méthode d'étalonnage qui permet, grâce au parcours dans les deux sens d'une trajectoire carrée (4x4 m), d'identifier de façon précise les rayons et la voie [Boreinstein, Feng, 96b] ; l'effet des erreurs systématiques est alors notablement réduit.

On peut aussi augmenter sensiblement les performances de l'odométrie en utilisant un odomètre indépendant [Ferrand, 92]. Les odomètres indépendants sont des dispositifs passifs tirés (ou poussés selon le sens de déplacement) par le robot. Ils sont constitués de deux roues folles indépendantes (quatre codeurs) ou montées sur le même essieu (trois codeurs). La deuxième solution présente l'avantage d'avoir une structure mécanique et des équations cinématiques simples. Ces odomètres peuvent néanmoins présenter l'inconvénient de pénaliser le mobile dans ses évolutions, à cause de leur encombrement. D'après A. Ferrand, la précision maximum que l'on peut atteindre sur sol parfaitement plan et à petite vitesse est de 0.2% de la distance parcourue.

Une autre amélioration consiste à jumeler les roues motrices ou porteuses avec des roues indépendantes (appelées alors « roues odométriques ») n'ayant pour rôle que la mesure de la rotation [Vaganay, 93]. Ces roues étroites sont montées sur l'essieu du véhicule et

² Il est à noter qu'une erreur de cap est la principale source d'erreur de l'odométrie puisqu'elle engendre alors une erreur latérale qui croît sans borne. Ainsi, même si les imperfections du terrain font que la distance mesurée par odométrie est toujours supérieure à celle réellement parcourue, l'erreur systématique de distance sera négligée par rapport à l'erreur centrée effectuée sur le cap.

possèdent un débattement vertical qui leur permet de suivre les irrégularités du sol. Ce genre d'odomètre est très précis (0.2%). Par contre, il n'est utilisable que si le véhicule possède un essieu.

Enfin, s'il existe des petits trous ou de légers obstacles sur le sol, et si une seule roue est confrontée à ces difficultés, l'estimation du cap peut se trouver considérablement dégradée. Dans [Boreinstein, Feng, 96a], les auteurs proposent une méthode simple et efficace qui consiste à remplacer la mesure angulaire odométrique par celle d'un gyromètre bon marché quand les deux mesures diffèrent sensiblement, c'est-à-dire pendant les courtes durées correspondant au franchissement des petits obstacles ; cette technique est appelée « gyrodométrie ».

Dans le cas du robot MELODY, des codeurs incrémentaux ont été disposés sur les roues motrices à pneus. Même si les paramètres géométriques ne sont alors pas facilement mesurables, l'inconvénient principal réside dans le fait qu'ils subissent des variations. En effet, sous l'effet de la charge, de l'inclinaison ou de la température, les rayons peuvent changer. Par ailleurs, la voie est mal connue car les roues sont larges et donc le point de contact avec le sol se déplace sur toute la largeur de la roue.

Afin de diminuer cet inconvénient, nous proposons, dans un premier temps, d'identifier en ligne les rayons. Nous montrerons par la suite que le fait de ne pas identifier la voie n'est pas pénalisant.

L'identification des rayons peut être aussi d'un certain intérêt pour la réalisation d'un odomètre à l'aide de codeurs montés sur les galets d'engins à chenilles. En effet, l'expérience montre que dans ce cas, selon la nature du terrain, le galet se comporte comme un galet de rayon apparent plus grand [Le Corre, 93]. En d'autres termes, à l'inverse du comportement habituel, la distance réellement parcourue par le mobile peut être supérieure à celle mesurée de façon odométrique.

5.2 Méthode d'identification

Puisque nous sommes dans un contexte de filtrage de Kalman, l'identification des rayons peut être réalisée en ajoutant simplement les rayons dans le vecteur d'état [Chui, Chen, 91]. Il s'agit d'identifier des biais à caractère déterministe.

Cette façon d'identifier en ligne des paramètres est aussi utilisée dans [Hashimoto *et al.*, 92] et [Durrant-Whyte, Bell, Avery, 95]. Dans les deux cas, un rayon moyen est identifié en cours de déplacement, soit parce que sa valeur n'est pas connue, soit parce que ce rayon

évolue dans le temps. Notre approche diffère car, comme nous pourrions le montrer, identifier deux rayons apporte de la robustesse au processus d'estimation. Par ailleurs, contrairement aux travaux dont nous avons connaissance, nous évaluerons l'amélioration apportée sur le fonctionnement global du filtre.

Le nouveau vecteur d'état est de dimension cinq :

$$\mathbf{X}'_i = [x_i \ y_i \ \theta_i \ rd_i \ rg_i]^t \quad (2.74)$$

Le modèle d'évolution des rayons est une constante. L'évolution est rendue possible en ajoutant un bruit blanc supposé indépendant de l'état et des autres bruits.

$$\begin{cases} rd_{i+1} = rd_i + \alpha_{rd} \\ rg_{i+1} = rg_i + \alpha_{rg} \end{cases} \quad (2.75)$$

Réécrivons les équations odométriques où les rayons apparaissent (2.13) et ajoutons-y le système (2.75) :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \frac{rd_i \cdot \Delta qd_i + rg_i \cdot \Delta qg_i}{2} \cdot \cos\left(\theta_i + \frac{rd_i \cdot \Delta qd_i - rg_i \cdot \Delta qg_i}{2e}\right) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{rd_i \cdot \Delta qd_i + rg_i \cdot \Delta qg_i}{2} \cdot \sin\left(\theta_i + \frac{rd_i \cdot \Delta qd_i - rg_i \cdot \Delta qg_i}{2e}\right) \\ \theta_{i+1} = \theta_i + \frac{rd_i \cdot \Delta qd_i - rg_i \cdot \Delta qg_i}{e} \\ rd_{i+1} = rd_i \\ rg_{i+1} = rg_i \end{cases} \quad (2.76)$$

Cette équation est écrite sous forme simplifiée :

$$\mathbf{X}'_{i+1} = f'(\mathbf{X}'_i, \Delta q_i) \quad (2.77)$$

où « Δq_i » est le vecteur des rotations élémentaires des roues, mesuré grâce aux codeurs.

L'équation de mesure est inchangée :

$$\lambda_j = g^k(\mathbf{X}_j) = g^k(\mathbf{X}'_j) \quad (2.78)$$

La mise sous forme d'état est donc :

$$\begin{cases} \mathbf{X}'_{i+1} = f'(\mathbf{X}'_i, \Delta q_i) + \alpha'_i \\ \Delta q_i = (\Delta q_i)_{réel} + \gamma_i \\ \lambda_j = g^k(\mathbf{X}'_j) + \beta_j \end{cases} \quad (2.79)$$

Le filtrage se fait selon la même méthode que celle exposée dans le paragraphe 2.6.

Soient :

$$\hat{\Delta}_i = \frac{\hat{r}d_i \cdot \Delta qd_i + \hat{r}g_i \cdot \Delta qg_i}{2} \quad \hat{\omega}_i = \frac{\hat{r}d_i \cdot \Delta qd_i - \hat{r}g_i \cdot \Delta qg_i}{e} \quad (2.80)$$

Par abus de notation et afin de simplifier les expressions, on oublie les chapeaux sur « Δ » et « ω » ; ceci fait apparaître les jacobiniennes « A_i , B_i et C_j » du filtre à trois éléments du paragraphe 2.6. Les nouvelles matrices jacobiniennes « A'_i , B'_i et C'_j » sont respectivement de taille 5×5 , 5×2 et 1×5 :

$$A'_i = \begin{bmatrix} & \frac{\Delta qd_i}{2} a(i) & \frac{\Delta qg_i}{2} b(i) \\ & \frac{\Delta qd_i}{2} c(i) & \frac{\Delta qg_i}{2} d(i) \\ & \frac{\Delta qd_i}{e} & -\frac{\Delta qg_i}{e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B'_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C'_j = [C_j \ 0 \ 0] \quad (2.81)$$

Le bruit de modèle est toujours supposé de puissance constante avec une matrice de covariance diagonale. Il est le même pour les rayons droit et gauche :

$$Q'_\alpha = T_e \cdot \begin{bmatrix} Q_x & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & Q_y & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & Q_\theta & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & Q_r & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & Q_r \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Les valeurs initiales des rayons $\hat{r}d_0$ et $\hat{r}g_0$ sont données par exemple par la mesure du diamètre divisée par deux, ou par la mesure de la circonférence divisée par 2π .

Les estimées des rayons ne sont modifiées que lorsqu'une mesure extéroceptive apparaît, puisque le modèle d'évolution des rayons est une constante. Ainsi, l'évolution de ces estimées en fonction du temps est une fonction en escalier.

5.3 Observabilité des rayons

L'étude de l'observabilité du paragraphe 4 a permis de mettre en évidence des situations problématiques pour l'observateur. Qu'en est-il de l'observabilité des rayons ? Notamment, comme les rayons n'apparaissent pas dans l'équation d'observation de SIREM, il n'est pas

³ « Δ et ω » portent ici un chapeau pour montrer qu'ils dépendent des estimées des rayons

⁴ On rappelle que l'indice temporel « i » correspond à la phase de prédiction et l'indice « j » à l'étape de filtrage.

évident *a priori* qu'ils soient observables, puisque ce n'est que grâce aux angles d'azimut que le filtre pourra estimer les rayons.

5.3.1 Mise en équations

Nous nous limitons au cas standard constitué de **trois** balises. Comme nous l'avons fait au paragraphe 4, nous proposons de modéliser sous forme continue le système. Le système d'équation (2.76) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{rd \cdot u_1 + rg \cdot u_2}{2} \cdot \cos(\theta) \\ \dot{y} = \frac{rd \cdot u_1 + rg \cdot u_2}{2} \cdot \sin(\theta) \\ \dot{\theta} = \frac{rd \cdot u_1 - rg \cdot u_2}{e} \\ \dot{rd} = 0 \\ \dot{rg} = 0 \end{cases} \quad (2.83)$$

où $U = [u_1 \ u_2]^t$ représente maintenant les vitesses de rotation des roues droite et gauche. L'équation d'observation est inchangée.

Si on note $X' = [x \ y \ \theta \ rd \ rg]^t$ et que l'on regroupe les trois mesures azimutales en un seul vecteur, alors :

$$\begin{cases} \dot{X}' = f(X', U) & X' \in \mathcal{R}^5 \\ \lambda = g(X') & \lambda \in \mathcal{R}^3 \end{cases} \quad (2.84)$$

On s'intéresse au rang de la matrice d'observation :

$$\mathbf{O}' = [dg^1 \ dL_f g^1 \ \dots \ dL_f^4 g^1 \ \dots \ dg^3 \ \dots \ dL_f^4 g^3] \in \mathbf{M}_{5 \times 15} \quad (2.85)$$

Le vecteur gradient « dh » est de dimension 5.

$$dh = [\partial h / \partial x \ \partial h / \partial y \ \partial h / \partial \theta \ \partial h / \partial rd \ \partial h / \partial rg]^t \quad (2.86)$$

5.3.2 Résolution

Du fait que le vecteur d'observation n'est que de dimension trois, il est clair qu'il faut dériver les sorties au moins une fois pour que la matrice d'observation ait au moins cinq colonnes. Considérons la sous matrice \mathbf{O}'_1 :

$$\mathbf{O}'_1 = [dg^1 \ dL_f g^1 \ dg^2 \ dL_f g^2 \ dg^3 \ dL_f g^3] \in \mathbf{M}_{5 \times 6} \quad (2.87)$$

Par une méthode analogue à celle exposée dans le paragraphe 4.4.3., en considérant les $C_6^5 = 6$ sous matrices carrées de \mathbf{O}'_1 , on obtient que les déterminants sont tous identiquement

nuls si « u_1 » ou « u_2 » sont nuls. Ces trajectoires correspondent au cas où le véhicule est arrêté ou bien tourne autour d'une de ses deux roues.

Ces situations potentiellement problématiques le sont réellement puisque, dans le cas où le robot est à l'arrêt, les estimées des rayons tendent vers zéro⁵. Intuitivement, ce résultat est logique puisqu'à l'arrêt il est impossible de distinguer les comportements de deux roues de rayons différents.

5.3.3 Simulation sur le cercle passant par les trois balises

Dans le cas où le capteur SIREM relève trois balises, l'unique cercle (C) passant par les trois balises a fait l'objet d'une attention particulière. Même si nous avons vérifié que la condition d'observabilité est satisfaite sur (C) (trois déterminants sont non nuls), on propose d'étudier le comportement du filtre à 5 éléments sur cette trajectoire. Dans la simulation ci-dessous (figure 2.21 et figure 2.22), deux filtrages sont mis en œuvre, à vitesse constante. L'un des deux a une erreur de localisation initiale et un rayon droit surestimé de 10% (il n'y a pas d'erreur de voie).

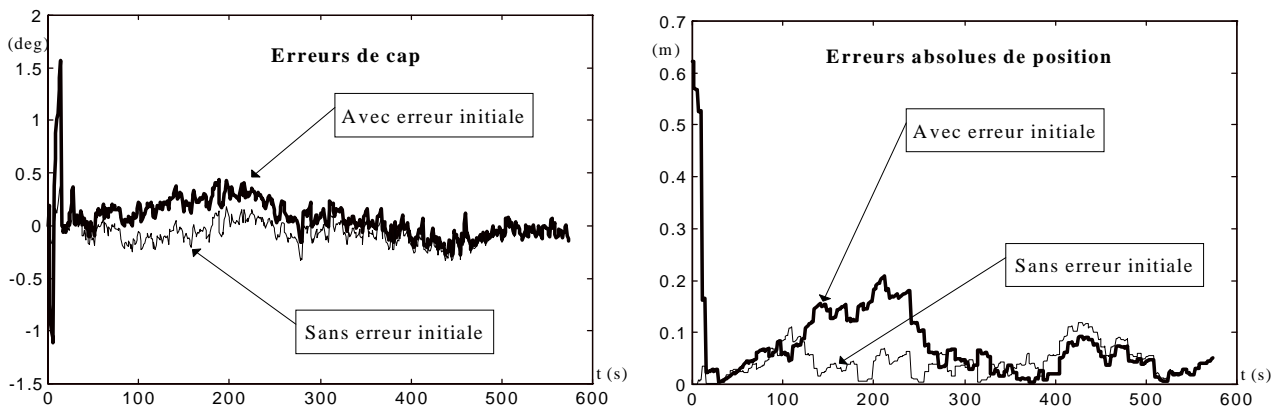


figure 2.21 : erreurs du filtre sur (C)

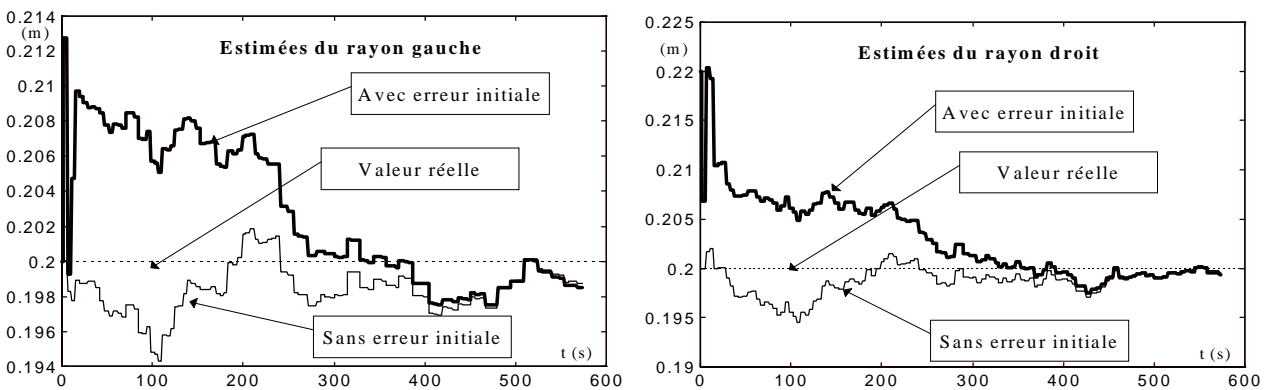


figure 2.22 : estimées et valeurs réelles des rayons

⁵ Dans le cas où le véhicule tourne sur place, c'est en fait un seul rayon qui n'est pas identifiable.

On conclut donc que, même sur un chemin particulièrement problématique, le filtre est aussi bien capable de corriger des erreurs de localisation que des erreurs de rayon.

5.3.4 Conclusion de l'étude d'observabilité

Cette étude a mis en évidence qu'avec trois balises, les seules situations problématiques découvertes à ce jour se réduisent aux cas où la vitesse d'une roue devient nulle. Par conséquent, il nous faut veiller à stopper le processus d'identification des rayons dès que la vitesse d'une des deux roues devient inférieure à un seuil (par exemple 1 cm/s).

Le passage d'un filtre de 5 éléments à un filtre à 3 éléments, ou l'inverse, n'est pas un problème trivial. Nous proposons une solution simple qui consiste à toujours avoir un état de dimension 5 : la non identification des rayons est réalisée en annulant des termes de la jacobienne A'_i et de la matrice de variance-covariance (cf. annexe C).

5.4 Comportement de l'identification des rayons

5.4.1 Effet d'un pneu se dégonflant avec un rayon initialement mal identifié

Dans le test ci-dessous (figure 2.23), comme la roue droite se dégonfle, son rayon réel passe de 0,2 m à 0,18 m. Le rayon gauche reste constant à 0,2 m. On suppose de plus que le rayon du pneu droit a été mal mesuré initialement, alors que le gauche et la voie ont été bien étalonnés : $\hat{r}_{d0} = 0,21$ m et $\hat{r}_{g0} = 0,2$ m.

La trajectoire testée correspond à la ligne droite de la figure 2.23 à vitesse constante.

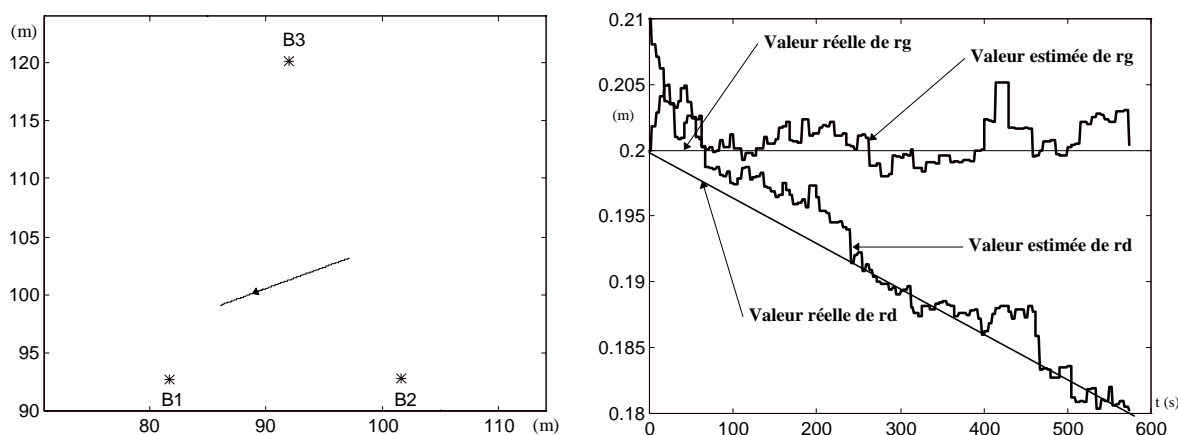


figure 2.23 : chemin testé et identification des rayons

Ces résultats indiquent que le filtre est capable de corriger rapidement une erreur d'étalonnage, et même de suivre des variations lentes de rayon. Les estimées subissent des oscillations de quelques millimètres. Ces oscillations dépendent directement de la variance du bruit de modèle « Q_r ». Plus cette dernière est élevée, plus le filtre sera capable d'estimer rapidement les rayons ; l'inconvénient est alors que les estimées oscillent davantage. Il s'agit donc de trouver un bon compromis par différents essais.

5.4.2 Effet d'une erreur sur la voie

Reconsidérons les expressions des translation et rotation élémentaires du véhicule :

$$\begin{cases} \Delta_i = \frac{rd_i \cdot \Delta qd_i + rg_i \cdot \Delta qg_i}{2} \\ \omega_i = \frac{rd_i \cdot \Delta qd_i - rg_i \cdot \Delta qg_i}{e} \end{cases} \quad (88)$$

La voie n'intervient que dans le calcul de la rotation élémentaire. Ainsi, sur une ligne droite, une erreur de voie n'a théoriquement aucun effet (en fait, à cause du bruit de mesure des rotations élémentaires des roues, elle en a certainement). A l'inverse, plus la courbure est grande et plus la sensibilité à une erreur sur la voie est grande.

L'essai de la figure 2.24 teste la robustesse du filtre à une erreur sur la voie, c'est-à-dire sa réaction à une erreur d'identification d'un paramètre qui ne fait pas partie du vecteur d'état et qui intervient dans le modèle. Le véhicule roule à vitesse constante sur un chemin constitué de deux arcs de cercle de rayons de courbure identiques mais opposés, ce qui engendre une discontinuité de rayon de courbure. Les rayons réels restent constants. Les estimées initiales ont été mesurées sans erreur, tandis que la voie a été surestimée de 25% (cette valeur peut paraître excessive mais elle accentue le phénomène qui nous intéresse).

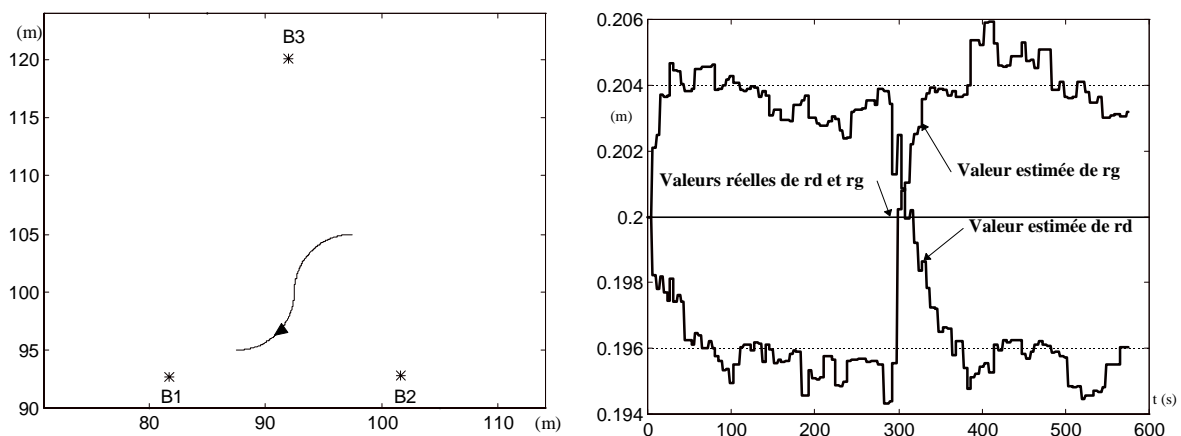


figure 2.24 : chemin testé et identification des rayons

On constate que les paramètres « \hat{r}_d » et « \hat{r}_g » convergent, mais pas vers les valeurs réelles. Ils sont tels qu'ils définissent « un modèle odométrique équivalent » adapté à la courbure de la trajectoire. Lors du changement de signe de la courbure, les estimées des rayons s'inversent rapidement pour s'adapter à la nouvelle courbure. On remarque enfin que les estimées sont symétriques par rapport à la valeur réelle de 0.2 m.

On conclut donc à une bonne robustesse du filtre à une erreur sur la voie ; cette caractéristique du filtre est très intéressante, car dans le cas qui nous intéresse les pneus sont larges : la voie est donc mal connue et peut varier légèrement. Cependant, notre méthode ne peut suivre les variations rapides de voie instantanée dues au déplacement du point de contact sur la largeur du pneu. En effet, les corrections se font à la cadence des mesures extéroceptives.

5.5 Importance de l'identification sur le processus de localisation, en cas d'erreur sur les paramètres géométriques

Le filtrage de Kalman suppose que les différents phénomènes aléatoires sont centrés, c'est-à-dire de moyenne nulle. Quelle est donc la sensibilité de l'algorithme à des erreurs systématiques (biais) sur les paramètres du modèle?

Nous proposons de comparer ici les localisations (x , y et θ) fournies par deux filtres identiques (même variances de bruits, même matrices de covariance initiales, et mêmes paramètres) fonctionnant sur les mêmes mesures bruitées, avec la même initialisation. La différence provient du fait qu'un seul filtre identifie les rayons.

Dans le test ci-dessous (figure 2.25), le rayon droit est surestimé de 5% (valeur tout à fait réaliste), alors que le gauche et la voie sont corrects. La trajectoire se fait à vitesse constante de 0,2 m/s et correspond au chemin de la figure 2.23.

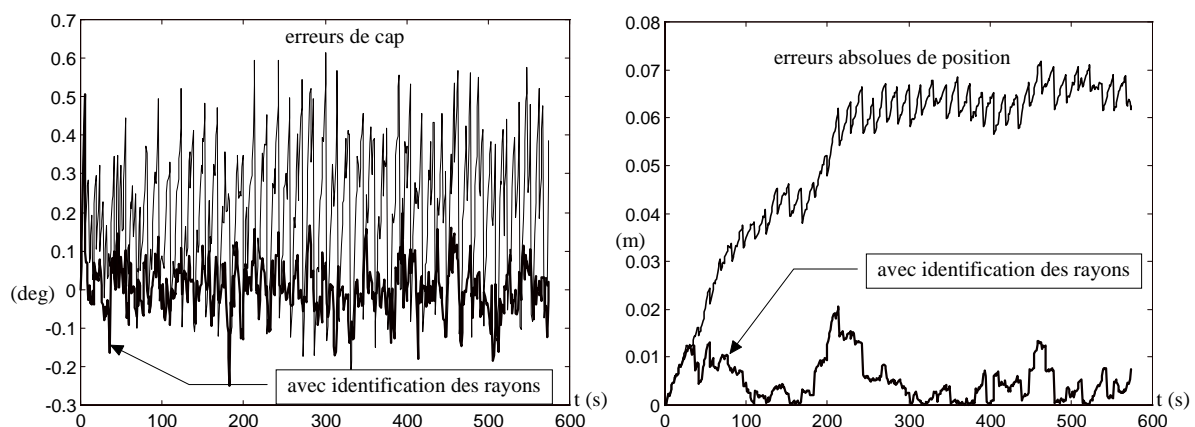


figure 2.25 : erreurs de cap et de position avec et sans identification des rayons

Même s'il ne diverge pas, le filtre sans identification fournit des sorties biaisées. Le cap est estimé avec un biais positif, ce qui est logique car le rayon droit surestimé donne l'illusion d'une rotation de l'engin. L'erreur de position qui en découle est assez significative car elle est de l'ordre de 6 à 7 cm, pour seulement 5% d'erreur sur un rayon. A l'inverse, le filtre avec identification se comporte bien : l'erreur de cap est centrée. Il faut rappeler ici que la précision de cap est particulièrement importante ; premièrement, parce qu'elle est cruciale pour le processus odométrique, mais aussi parce que la mesure azimutale des balises se fait relativement au cap du véhicule.

5.6 Conclusions sur l'identification des rayons

La présente étude a montré que le comportement du filtre est sensible à des erreurs systématiques, notamment sur les paramètres géométriques du modèle d'évolution du robot. Il est donc important de disposer d'un bon étalonnage de ces paramètres.

Pour les engins d'extérieur, si l'odomètre est réalisé à l'aide de codeurs montés sur les roues à pneus, les rayons sont difficiles à identifier, et subissent des évolutions dans le temps. Pour ces raisons, les codeurs ne sont bien souvent utilisés que pour estimer la vitesse du véhicule [Fillatreau, 94].

Compte tenu de ces difficultés, nous avons proposé une méthode d'identification des deux rayons qui peut être réalisée en ligne, c'est-à-dire en même temps que sont calculées les localisations. Pour obtenir un fonctionnement correct, le véhicule doit être en déplacement : le processus d'estimation doit donc être arrêté si la vitesse n'est pas suffisante. En outre, cette méthode est robuste à des erreurs de voie. Dans ce cas, les valeurs estimées des rayons peuvent différer des valeurs réelles, mais le modèle représente alors convenablement l'évolution de l'engin.

Néanmoins, la technique exposée dans ce paragraphe a ses limitations. Les corrections des valeurs des rayons suivent la cadence des mesures extéroceptives ($\approx 0,5$ Hz avec trois balises). Les valeurs des rayons doivent donc être lentement variables et des variations rapides de voie, dues par exemple aux variations des points de contact avec le sol, ne peuvent être compensées. Par ailleurs, la surface de roulement doit être suffisamment plane et les dynamiques de l'engin doivent être relativement faibles pour que les dérapages et glissements soient négligés.

Malgré ces inconvénients, il nous semble néanmoins que, pour notre application, l'identification des rayons peut apporter des améliorations sensibles.

Enfin, il est possible de ne pas identifier en permanence les rayons. On peut peut-être se contenter d'une identification tous les « T » minutes, ou bien à chaque mise en route du logiciel, ou encore, seulement si les conditions sont favorables (sol parfaitement plan par exemple). Au vu des essais réels du chapitre suivant, il semble qu'une identification intermittente soit suffisante.

6 CONCLUSION

Ce chapitre a présenté et analysé un algorithme de localisation dynamique 2D associant un odomètre au capteur SIREM. La complémentarité de ces deux types de capteurs a été mise à profit grâce à un filtre de Kalman étendu dont l'étape de prédiction est itérée entre deux mesures de SIREM. Une qualité intéressante de ce formalisme est de pouvoir considérer les mesures azimutales de SIREM une par une, ce qui permet de recalibrer l'odométrie de façon asynchrone, dès que la mesure extéroceptive est disponible.

Grâce au calcul de la distance de Mahalanobis, une stratégie de gestion des incohérences a été proposée. Elle permet de rejeter des mesures aberrantes de SIREM et de détecter une divergence du filtre.

L'étude de l'observabilité du système non linéaire a mis en évidence des trajectoires problématiques, mais a permis de valider le bon fonctionnement du filtre sur un grand nombre de trajectoires avec deux balises. La robustesse du filtre à des pertes momentanées de balises a donc pu être mise en évidence.

Enfin, afin d'améliorer la prédiction odométrique et, par voie de conséquence, l'ensemble du processus de localisation, l'identification en ligne des rayons des roues a été présentée. Grâce à ce formalisme, des erreurs systématiques peuvent être compensées et ainsi, les performances et la robustesse du filtre sont sensiblement améliorées.

CHAPITRE 3

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX 2D

Résumé du chapitre 3

L'implantation de l'algorithme 2D sur le robot MELODY est décrite dans ce chapitre. Le programme de localisation s'exécute dans un environnement « temps réel ».

La prise en compte du décalage de SIREM par rapport à l'essieu des roues conduit à de nouvelles équations odométriques. Le problème de l'initialisation du filtre est ensuite considéré. Nous proposons d'utiliser une méthode déterministe numérique qui nécessite que l'engin soit immobile.

On présente ensuite la méthodologie des essais réels pour lesquels, grâce à un dispositif de suivi de ligne blanche, il est possible de calculer un écart latéral de la position estimée, lorsque le mobile est en déplacement.

Après que les erreurs de la mesure azimutale de SIREM aient été estimées, le réglage des paramètres du filtre de Kalman est ramené à l'optimisation d'un paramètre scalaire. Lorsque la ligne blanche est parallèle à un des axes du repère, l'étude de l'écart latéral permet de régler, de façon simple, ce paramètre avec une méthode de type « essai-erreur ».

Enfin, des essais réels permettent de valider le bon fonctionnement de l'algorithme sur plusieurs droites et sur un cercle, à une vitesse de 7 cm/s. La répétabilité de l'erreur latérale est de l'ordre du centimètre. Même si la précision est difficile à estimer avec notre système expérimental, nous donnons des éléments qui permettent de penser qu'elle est de l'ordre de quelques centimètres en position et meilleure que 0,5 degré en cap.

Résultats expérimentaux 2D

1 INTRODUCTION

L'algorithme de localisation dynamique 2D étudié au chapitre 2, est implanté sur un système informatique de type P.C. industriel, dans un environnement temps réel. Le robot MELODY (Mobile d'Extérieur à Localisation Dynamique) de l'IRCyN constitue la plateforme d'essai.

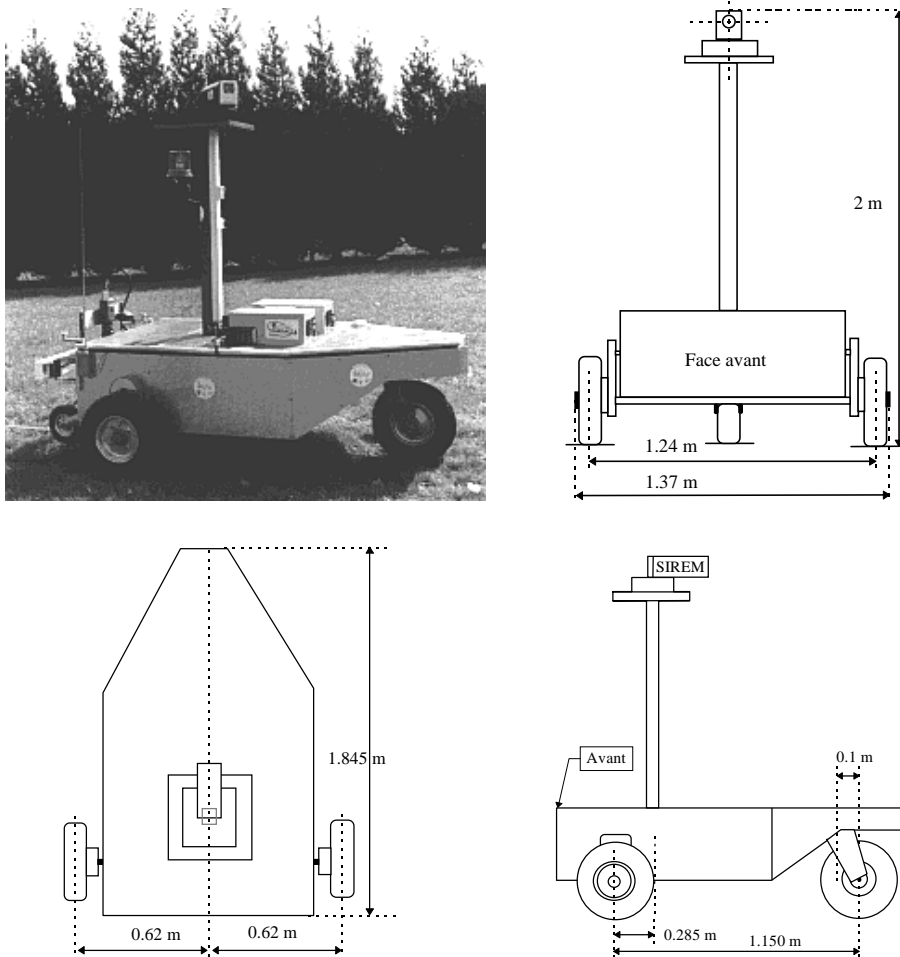


figure 3.1 : le robot MELODY

MELODY est un véhicule expérimental de grand gabarit (cf. figure 3.1) conçu pour évoluer en milieu extérieur. Il est dimensionné pour monter des pentes dont l'inclinaison peut

atteindre dix degrés. Il dispose de deux roues motrices, à l'avant, et d'une roue folle, à l'arrière. Sa commande se fait par différentiel de vitesse des roues motrices et sa vitesse maximum est de 1m/s.

Le capteur SIREM est monté sur un mât, supposé parfaitement rigide, à une hauteur approximative de 2 m. A cause de l'encombrement des moteurs électriques, le mât est en retrait de 28 cm de l'essieu des roues. Cette contrainte met en défaut une hypothèse émise dans le chapitre 2 : SIREM n'est pas à la verticale du milieu de l'essieu des roues. La première partie de ce chapitre est donc consacrée à l'adaptation de l'algorithme 2D au cas où il existe des décalages entre les repères odométrique et extéroceptif.

Ensuite, après avoir donné quelques éléments sur l'implantation en temps réel de l'algorithme, une méthodologie de réglage des paramètres du filtre sera proposée ; elle est réalisée par traitement différé de données réelles. Enfin, la dernière partie est dédiée à l'étude d'essais réels réalisés en extérieur, sur un terrain balisé de l'Ecole Centrale de Nantes.

2 IMPLANTATION DE L'ALGORITHME 2D SUR LE ROBOT MELODY

2.1 Prise en compte du décalage de SIREM par rapport au milieu de l'essieu des roues

2.1.1 Problématique

Le chapitre 2 a été dédié à l'étude d'un système simplifié pour lequel on supposait que le repère des mesures azimutales (noté R_S) et le repère odométrique (R_M) étaient confondus. Cette condition impose un montage mécanique précis qui, s'il est vérifié, simplifie les équations du filtre. Pour de nombreux robots mobiles, cette condition est satisfaite [Hashimoto et al., 92, Opderbecke, 94, Kim, Cho, 94, Beom, Cho, 95, Nishizawa, Ohya, Yuta, 95].

Sur le robot mobile MELODY, SIREM est décalé d'une trentaine de centimètres en arrière, et il n'est pas possible de supprimer ce décalage (cf. figure 3.1).

Considérons le cas général 2D, où il existe une translation (t_x, t_y) et une rotation (r_θ) entre R_M et R_S , comme indiqué sur la figure 3.2.

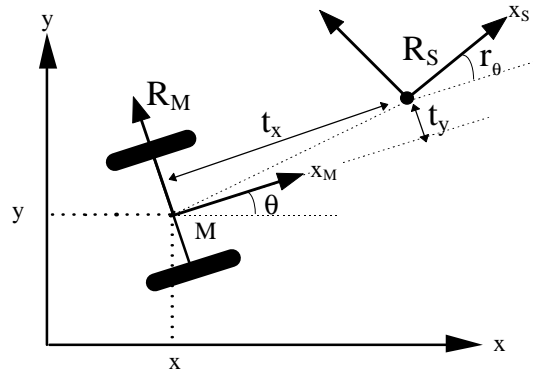


figure 3.2 : décalage entre le capteur extéroceptif et le milieu de l'essieu des roues

Nous choisissons de localiser le repère R_S plutôt que R_M , car SIREM est la base du système de localisation. Par ailleurs, l'odométrie telle qu'elle est réalisée sur MELODY n'est pas forcément envisageable sur un engin de chantier. On peut, dans certains cas, utiliser à la place un odomètre tiré ou bien un radar à effet Doppler associé à un gyromètre, par exemple. Ainsi, la référence au milieu de l'essieu des roues motrices n'a pas forcément de raison d'être. Ce choix effectué, la posture $X_S = [x_S, y_S, \theta_S]^t$ définit le repère R_S dans R_0 .

L'équation d'observation (2.15) reliant l'azimut de SIREM à l'état ne change pas. Il est par contre maintenant nécessaire de connaître l'évolution de « X_S », entre deux instants d'échantillonnage, en fonction des mesures odométriques. En outre, le formalisme que nous utilisons implique d'associer une variance à l'erreur commise pendant l'étape de prédiction.

Une première solution, dite générale, consiste à exprimer la matrice de covariance de X_S en fonction de celle de X_M . Soient « $(X_M)_i$ » la position et le cap de R_M à l'instant « i » et « $(P_M)_i$ » la variance de l'erreur d'estimation au même instant. D'après l'équation (2.28), lors de l'étape de prédiction, l'évolution de la variance de X_M obéit à une relation matricielle que l'on peut mettre sous la forme :

$$(P_M)_{i+1} = F_1((P_M)_i, (X_M)_i) \quad (3.1)$$

Par ailleurs, la relation géométrique déterministe (non linéaire à cause de θ) reliant $(X_M)_i$ et $(X_S)_i$ s'écrit :

$$(X_S)_i = F_2((X_M)_i) \quad (3.2)$$

En supposant que les bruits sont faibles, on effectue une approximation linéaire au premier ordre (valable pour des erreurs petites), comme fait dans [Smith, Self, Cheeseman, 88] :

$$(P_S)_{i+1} = \left(\frac{\partial F_2((X_M)_i)}{\partial X_M} \right) (P_M)_{i+1} \left(\frac{\partial F_2((X_M)_i)}{\partial X_M} \right)^t \quad (3.3)$$

Ainsi, connaissant X_M et sa variance à l'instant « i », on applique les relations odométriques standard et on calcule la variance à l'instant « i+1 ». On en déduit ensuite X_S et sa variance grâce à (3.2) et (3.3).

Nous préférons une autre approche qui consiste à calculer l'évolution de R_S directement à partir des rotations des roues mesurées entre deux instants d'échantillonnage [Bonnifait, Garcia, 96 a]. Il est ensuite possible, comme dans le cas où R_M et R_S sont confondus, de calculer la matrice de covariance de l'erreur de prédiction. Dans le cas qui nous intéresse, cette solution conduit à un formalisme simple.

2.1.2 Equations odométriques d'un repère translaté

On peut simplifier le problème en supposant que la transformation géométrique entre les repères R_M et R_S se réduit à une translation de composantes (t_x, t_y) . Ceci est réalisable en pratique en étalonnant l'axe de référence de SIREM¹ de telle sorte qu'il coïncide avec l'axe d'avance du robot, soit $\bar{x}_M = \bar{x}_S$ comme sur la figure 3.3.

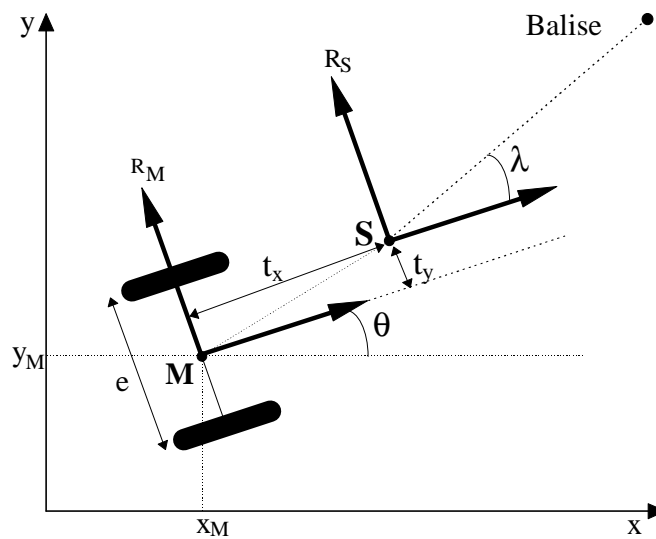


figure 3.3 : translation entre les repères R_M et R_S

Exprimons la posture de R_S à l'instant « i+1 », notée « X_{S+1} », en fonction de celle à l'instant « i » et des mesures « Δ_i » et « ω_i » de l'odomètre. On note respectivement « X_M » et « X_{M+1} » les postures de R_M aux instants « i » et « i+1 ».

Comme il n'y a pas de rotation entre R_M et R_S , on a :

$$\theta_S = \theta_M = \theta_i \quad (3.4)$$

¹ Dans le cas de SIREM, cela revient à définir pour quelle valeur du codeur incrémental l'angle d'azimut est nul.

Avec les notations courantes, le système (2.12) se réécrit :

$$\begin{cases} x_{M+1} \approx x_M + \Delta_i \cos(\theta_i + \omega_i / 2) \\ y_{M+1} \approx y_M + \Delta_i \sin(\theta_i + \omega_i / 2) \\ \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \end{cases} \quad (3.5)$$

En considérant la figure 3.3, nous avons :

$$\begin{cases} x_S = x_M + t_x \cos \theta_i - t_y \sin \theta_i \\ y_S = y_M + t_x \sin \theta_i + t_y \cos \theta_i \end{cases} \quad (3.6)$$

Intéressons-nous en premier lieu à « x_S ». En utilisant (3.5) dans (3.6), on obtient :

$$\begin{aligned} x_{S+1} &= x_{M+1} + t_x \cos \theta_{i+1} - t_y \sin \theta_{i+1} \\ &\approx x_M + \Delta_i \cos(\theta_i + \omega_i / 2) + t_x \cos(\theta_i + \omega_i) - t_y \sin(\theta_i + \omega_i) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nous voulons exprimer « x_{S+1} » en fonction de « x_S ». Ceci est possible en effectuant un développement limité au premier ordre de $\cos(\theta_i + \omega_i)$ et $\sin(\theta_i + \omega_i)$, en supposant que ω_i est petit. Ceci fait apparaître « x_S » dans le membre de droite :

$$x_{S+1} \approx x_S + \Delta_i \cos(\theta_i + \omega_i / 2) - \omega_i (t_x \sin \theta_i + t_y \cos \theta_i) \quad (3.8)$$

En répétant la même opération avec « y_S », on obtient les équations odométriques du repère R_S décalé de (t_x, t_y) par rapport à R_M :

$$\begin{cases} x_{S+1} \approx x_S + \Delta_i \cos(\theta_i + \omega_i / 2) - \omega_i (t_x \sin \theta_i + t_y \cos \theta_i) \\ y_{S+1} \approx y_S + \Delta_i \sin(\theta_i + \omega_i / 2) + \omega_i (t_x \cos \theta_i - t_y \sin \theta_i) \\ \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \end{cases} \quad (3.9)$$

Si l'on remplace Δ_i et ω_i par leurs expressions en fonction de Δq_i (équation (2.2)), on obtient une équation analogue à l'équation (2.14) :

$$X_{S+1} = F(X_S, \Delta q_i) \quad (3.10)$$

2.2 Nouveau filtre de Kalman étendu

L'algorithme de localisation 2D suit la même formulation qu'au paragraphe 2.6 du chapitre 2. Le nouveau modèle d'état est équivalent à celui de l'équation (2.18), mais avec une équation d'évolution différente [Bonnifait, Garcia, 96 a] :

$$\begin{cases} X_{S+1} = F(X_S, \Delta q_i) + \alpha_i \\ \Delta q_i = (\Delta q_i)_{\text{réel}} + \gamma_i \\ \lambda_j = g^k(X_j) + \beta_j \end{cases} \quad (3.11)$$

Ainsi, par rapport au filtre de Kalman étendu du paragraphe 2.6 du chapitre 2, seule l'étape de prédiction est modifiée, en considérant les nouvelles expressions suivantes :

$$\hat{X}_{i+1/i} = F(\hat{X}_{i/i}, \Delta q_i) \quad (3.12)$$

$$A_i = \left[\frac{\partial F}{\partial X}(\hat{X}_{i/i}, \Delta q_i) \right] \quad B_i = \left[\frac{\partial F}{\partial \Delta q}(\hat{X}_{i/i}, \Delta q_i) \right] \quad (3.13)$$

L'identification des rayons en ligne est ici aussi possible en incorporant les rayons dans le vecteur d'état, comme dans le paragraphe 5 du chapitre 2. Le nouveau vecteur d'état est alors de dimension cinq :

$$X_S = [x_S \ y_S \ \theta_i \ rd_i \ rg_i]^t \quad (3.14)$$

2.3 Initialisation du filtre

L'initialisation d'un filtre de Kalman étendu est un problème sensible. En effet, si l'estimée initiale « X_0 », fournie en entrée au filtre, est trop éloignée de la solution, ce dernier risque d'atteindre un mauvais point de fonctionnement. Il existe de nombreuses applications pour lesquelles X_0 peut être connu *a priori* de façon grossière, mais dans le cas de la localisation des robots mobiles, il n'est, en général, pas possible de connaître *a priori* X_0 : il faut donc faire appel à une technique d'initialisation.

La qualité première de cette méthode d'initialisation doit être une convergence garantie vers la solution et ce, en présence de bruits sur les mesures. Dans le cas de mesure angulaires, des méthodes de triangulation, utilisant des intersections de cercles, permettent de déterminer X_0 , sauf dans des situations dégénérées. Elles sont sensibles aux bruits des mesures. Dans [Lévêque et al., 97], une méthode utilisant l'inversion ensembliste et l'analyse par intervalles permet de prendre en compte les erreurs des capteurs. L'algorithme proposé est fini et globalement convergent. Il permet de définir une ou plusieurs zones où est incluse la solution. Cette technique a été validée pour des mesures télémétriques.

Dans le cas de SIREM, afin de garantir au maximum une bonne initialisation de l'EKF, nous retenons la méthode de localisation statique déterministe de J.F. Le Corre [Le Corre, 93] présentée au chapitre 1. Cette méthode a prouvé, grâce à de nombreux essais réels, sa très

bonne convergence, même s'il est vrai que sa précision est très sensible aux bruits de mesure. En outre, elle est très rapide et peut être utilisée en temps réel. Le résultat de ce calcul sert ensuite d'estimée initiale au filtre de Kalman. Il a été constaté que de réinjecter les 3 mesures qui ont servi à la méthode déterministe dans le filtre de Kalman améliore la qualité de l'estimée.

L'inconvénient principal de cette solution est que le véhicule doit être immobilisé pendant, au minimum, un tour de caméra (6 secondes). Ceci est contraignant en cas de réinitialisation du filtre, suite à un mauvais fonctionnement. Pour pallier cet inconvénient, il serait souhaitable de disposer d'une possibilité d'initialisation « en vol ». La méthode présentée dans [Boley, Sutherland, 96] permet d'arriver à ce résultat, si le déplacement du robot, pendant la phase d'initialisation, est une droite. L'algorithme utilise un formalisme récurrent de moindres carrés totaux, qui est sensible à des situations dégénérées. D'après les auteurs, une fois la solution trouvée, il vaut mieux ensuite utiliser un EKF, car ses performances en régime permanent sont meilleures.

2.4 Trajectoires problématiques pour le système réel

L'étude de l'observabilité du paragraphe 4 du chapitre 2 a permis de relever un certain nombre de trajectoires problématiques pour le système simplifié où $R_S = R_M$. La modification introduite par le décalage de SIREM modifie-t-elle ces trajectoires ?

Réaliser à nouveau l'étude de l'observabilité du système réel est compliqué ; nous préférons apporter quelques considérations physiques.

Dans tous les cas où l'observabilité ou la non observabilité ne dépendent pas de la commande, le système simplifié et le système réel sont identiques. Ainsi, avec trois balises, quand SIREM est en dehors du cercle qui passe par les trois balises, le système réel est observable. De plus, quand SIREM est à l'arrêt sur ce cercle, la situation est problématique pour le système réel. Enfin, pour des balises suffisamment éloignées, ce cercle a un rayon grand devant (t_x, t_y) et, en gros, le point S suit le même cercle que M : dans ce cas, le filtre pour le système réel fonctionne donc correctement, comme le filtre du système simplifié.

Avec deux balises, si le robot est arrêté la situation est problématique, comme pour le système simplifié. Le problème de la droite passant par une balise et orthogonale aux deux balises existera dès que $t_y = 0$ ² ; SIREM se dirige vers la balise et mesure toujours un angle

² C'est le cas sur le robot MELODY.

nul à π près. Par contre, pour un mouvement quelconque avec deux balises, on ne peut rien affirmer. Dans ce cas, les résultats de l'étude du système simplifié seront d'autant mieux vérifiés sur le système réel que les paramètres (t_x, t_y) seront petits.

Concernant l'observabilité des rayons, le problème est analogue. Ainsi, le processus d'identification en ligne ne fonctionne correctement que si le véhicule est en déplacement, comme pour le système simplifié. Ce comportement a été vérifié sur des données réelles : comme en simulation, on a pu constater que, si le véhicule est arrêté, les estimations des valeurs des rayons tendent, de façon erronée, vers zéro.

2.5 Identification de la translation entre S et M

Plusieurs manipulations ont été nécessaires pour, premièrement, supprimer le décalage angulaire entre les axes \vec{x}_M et \vec{x}_S , et, ensuite, identifier les paramètres géométriques de la translation.

Le problème de l'étalonnage de la liaison rigide entre un système extéroceptif et un repère odométrique peut être abordé sous deux angles différents :

- utiliser un système de mesure externe et n'utiliser ni les mesures odométriques, ni les mesures extéroceptives.
- ne pas utiliser de système de mesure externe et faire effectuer des déplacements élémentaires au robot. La méthode consiste à établir une relation mathématique où apparaissent de petits déplacements, convenablement mesurés à l'odométrie, et les positions de départ et d'arrivée, mesurés avec le système extéroceptif. En répétant ce processus, on obtient un système surdéterminé qui peut être résolu par moindres carrés par exemple. C'est la méthode utilisée dans [Grandjean et al., 88] pour étalonner un robot Hilare du LAAS.

La méthode utilisée en 2D se situe à mi-chemin. En effet, à l'aide d'un télémètre laser et grâce à des déplacements spécifiques (droite passant par une balise et rotations sur place), la mesure odométrique n'est pas utilisée. Ces manipulations sont décrites dans [Morel, 95].

Cette méthode d'étalonnage présente l'avantage de n'utiliser qu'un télémètre laser bon marché. Elle est, par contre, lourde à mettre en œuvre. Pour l'étalonnage 3D, on fera appel à une station de mesure très précise : dans ce cas, la manipulation est plus précise et très simplifiée puisqu'elle se réalise robot arrêté. Cependant, elle implique alors un matériel coûteux et un personnel expérimenté.

2.6 Aspects temps réel

L'algorithme de localisation dynamique 2D a été implanté sur un ordinateur monoprocesseur (de type Intel 486 DX 33). Comme le processeur doit exécuter « en parallèle » plusieurs tâches avec des contraintes de temps strictes (allumage et extinction des balises, scrutation de la caméra de SIREM, lecture des codeurs, calcul de l'algorithme, envoi des localisations sur la liaison série, etc.), l'utilisation d'un exécutif « temps réel » est justifiée. La gestion et la synchronisation des différentes tâches est réalisée de façon événementielle, avec une priorité d'exécution pour chacune des tâches. Ainsi, l'exécutif temps réel donne l'illusion que ces dernières se déroulent en parallèle.

Le logiciel, écrit en langage « C », utilise des primitives de l'exécutif temps réel « R.T.C. ». Les tâches qui interviennent dans le calcul des localisations agissent en exclusion mutuelle sur l'estimée de l'état « \hat{X} » et sur la matrice de covariance associée « P ». Seules les tâches à contraintes de temps strictes peuvent interrompre leur exécution.

Le bon fonctionnement du processus temps réel global a été validé [Morel, 95]. En effet, il a été vérifié que la période de 50 ms est suffisante pour que le processeur ait le temps de réaliser toutes ses tâches en une période et ce, dans le cas le plus défavorable.

3 METHODOLOGIE DES ESSAIS REELS

Le mode opératoire des essais réels a été défini de telle sorte que les problèmes liés à la localisation et à la commande de l'engin soient complètement découplés. Ainsi, grâce à un système de guidage externe, MELODY suit des trajectoires d'équations connues. Les localisations estimées par le filtre 2D sont ensuite comparées à ces trajectoires.

3.1 Le terrain d'essais

Afin de réaliser des essais en extérieur, avec des conditions proches de celles d'un chantier routier (distances entre les balises importantes, ensoleillement, etc.), un terrain d'essais a été aménagé sur une pelouse de l'Ecole Centrale de Nantes. Ses dimensions sont de 30 m x 40 m. Il est à noter que ce terrain n'est pas exactement plan, et ce à des fins de localisation 3D (cf. chapitres 4 à 6). Un relevé précis du site a été effectué par des géomètres. Dans un repère local arbitrairement choisi, les positions des balises ont été mesurées de façon précise ; la précision est centimétrique en « x et y », et millimétrique en « z ». Par ailleurs, les positions de quinze bornes (clous de géomètres) ont aussi été relevées. Ces bornes servent à définir les trajectoires que suivra MELODY.

3.2 Le guidage de MELODY

Entre deux bornes du terrain d'essais, une corde blanche peut être tendue. Elle définit alors une droite d'équation connue.

A l'avant de MELODY, une caméra linéaire CCD a été disposée de façon à regarder le sol (cf. photo de la figure 3.4).

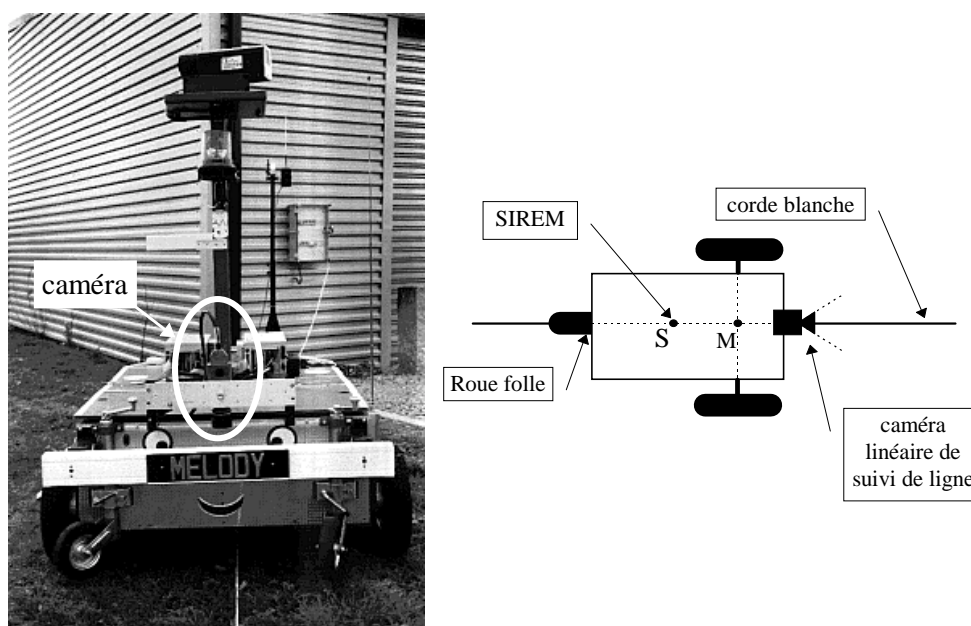


figure 3.4 : MELODY suivant la corde blanche dans l'herbe

Cette caméra permet de mesurer l'écart latéral de son axe optique par rapport à la corde blanche. Cet écart intervient ensuite dans une loi de commande en vitesse de MELODY [Morel, 95]. Le suivi de ligne ainsi obtenu a une précision meilleure que le centimètre, pour une vitesse linéaire inférieure à 20 cm/s et une trajectoire « assez rectiligne ».

3.3 Principe des manipulations

Plutôt que de faire calculer à l'ordinateur embarqué des localisations en temps réel et d'étudier *a posteriori* le comportement du filtre, il est beaucoup simple, pour régler l'algorithme, de mémoriser les mesures des capteurs. Les données sont ensuite utilisées en traitement différé. Une fois l'algorithme mis au point, les calculs de localisation peuvent être faits en temps réel.

Une manipulation typique se déroule de la manière suivante :

- On tend, dans l'herbe, la corde blanche matérialisant la trajectoire déterminée par les bornes de départ et de fin.

- On fait suivre à MELODY cette ligne sur plusieurs mètres afin que le capteur SIREM se trouve sur la ligne et que le cap soit tangent à la corde.
- Véhicule à l'arrêt, SIREM calcule une localisation statique déterministe qui est mémorisée dans un fichier texte, pour l'initialisation du filtre de post-traitement.
- Le véhicule démarre ensuite et accélère jusqu'à atteindre une vitesse maximale initialement programmée. Pendant le suivi de ligne et jusqu'à la fin de la trajectoire, le système mémorise les données des capteurs.

4 REGLAGE DES PARAMETRES DU FILTRE

Comme on l'a vu au paragraphe 2.6.2 du chapitre 2, les paramètres du filtre sont entièrement déterminés dès que l'on a spécifié les scalaires « $Q_{\Delta q}$ » (bruit d'entrée), « Q_{β} » (bruit d'observation), « Q_x », « Q_y », et « Q_{θ} » (bruits de modèle indépendants de la période d'échantillonnage T_e). Pour l'identification des rayons, il faut ajouter la variance du bruit d'évolution des rayons « Q_r ». Avec l'hypothèse que $Q_x = Q_y$, il y a alors **CINQ** paramètres à déterminer. En outre, il faut définir le seuil de la distance de Mahalanobis et le seuil de vitesse d'identification des rayons.

La méthodologie que nous proposons de suivre est la suivante : on suppose que la variance du bruit de mesure de SIREM est constante. Sa valeur est estimée à l'aide de différentes considérations physiques. Ceci est une approximation car l'erreur de mesure dépend de la distance caméra-balise ; en effet, lorsque cette distance est faible (quelques mètres), l'ampoule n'est plus ponctuelle et la caméra la détecte sur plusieurs images successives.

Le réglage de la puissance des autres bruits se fait ensuite, par traitements différés de données réelles, selon une technique « d'essai-erreur ».

4.1 Modélisation du bruit d'observation

Dans les équations de l'étape de recalage du paragraphe 2.6 du chapitre 2, le bruit d'observation est supposé blanc, indépendant (de l'état et des autres bruits) et de variance constante (hypothèse de stationnarité). Comme nous allons le voir ci-après, cette dernière condition n'est pas rigoureusement satisfaite, mais les résultats pratiques que nous obtiendrons permettent de justifier ce choix simple.

Une étude statistique de l'erreur de mesure de l'azimut de SIREM pourrait être effectuée, véhicule à l'arrêt, pour différentes distances capteur-balise. Cette approche ne permet pas, cependant, de considérer les phénomènes dus au retard de prise en compte de la mesure dans le filtre. Ainsi, la variance du bruit d'observation ne dépend pas que du bruit de mesure de SIREM. Par conséquent, nous préférons considérer individuellement les différentes sources d'erreur, afin de déterminer une variance réaliste pour le bruit d'observation.

4.1.1 Erreurs de SIREM

En utilisant la modélisation de SIREM présentée dans le chapitre 1³ et en supposant que ce dernier est **parfaitement étalonné**, voici les différentes sources d'erreur de la mesure azimutale de SIREM :

Erreur de lecture du codeur

C'est la source d'erreur qui vient en premier lieu à l'esprit. La résolution actuelle du codeur est de 20 000 impulsions par tour. L'erreur maximum commise est donc d'une impulsion, soit $0,314 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 18 \cdot 10^{-3} \text{ deg}$.

Pouvoir séparateur électronique

C'est l'erreur due à la période à laquelle est lue la caméra.

La caméra tourne à une vitesse (approximative) de 1 rad/s. L'acquisition des images de la barrette CCD se fait toutes les 1,2 ms. Entre deux instants d'échantillonnage, la caméra a donc parcouru $1,26 \cdot 10^{-3} \text{ rad} (\approx 72 \cdot 10^{-3} \text{ deg})$, si on néglige la rotation de l'engin sur lui-même. Cette incertitude angulaire est 4 fois plus importante que la précédente.

Pouvoir séparateur optique

Le pouvoir séparateur optique est défini comme le secteur angulaire vu par un pixel [Lormeau, 90] (cf. figure 3.5).

La largeur d'un pixel étant de 1 μm et la focale de 50 mm, le pouvoir séparateur optique est de $20 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \approx 1 \cdot 10^{-3} \text{ deg}$. Cette erreur est donc négligeable.

³ Modélisation de SIREM : modèle « trou d'épingle » pour la caméra, axe optique perpendiculaire à l'axe de rotation, axe de rotation et axe optique concourants au centre optique, barrette CCD parallèle à l'axe de rotation.

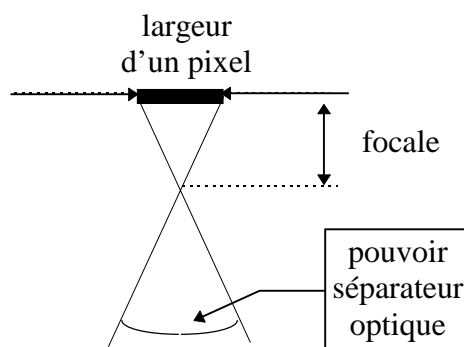


figure 3.5 : vue de dessus de la barrette CCD

Erreur due à une balise trop proche

Lorsqu'une balise est proche de la caméra, le système la détecte sur plusieurs périodes d'échantillonnage de la caméra. Dans ce cas, l'angle d'azimut retenu est la valeur moyenne : la variance de la mesure angulaire doit donc être augmentée. Néanmoins, comme ce phénomène n'apparaît que pour des distances capteur-balise inférieures à quatre mètres, nous ne le prenons pas en compte ; dans l'immense majorité des cas, les balises sont à une distance supérieure.

En conclusion, l'erreur azimutale maximum commise par SIREM est de $1,6 \cdot 10^{-3}$ rad $\approx 92 \cdot 10^{-3}$ deg ($\approx 5,5$ minutes d'arc).

4.1.2 Erreur due au déplacement de l'engin et au temps de prise en compte par le logiciel

Entre l'instant où est effectuée la mesure et l'instant où celle-ci est prise en compte par le logiciel, l'engin s'est déplacé. Les vitesses linéaire et angulaire, la distance capteur-balise, le déplacement par rapport à la balise et le temps de prise en compte du logiciel sont les facteurs qui affectent la qualité de la mesure azimutale.

Le temps de prise en compte est au pire égal à une période odométrique (cf. paragraphe 2.6), soit 50 ms. Les distances capteur-balise interviennent dans le sens où, plus elles sont faibles, plus un retard de prise en compte et une vitesse importants auront de l'influence. En effet, le fait de passer à proximité d'une balise provoque des variations angulaires bien plus rapides qu'un passage éloigné. Un déplacement vers la balise fait que le retard de prise en compte n'a plus d'effet, car alors la mesure de SIREM est toujours nulle (à π près). Il est évident que c'est un déplacement « orthogonal à la balise » (déplacement pour lequel SIREM mesure un azimut de $\pi/2$) qui est le plus défavorable.

Afin d'apprécier l'erreur maximum, plaçons nous dans le cadre du cas réaliste le plus défavorable. Supposons que la distance capteur-balise soit de 10 m (faible) et que la balise se situe à $\pi/2$. La vitesse de l'engin est élevée et de 0,2 m/s (pas de vitesse angulaire). La mesure azimutale est prise en compte avec le retard maximum (50 ms). Dans ce cas, lorsque la mesure est utilisée, l'engin s'est déplacé de 0,01 m (cf. figure 3.5). L'erreur angulaire est donc 10^{-3} rad $\approx 57 \cdot 10^{-3}$ deg.

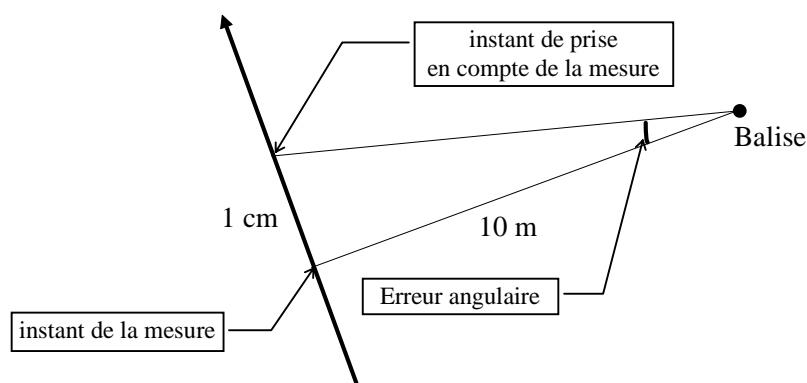


figure 3.6 : erreur due au temps de prise en compte et au déplacement du véhicule

En conclusion, même si elle est grossièrement deux fois moindre, l'erreur que peut entraîner un retard de prise en compte est du même ordre de grandeur que celle effectuée par le capteur SIREM. Il est à noter aussi son caractère systématique.

4.1.3 Erreurs dues à des hypothèses mal vérifiées

La résolution du problème de localisation 2D suppose que :

- le sol est parfaitement plan et horizontal
- SIREM est parfaitement étalonné (pas d'offset sur sa mesure d'azimut)
- les positions des balises sont connues sans erreur.

Dans des conditions réelles de fonctionnement, ces hypothèses peuvent être plus ou moins bien vérifiées. Dans le cas où elles ne le sont pas, des erreurs s'ajoutent, via le capteur SIREM.

Une erreur introduite par du dévers, par exemple, n'est pas évidente à imaginer : le plan image, dans lequel SIREM recherche une balise, se trouve incliné. Dans ce cas, on constate que, grossièrement, plus la distance capteur-balise et plus l'angle de hauteur sont grands, plus l'erreur est importante.

Un mauvais étalonnage de l'axe de référence de SIREM crée un offset d'azimut. Vu les précisions concernées, la manipulation d'étalonnage n'est pas évidente : il peut donc apparaître une erreur systématique.

Les erreurs systématiques, dues à des offsets de position de balise, ont été appréhendées dans le paragraphe 2.5 du chapitre 2 : elles sont du même ordre de grandeur que l'erreur due à un retard de prise en compte.

Il existe donc des erreurs dues à des hypothèses mal vérifiées. Même si ces erreurs sont difficiles à quantifier, leurs ordres de grandeurs ne sont pas négligeables.

4.1.4 Variance du bruit d'observation

Cette étude met en évidence que l'erreur de mesure introduite par le temps de prise en compte du logiciel peut être, dans certains cas, du même ordre de grandeur que celles commises par le capteur SIREM. En outre, compte tenu du domaine de précision, des erreurs dues à des hypothèses mal vérifiées peuvent ne pas être négligeables. Le bruit d'observation « β » n'est donc pas stationnaire et a pour origine de nombreux phénomènes qui ne sont pas tous centrés : le problème est complexe.

Afin d'appliquer le formalisme de Kalman déjà exposé, nous supposons malgré tout que la variance Q_β est constante. Cette modélisation très rudimentaire du bruit de SIREM risque d'être, parfois, peu en adéquation avec la réalité. Nous ne pouvons justifier notre approche qu'*a posteriori*, c'est-à-dire par les résultats satisfaisants obtenus sur des données réelles.

Il s'agit donc de trouver une variance qui prenne en compte tous les phénomènes aléatoires qui perturbent l'équation d'observation. En considérant le cas le plus défavorable, où les erreurs s'ajoutent (erreur de SIREM ($1,6 \cdot 10^{-3}$) + erreur de retard (10^{-3}) + erreur de position de balise (10^{-3})), l'erreur commise est de $3,6 \cdot 10^{-3}$ rad. Après avoir arrondi, on obtient la variance du bruit d'observation :

$$Q_\beta \approx 10^{-6} \text{ rad}^2 \quad (3.15)$$

4.2 Modélisation des erreurs de l'odométrie

Les erreurs de l'odométrie proviennent de l'imprécision de mesure de l'entrée et des mauvaises modélisations : sol non plan, glissements, erreurs sur les paramètres du modèle (cf. paragraphe 5 du chapitre 2), etc. Dans le filtre de Kalman, nous avons pris en compte ces deux phénomènes en les modélisant par des bruits centrés indépendants de matrice de variance-covariance Q_γ (bruit de l'entrée) et Q_α (bruit de modèle). Ces bruits interviennent dans l'équation (2.28), lors du calcul de la matrice de covariance de la phase de prédiction :

$$P_{i+1/i} = A_i P_{i/i} A_i^t + B_i Q_\gamma B_i^t + Q_\alpha \quad (3.16)$$

Dans l'équation ci-dessus le bruit de l'entrée Q_γ , de dimension deux, se reporte sur l'état, de dimension trois, via la jacobienne « B_i ».

En posant $Q_\alpha = 0$, des simulations informatiques montrent que l'ellipse d'incertitude, qui découle de cette équation, a son petit axe sensiblement tangent à la trajectoire comme sur la figure 3.7.

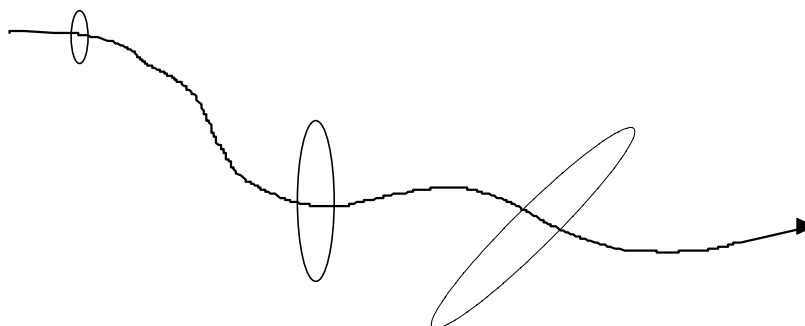


figure 3.7 : évolution de l'incertitude due à Q_γ uniquement (phase de prédiction du filtre de Kalman)

Par ailleurs, les simulations indiquent que la position réelle du véhicule est effectivement inscrite dans l'ellipse d'incertitude, correspondant à une probabilité de 99 %. En outre, l'expérience montre que l'estimation odométrique dérive davantage latéralement que longitudinalement, à cause de l'intégration de l'erreur de cap. Il semble donc que l'erreur odométrique soit correctement modélisée, à court terme, par l'ellipse d'incertitude générée par le bruit d'entrée.

A l'inverse, le bruit de modèle additif modélise moins bien l'incertitude ; si ses composantes sur « x et y » sont identiques, l'incertitude est représentée par un cercle.

Il apparaît donc que **le bruit de l'entrée traduit mieux l'évolution de l'incertitude que le bruit de modèle, lors de la phase de prédiction.**

D'autre part, nous avons remarqué **qu'un bruit de modèle non nul dégrade le processus d'estimation des rayons.** Or ce dernier améliore grandement le processus de localisation car les erreurs les plus cruciales sont les erreurs de modèle (cf. paragraphe 5 - chapitre 2).

Ainsi, compte tenu des deux arguments énoncés, nous posons arbitrairement :

$$Q_\alpha = 0_{33} \quad (3.17)$$

Dans le cas de l'identification (filtre 2D à 5 éléments), la matrice Q'_α aura les trois premiers éléments de sa diagonale égaux à zéro (cf. équation (2.82)) :

$$Q'_\alpha = T_e \cdot \begin{bmatrix} & & 0 & 0 \\ & 0_{33} & \dots & \\ & & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & Q_r & 0 \\ 0 & & & 0 & Q_r \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Par contre, l'équation (3.17) conduit à surdimensionner le bruit de l'entrée : « γ » ne représente alors plus uniquement l'incertitude due à l'erreur de mesure des codeurs, *il modélise aussi toutes les erreurs qui interviennent dans l'étape de prédiction.*

Remarque :

Du fait que les recalages de SIREM sont fréquents, le filtre a besoin d'une bonne modélisation des erreurs de l'odométrie à court terme. Ainsi, notre façon de traiter la modélisation des erreurs odométriques n'est peut-être (et même certainement) pas adaptée à une « odométrie long terme ».

4.3 Méthodologie de réglage en traitement différé

Un réglage convenable du filtre doit permettre à SIREM de corriger les erreurs odométriques et, à l'inverse, l'odométrie doit « lisser » les erreurs de mesures de SIREM : il s'agit donc de trouver un compromis.

Compte tenu des variances des bruits des équations (3.15) et (3.17), régler le filtre revient à déterminer les valeurs des deux paramètres scalaires $Q_{\Delta q}$ et Q_r^4 .

La méthodologie que nous proposons de suivre consiste à utiliser une référence externe, en l'occurrence la ligne constituée par la corde blanche d'équation connue. Par une approche de type « essai-erreur », les scalaires $Q_{\Delta q}$ et Q_r sont déterminés en traitement différé. Les paragraphes qui suivent précisent la manière de réaliser cette détermination.

4.3.1 Bruit d'entrée $Q_{\Delta q}$

L'objectif est ici de déterminer le scalaire $Q_{\Delta q}$. Connaissant la trajectoire suivie, nous pouvons calculer l'écart latéral, c'est-à-dire la distance entre l'estimée et la droite réellement suivie. Le filtre sera d'autant mieux réglé que cet écart sera faible, mais ce n'est pas suffisant. Il est important aussi que cette erreur reste majorée par trois écarts types estimés.

⁴ On rappelle que $Q_\gamma = Q_{\Delta q} \cdot I_{22}$ est le bruit de l'entrée, modélisant toutes les erreurs qui interviennent dans l'étape de prédiction. Q_r est le paramètre d'identification des rayons.

Considérons une droite parallèle à l'axe des abscisses. Dans ce cas, la variance de l'erreur latérale estimée par le filtre est directement donnée par le deuxième terme de la diagonale de la matrice de covariance « P », soit $\sigma_y^2 = P(2,2)$. Ainsi, sur les trajectoires parallèles aux axes du repère local, il est aisé de calculer la variance de l'erreur latérale.

Une trajectoire du terrain d'essai, approximativement parallèle à l'axe des abscisses, a donc servi de trajectoire de réglage. Le réglage de $Q_{\Delta q}$ a été réalisé, au travers de différents essais, en partant d'une valeur surdimensionnée par rapport au bruit théorique des codeurs. Lorsque $Q_{\Delta q}$ devient trop faible, l'erreur d'estimation dépasse « trop souvent » les trois écarts types estimés.

Le résultat d'un bon compromis sur une ligne droite de 35 m parcourue à une vitesse constante de 10 cm/s est donné sur la figure 3.8.

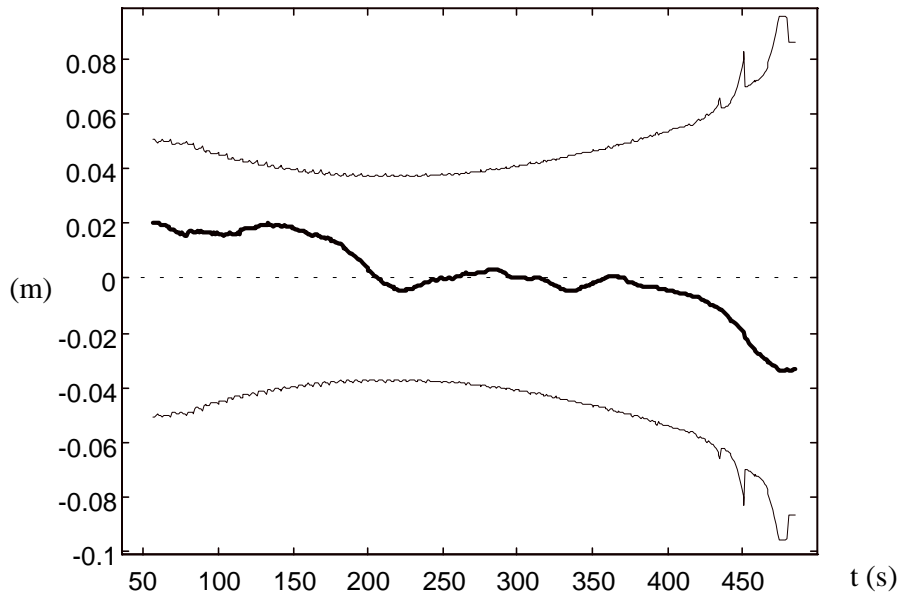


figure 3.8 : écart latéral (gras) et + ou - 3 écarts types estimés sur « y »

Pour régler $Q_{\Delta q}$, on peut aussi utiliser la distance de Mahalanobis. Quand $Q_{\Delta q}$ devient trop faible, la distance de Mahalanobis entre la prédiction et la mesure réelle prend des valeurs élevées, non réalistes.

Par ailleurs, les essais ont montré que $Q_{\Delta q}$ n'est pas un paramètre très sensible ; sa valeur peut passer du simple au double sans modifier radicalement le comportement du filtre.

Finalement, la valeur qui modélise au mieux l'odométrie, dans l'herbe, est donnée par :

$$Q_{\Delta q} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ rad}^2 \quad (3.19)$$

4.3.2 Paramètre d'identification des rayons Q_r

Q_r est la variance du bruit de modèle des rayons. Comme le modèle d'évolution des rayons est une constante (cf. équation (2.75)), Q_r peut être interprété comme un paramètre de réglage de la vitesse d'identification des rayons. En effet, plus il sera grand, plus des variations rapides des rayons pourront être observées ; cependant, dans ce cas, les localisations du filtre oscillent beaucoup. A l'inverse, si Q_r est trop faible, l'identification des rayons est affectée par un retard (erreur de « traînage ») jusqu'à atteindre le point de fonctionnement : durant cette phase, le processus de localisation est biaisé. Le réglage de Q_r doit donc réaliser un compromis.

Si un rayon est surestimé, de 10 % par exemple, un bon réglage de Q_r est tel que l'estimée du rayon revienne rapidement à sa valeur moyenne et que les oscillations du régime permanent soient modérées, comme sur la figure 3.9.

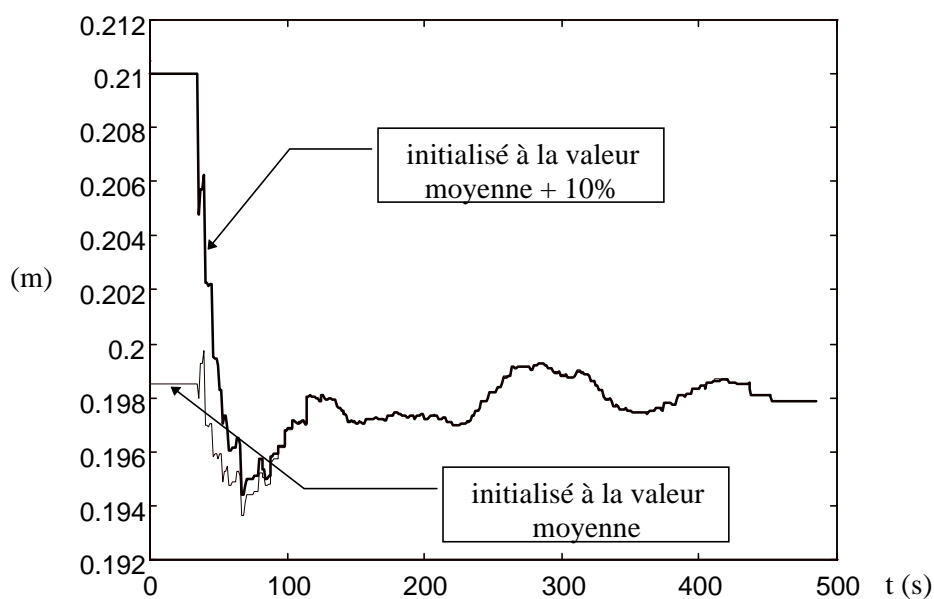


figure 3.9 : estimées du rayon droit après deux traitements différés

Si l'on compare la figure 3.9 avec la figure 2.23, obtenue avec des données simulées, on constate que les résultats des simulations sont en très bonne concordance avec les résultats réels.

Après différents essais, on obtient :

$$Q_r = 20 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \quad (3.20)$$

La figure 3.10 reporte l'identification des deux rayons lors d'un essai en ligne droite, avec des estimées initiales convenablement choisies.

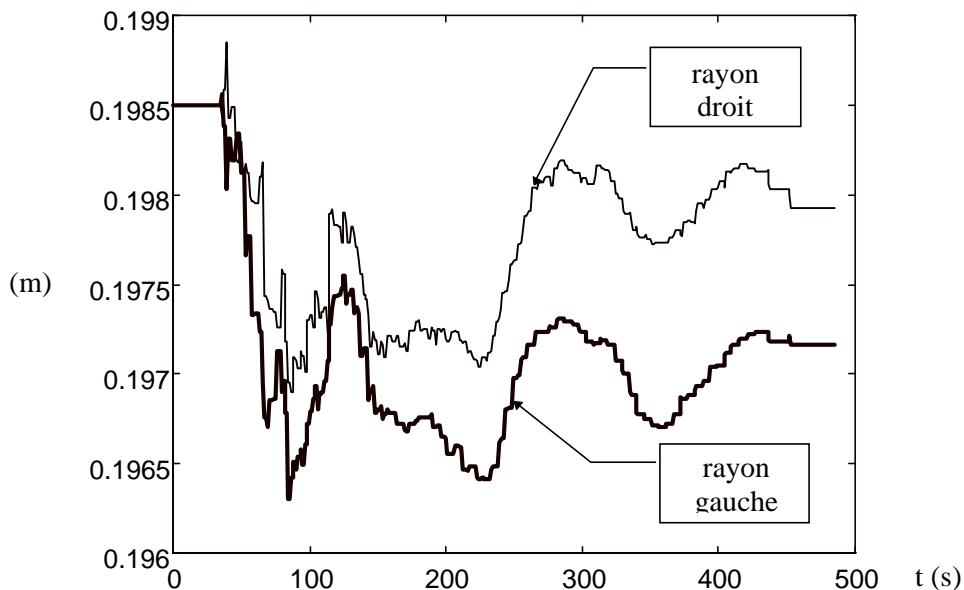


figure 3.10 : estimations réelles des rayons des roues

Lorsque la vitesse de l'engin est trop faible, l'estimation des rayons n'a pas lieu (au début et à la fin). Après un court régime transitoire, les estimées oscillent dans une bande inférieure au millimètre. Le rayon équivalent de la roue gauche est plus petit d'un millimètre que le rayon de la roue droite. Les oscillations sont très certainement dues aux variations de hauteur et d'attitude du terrain.

Finalement, on peut s'assurer que l'erreur d'estimation est comprise dans la bande des trois écarts types estimés, comme le montre la figure suivante :

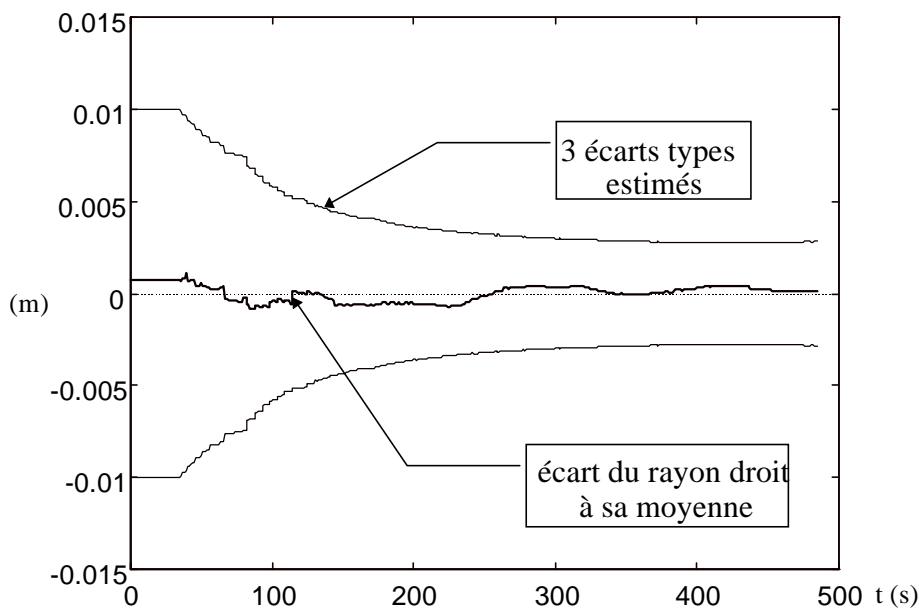


figure 3.11 : écart du rayon droit à sa moyenne

4.3.3 Seuil de cohérence de la distance de Mahalanobis

Le seuil de cohérence peut être choisi en étudiant les distances de Mahalanobis des mesures azimuthales sur la balise n°1, par exemple, avec toutes les balises, le long d'une trajectoire.

Lors d'un traitement différé, lorsqu'une mesure correspond à la balise n°1 (B_1), on calcule les distances de Mahalanobis entre cette mesure et les angles prédits correspondant aux trois balises (cf. figure 3.12). Le seuil de Mahalanobis doit être choisi de telle sorte que la balise n°1 soit toujours retenue.

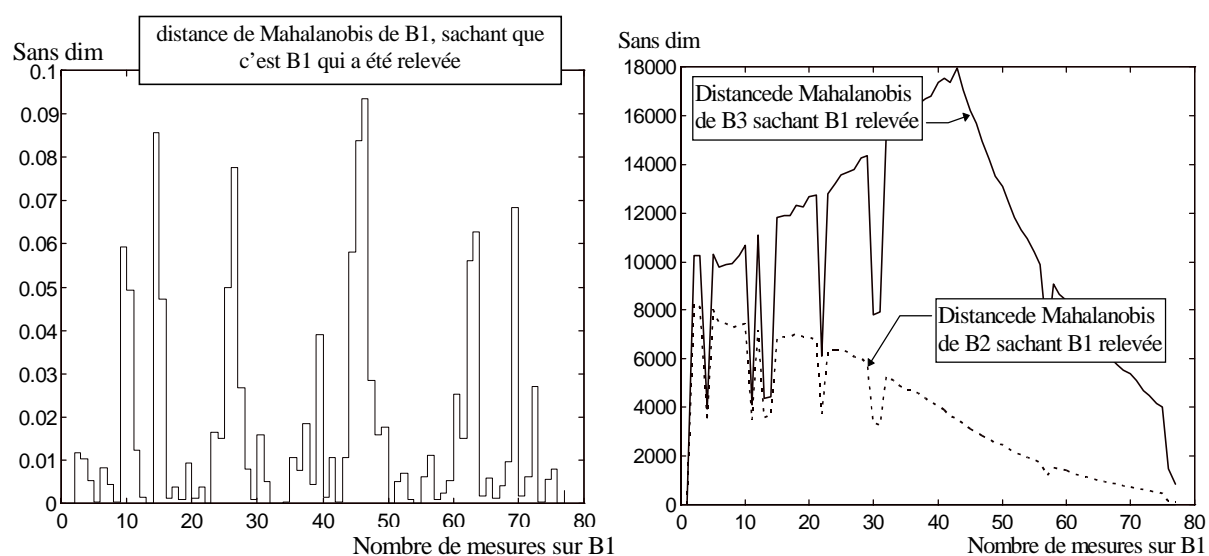


figure 3.12 : distances de Mahalanobis sachant que c'est B_1 qui a été relevée

Au vu des courbes ci-dessus, on constate qu'un seuil de cohérence égal à « 3 », valeur souvent préconisée [Durieu, Opderbecke, 93], convient. En effet, cette valeur permet de rejeter toutes les mesures effectuées sur B_2 et B_3 , et de retenir toutes les mesures sur B_1 . Il est à noter que la distance de Mahalanobis permet de rejeter les mauvaises mesures avec une certaine marge de sécurité.

4.3.4 Remarques sur la méthode

La méthodologie exposée dans ce paragraphe pour régler les paramètres du filtre a le mérite d'être simple. A l'origine, il s'agit en effet d'un problème d'optimisation non linéaire à plusieurs entrées. En simplifiant le nombre de paramètres à régler, le problème revient à agir sur un terme scalaire afin d'améliorer les performances du filtre, à travers différents traitements différés de données réelles. Comme on l'a vu, le réglage est très simple sur une ligne droite parallèle à l'un des axes du repère.

Le fait que la trajectoire soit obligatoirement linéaire peut apparaître comme un caractère limitatif de notre approche. Malheureusement, sans « trajectographe » externe, comme par exemple la station SESSYL⁵ du L.C.P.C. de Nantes, il ne nous est possible de calculer des erreurs de localisation (cap et écart latéral) que sur des lignes droites. Cependant, comme on le verra par la suite, le réglage obtenu de cette façon sera validé sur d'autres trajectoires (en l'occurrence des cercles).

Il semble que l'état du sol soit un facteur prépondérant. Ainsi, le réglage du filtre dépend de la nature de la surface de roulement et doit donc être réalisé en fonction de cette dernière. Il est évident que ce phénomène découle de l'utilisation d'un odomètre dont les glissements dépendent de la nature du sol.

Comme le réglage effectué ici correspond à une pelouse sèche, on est en droit de demander comment se comporte le filtre sur une pelouse humide. Dans ce cas, pour améliorer les localisations, il serait préférable de modifier $Q_{\Delta q}$. Cependant, d'autres essais, réalisés sur une pelouse détrempeée, ont montré que les performances sont sensiblement dégradées, sans pour autant faire diverger la méthode. Ceci indique que le réglage de ce paramètre n'est pas trop sensible : il existe des domaines admissibles pour lesquels les performances du filtre sont convenables.

⁵La Station d'EtudeS des Systèmes de Localisation est un chariot équipé d'une plate-forme mobile en altitude, roulis et tangage. Le chariot se déplace sur un monorail métallique fixé sur un mur en béton [Guillo, 94, Peyret, 95]. Ce système sert d'étalon de mesure à des systèmes de localisation d'engins de travaux publics.

5 RESULTATS EXPERIMENTAUX 2D

Ce paragraphe reporte les résultats d'essais réels, effectués en extérieur sur le terrain d'essai de l'Ecole Centrale de Nantes décrit au paragraphe 3.1. Lors de ces essais, le capteur SIREM a montré son bon fonctionnement en extérieur. Il a notamment montré qu'il peut fonctionner avec des conditions d'éclairément très variables (des essais ont été réalisés par temps couvert et d'autres avec un temps très ensoleillé). Il est évidemment sensible au brouillard ou à un soleil trop bas. Les seuls parasites lumineux que nous avons détectés, et susceptibles de gêner son bon fonctionnement, sont des réflexions du soleil sur des pare-brise de voitures. Dans ce cas, le test de cohérence permet de rejeter ces mesures parasites, à condition qu'elles ne se situent pas à proximité immédiate d'une balise.

5.1 Essai statique.

La manipulation consiste à placer le capteur SIREM à la verticale d'une borne de position parfaitement connue. Afin de connaître le cap de l'engin, une corde blanche est tendue entre deux bornes du terrain. Ensuite, grâce au logiciel de suivi de ligne, le robot MELODY a suivi la corde jusqu'à être stoppé sur la borne désirée. Si le robot a suivi pendant plusieurs mètres la ligne, on peut admettre que son cap est tangent à la ligne blanche. La figure 3.13 indique la position et le cap du robot relativement aux trois balises, une fois que ce dernier est arrêté sur la borne de comparaison.

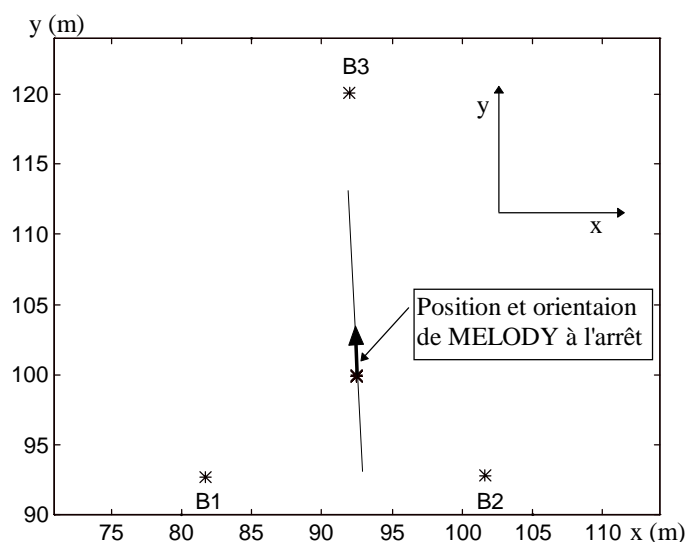


figure 3.13 : posture du véhicule par rapport aux trois balises

Après deux minutes de fonctionnement, on visualise sur la figure 3.14, la position estimée. On constate que les oscillations sont particulièrement faibles, puisqu'elles sont

inférieures à deux millimètres en « x » et sept millimètres en « y » (oscillations légèrement plus grandes dans le sens du cap de l’engin).

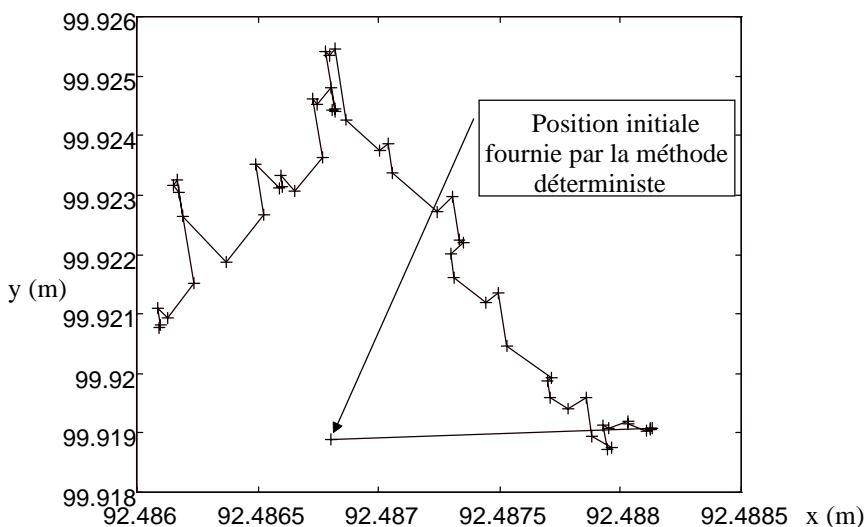


figure 3.14 : position estimée pendant une durée de deux minutes

Les mêmes résultats sont ensuite comparés avec la position de la borne et le cap donné par la ligne blanche (figure 3.15).

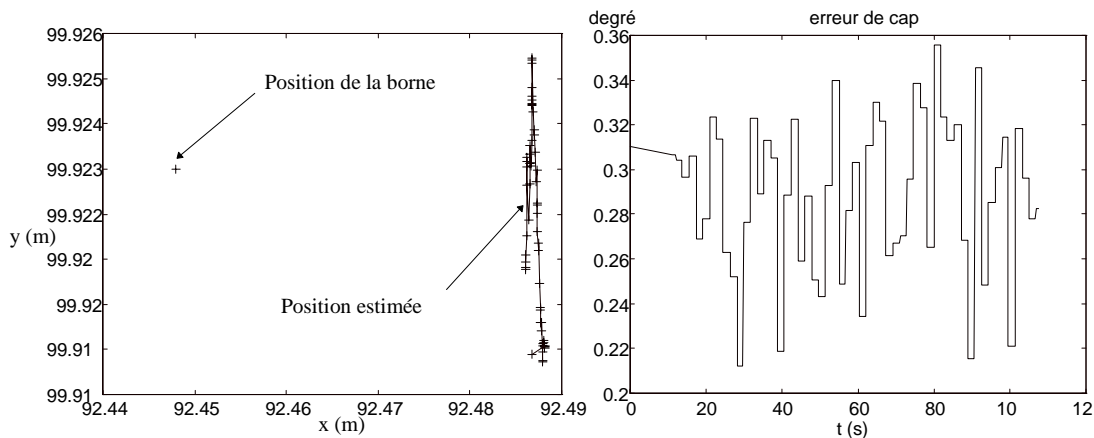


figure 3.15 : position et cap estimés comparés à la borne et à la ligne blanche

A priori, la position estimée présente un biais de 4 cm en x mais pas en y (les échelles sont différentes selon les deux axes). En cap, le décalage angulaire est de 0,28 degré.

Pour analyser convenablement ces résultats, il faut prendre en compte les erreurs de manipulation. En effet, dès que le robot est arrêté, on bloque les freins de MELODY, ce qui provoque une légère secousse capable d’expliquer l’erreur de cap de 0,3 degré.

Une deuxième source d’erreur vient du suivi de ligne qui n’est forcément pas parfait. A ceci s’ajoute l’erreur commise en appréciant à l’œil le fait que le point de référence de SIREM est à la verticale du point de test.

Plus importante que celles exposées ci-dessus, il existe une source d'erreur due au terrain non plan et à la hauteur du capteur SIREM. En effet, comme SIREM se situe à approximativement 2 m du sol, un degré de dévers crée un écart latéral de 3 cm (figure 3.16).

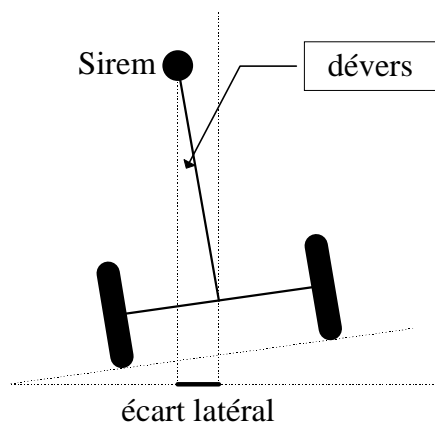


figure 3.16 : écart latéral dû au dévers

Ainsi, le phénomène de la figure 3.16 pourrait expliquer, à lui seul, le décalage entre la position estimée et la borne.

Remarques :

Comme l'on compare la position de SIREM avec des références placées au sol, l'écart dû au dévers (qui sera appelé par la suite « écart de dévers », par abus de langage) perturbera toujours l'analyse des résultats.

Lors des essais 2D de ce chapitre, ne connaissant pas le dévers, nous ne pourrions apporter de correction supprimant son effet. Dans le chapitre 6, grâce à des inclinomètres, on constatera que des angles de un à deux degrés sont présents sur les parties qui ont servi aux essais 2D ; par conséquent, des écarts de dévers de 5 cm seront monnaie courante.

Malgré cet écart de dévers, nous comparerons toujours les sorties du filtre à la seule référence absolue dont nous disposons, en l'occurrence la ligne blanche. Ainsi, lorsque l'écart latéral entre SIREM et la ligne blanche sera de l'ordre de quelques centimètres, il nous sera impossible de savoir s'il est dû à SIREM ou à un écart de dévers.

Le calcul de l'erreur de cap par rapport à la ligne, quant à lui, reste valable en présence d'écarts de dévers.

5.2 Essai en ligne droite.

Différents essais ont été effectués sur des lignes droites, matérialisées dans l’herbe par la corde blanche tendue entre deux bornes de positions connues. On reporte ci-dessous une expérimentation dans laquelle le véhicule démarre dans le triangle formé par les trois balises, franchit le cercle passant par les trois balises et s’éloigne sensiblement des ces dernières (figure 3.17) [Bonnifait, Garcia, 96 a]. Après une rampe d’accélération, la vitesse est constante et égale à 7 cm/s.

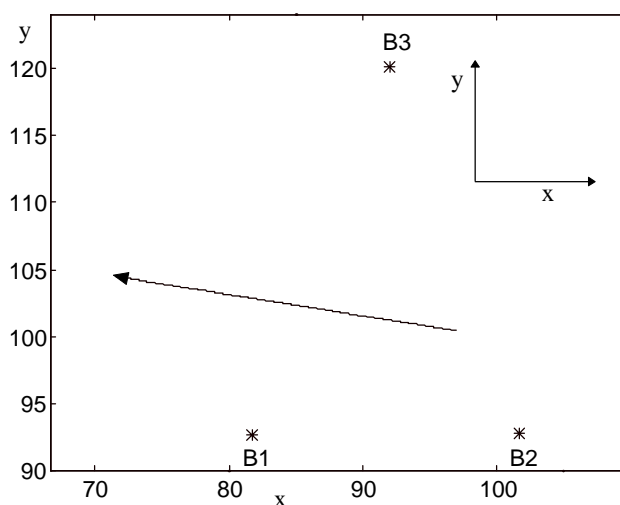


figure 3.17 : chemin suivi par MELODY

On reporte ci-après l’écart latéral par rapport à la ligne et l’erreur de cap de cet essai.

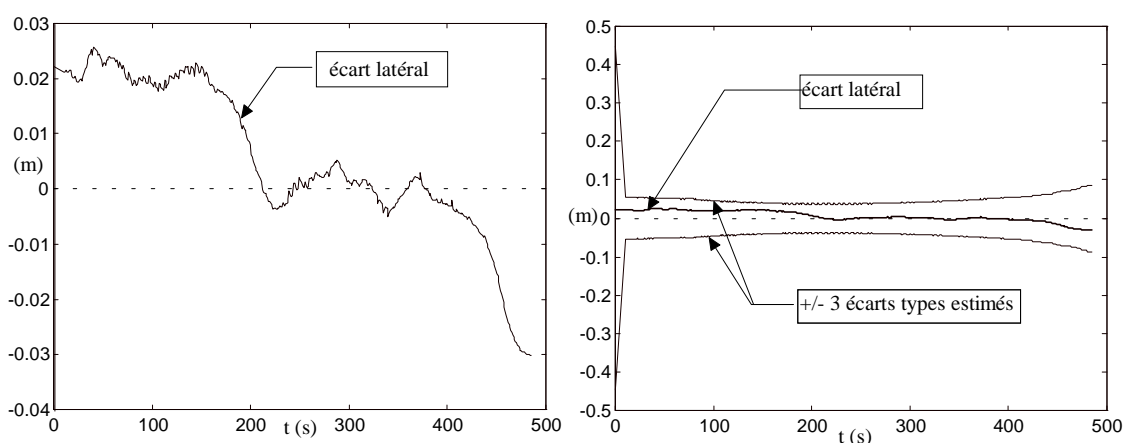


Figure 3.18 : écart latéral et écart type estimé

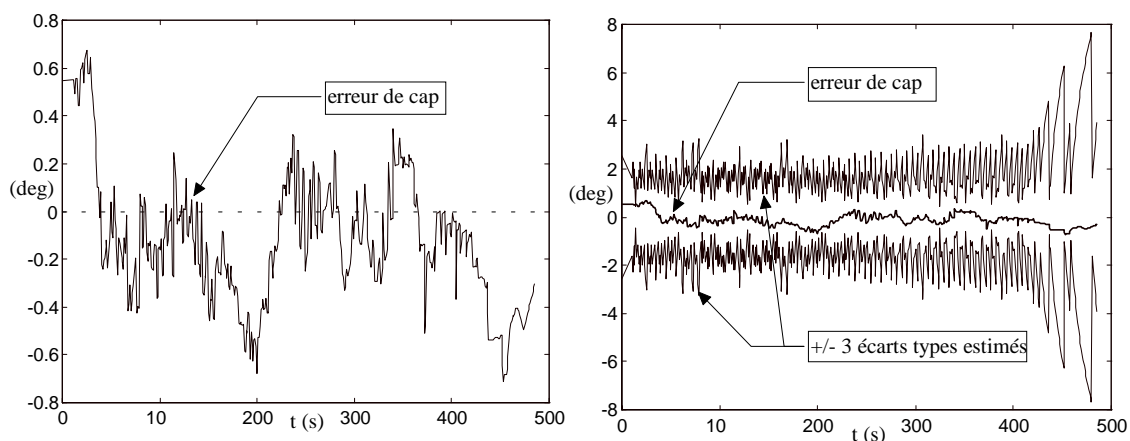


figure 3.19 : erreur de cap et écart type estimé

Il apparaît que l'erreur de cap est inférieure à 0,6 degré et l'écart latéral inférieur à 3 cm. En outre, comme ils restent bornés et compris entre plus ou moins trois écarts types estimés (la trajectoire étant sensiblement parallèle à l'axe des abscisses, cet écart type estimé est celui correspondant à « y »). Ces résultats indiquent un bon fonctionnement du filtre.

Dans cette expérience, il existe une erreur de manipulation supplémentaire par rapport au cas précédent, puisqu'il est difficile de tendre de façon parfaitement droite une corde sur une longueur de 35 m (en pratique, on secoue la corde jusqu'à ce qu'elle semble droite à l'oeil).

On notera de plus que la précision se dégrade en fin de parcours : le filtre en rend compte puisque ses écarts types estimés augmentent. Ceci est dû, en premier lieu, au fait que les balises sont éloignées du capteur (mauvaise configuration géométrique), mais aussi à la balise B_2 trop éloignée pour être relevée. Ceci est visible en examinant l'écart type estimé du cap de la figure 3.19 : chaque recalage provoque une diminution de la variance et, pour $t > 400$ s, il y a moins de recalages (B_2 est trop loin). En outre, toujours en fin de trajectoire, les recalages correspondant à B_1 et B_3 sont très proches et les phases où la navigation à l'estime est non recalée, s'allongent. Rappelons que cette situation ne doit pas apparaître en pratique puisque, lorsqu'il quitte le triangle des balises, le système peut sélectionner trois nouvelles balises, mieux configurées.

Intéressons nous à la répétabilité de l'écart latéral en fonction de l'abscisse « x » estimée, sur trois parcours de la même trajectoire. En effet, comme la droite d'essai (figure 3.20) est quasiment parallèle à l'axe des « x », l'abscisse estimée est équivalente sur ce chemin à une abscisse curviligne. La trajectoire est parcourue les trois fois dans le même sens, pour que l'algorithme calcule son estimée initiale dans le triangle des balises.

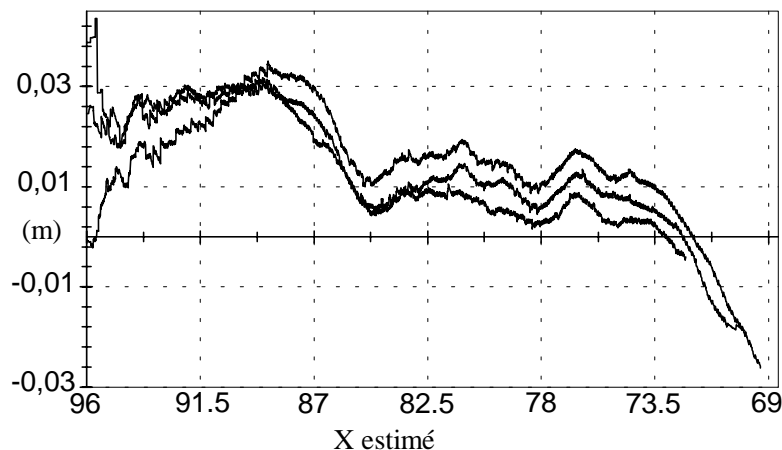


figure 3.20 : répétabilité de l'écart latéral

La répétabilité de l'écart latéral est donc du centimètre. Par ailleurs, on constate que l'écart latéral n'est pas un phénomène purement aléatoire, mais une conséquence de la non planéité du terrain, ou encore de la corde imparfaitement tendue.

5.3 Essai sur un cercle

Différents essais ont été réalisés sur des cercles [Bonnifait, Garcia, 96 c], malgré la difficulté que représente leur matérialisation au sol avec la corde. Par ailleurs, comme la corde n'est pas tendue, le chemin n'est pas lisse ; le point asservi à suivre la ligne subit donc des oscillations. Le capteur SIREM distant de ce point subit lui aussi des oscillations. Bien que la manipulation et l'analyse des résultats soient plus délicates, ces trajectoires permettent de visualiser des phénomènes intéressants.

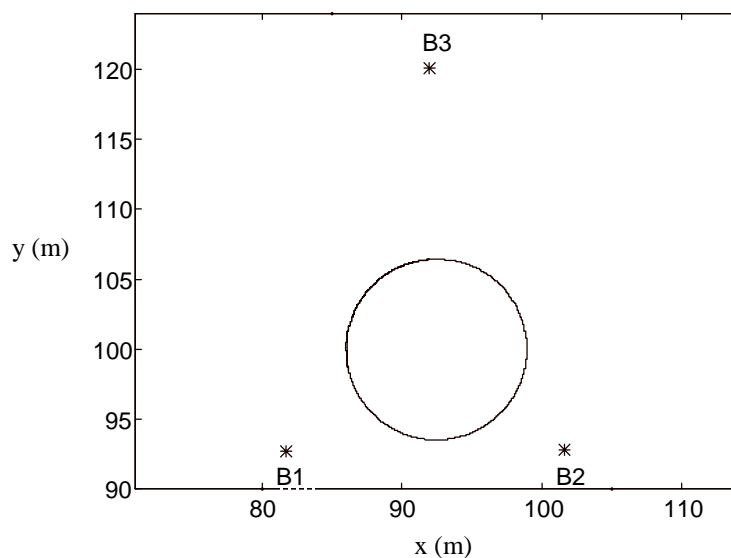


figure 3.21 : chemin de l'essai

A cause de la translation entre la caméra de suivi de ligne et SIREM, si le véhicule est placé de façon à être initialement tangent au cercle, le point S décrit lui aussi un cercle, mais de rayon différent (cf. figure 3.22). Si, dans le cas contraire, le véhicule n'est pas tangent au cercle au départ, la courbe obtenue est une « tractrice » qui tend vers un cercle, en régime permanent [Le Corre, 93].

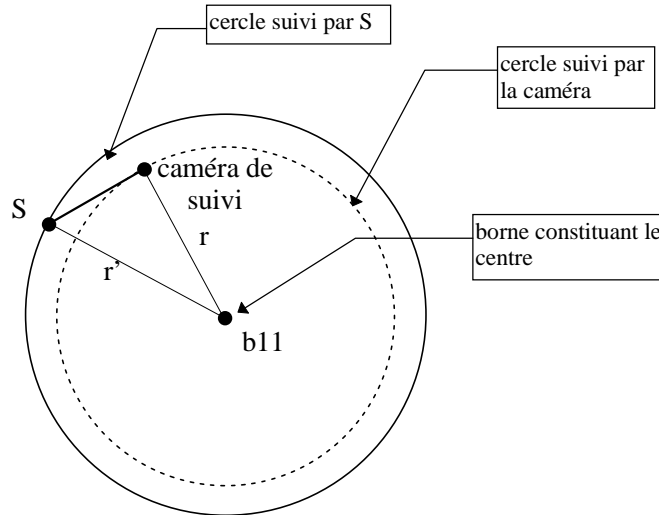


figure 3.22 : chemin décrit par SIREM

Pour calculer l'écart latéral au cercle, on connaît les coordonnées du centre matérialisé par une borne ; le rayon « r » du cercle est connu, car le cercle passe par une autre borne. Connaissant la distance « caméra de suivi - S », on peut calculer le rayon « r' ». L'écart latéral signé est obtenu en calculant la distance de l'estimée au centre et en lui soustrayant le rayon « r' ».

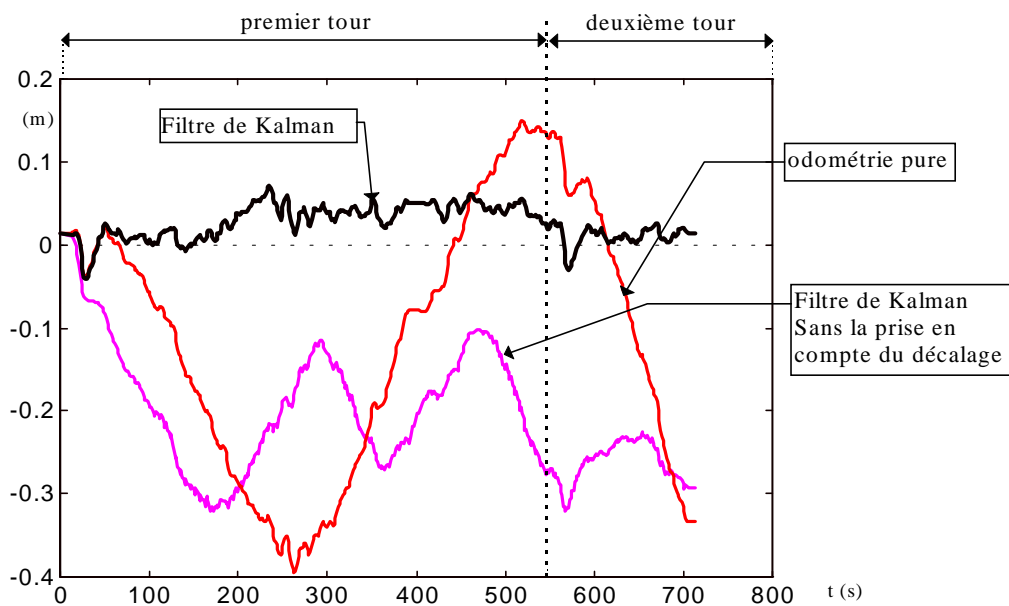


figure 3.23 : écarts latéraux par rapport au cercle ($v = 7 \text{ cm/s}$)

On remarque sur la figure 3.23 que le filtre se comporte bien. On note même une répétabilité de l'écart entre le premier et le deuxième tour. L'odométrie seule n'est pas utilisable, car sa divergence est très rapide.

La translation existant entre S et M joue un rôle important qui est clairement indiqué sur cette trajectoire. Le filtre qui la prend en compte a des performances bien supérieures à un filtre qui la néglige. Dans ce cas l'écart latéral oscille entre 10 et 30 cm (cf. figure 3.23).

5.4 Initialisation du filtre sur le cercle passant par les trois balises

L'essai de ce paragraphe correspond à une initialisation du filtre, avec le capteur SIREM placé sur le cercle (C).

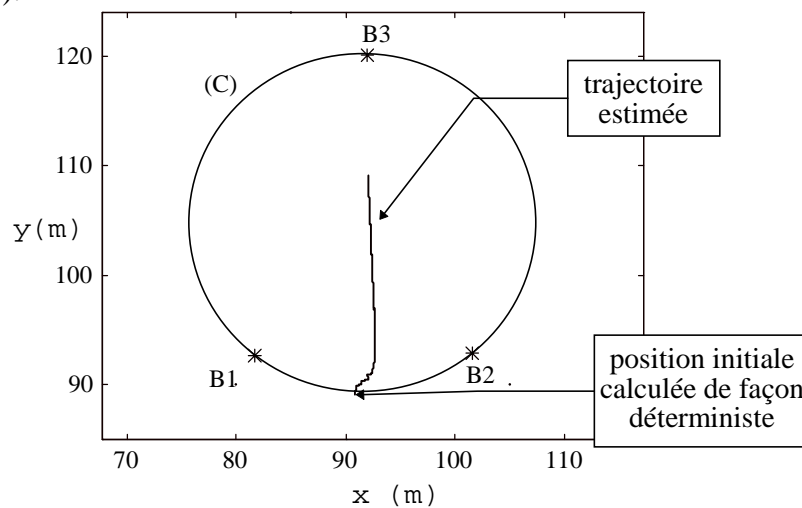


figure 3.24 : chemin estimé démarrant sur (C)

On constate que la méthode de localisation statique commet dans ce cas une erreur de 2 m sur la gauche et de -4,5 degrés, par rapport à la posture réelle (on obtient $x = 90,85$ m au lieu de 93 m et $\theta = 87,92$ deg au lieu de 92,4 deg). Le filtre de Kalman, lui aussi, est mis en difficulté, car, tant que SIREM est sur (C), il n'est pas capable de diminuer l'erreur d'estimation.

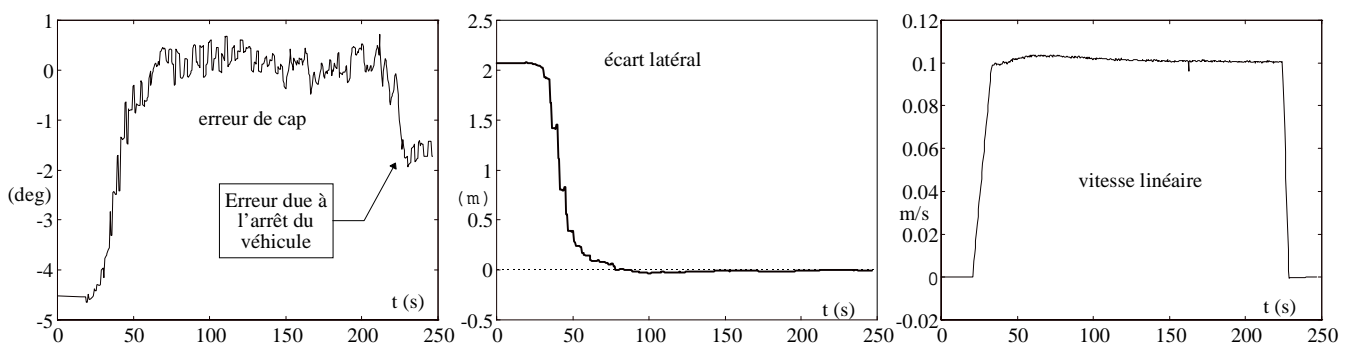


figure 3.25 : erreur de cap, écart latéral et vitesse linéaire en fonction du temps

Comme le montre la figure 3.25, dès que le mobile s'éloigne de la singularité (vers $t = 30$ s), l'erreur de cap et l'écart latéral reprennent des valeurs normales.

Cet essai réel met donc en évidence le problème d'observabilité, lorsque le véhicule est arrêté sur le cercle passant par les trois balises. Ce résultat confirme les résultats obtenus par l'étude de l'observabilité et par les simulations (paragraphe 4.4.2.1 du chapitre 2). On s'aperçoit aussi que la non-observabilité est assez locale, car, dès que le système s'éloigne du cercle, le fonctionnement du filtre redevient normal.

5.5 Précision de l'algorithme 2D

L'étude de la précision d'un système de localisation est un problème délicat qui dépend fortement de la configuration géométrique du système, c'est-à-dire des positions relatives des amers et de la position du capteur relativement à ces amers. En outre, plus le nombre d'amers est grand, meilleure est la précision. Vu les manipulations exposées dans ce chapitre, l'objectif n'est pas de déterminer la précision du filtre 2D, mais de l'estimer.

Pour simplifier, plaçons nous dans le cas où SIREM est inclus dans le triangle formé par trois balises. A l'arrêt, l'erreur de position est certainement inférieure à 4 centimètres (paragraphe 5.1). En déplacement, compte tenu des résultats obtenus, nous estimons que l'erreur latérale est de l'ordre de quelques centimètres.

Par contre, il n'est pas possible, avec ces essais, de déterminer la précision absolue du filtre 2D, car aucun écart longitudinal n'a pu être déterminé (erreur d'avance ou de traînage). Si l'on souhaite déterminer la précision du filtre, il faut utiliser un étalon de mesure, tel que la station SESSYL.

6 CONCLUSION

Ce chapitre a été dédié à l'adaptation de l'algorithme 2D du chapitre 2, pour son implantation en temps réel sur le robot mobile MELODY. Un modèle odométrique, prenant en compte la translation existant entre SIREM et le centre de l'essieu des roues, a été spécialement développé. Certains essais ont démontré qu'il est nécessaire de prendre en compte cette translation, sans quoi, les performances sont fortement dégradées.

Un effort important a été consacré à la méthodologie des essais. En particulier, grâce à un système de guidage externe, le problème de la commande de MELODY a été entièrement découplé de celui de la localisation. En outre, ce système de guidage utilise des trajectoires matérialisées au sol, qui ont servi de référence de comparaison pour le filtre ; ainsi, un calcul d'écart peut être réalisé tout au long de la trajectoire et non pas seulement en début et fin, comme cela est souvent fait. Sur notre terrain d'essais, qui n'est pas parfaitement plan, cette façon de procéder présente l'inconvénient d'être sujette à un écart latéral dû au dévers, car SIREM se situe à une hauteur de deux mètres au dessus du sol. Par ailleurs, plusieurs essais, réalisés sur la même trajectoire, ont montré que la répétabilité de l'écart latéral est de l'ordre du centimètre. Malheureusement, notre procédure d'essais ne permet pas d'apprécier l'erreur longitudinale (erreur de traînage des localisations). Compte tenu de ces différentes remarques, il nous est donc impossible de déterminer la précision absolue du système 2D : afin de la déterminer, on pourrait utiliser l'étalon de mesure SESSYL.

La procédure de réglage des paramètres du filtre a conduit à des valeurs correctes, puisque les résultats de localisation qui en découlent sont très satisfaisants. Elle présente l'avantage d'être simple, dans son principe. Cette simplicité est obtenue en constatant que le bruit d'entrée modélise, à lui seul, de façon très correcte les incertitudes qui interviennent lors de l'étape de prédiction : le bruit de modèle peut alors être supposé nul. En outre, cette façon de traiter le problème améliore le processus d'identification des rayons, dont dépend la précision globale du système.

Les expérimentations réelles ont permis de montrer le bon fonctionnement de SIREM en milieu extérieur. Elles ont permis en plus de valider les études faites en simulation. En effet, on constate une forte adéquation entre les comportements simulé et réel.

L'algorithme de localisation dynamique 2D est actuellement utilisé, sur le robot MELODY, pour expérimenter des lois de commande par retour d'état cartésien [Robin, 97].

CHAPITRE 4

**POSITION ET ATTITUDE DE SIREM DANS
L'ESPACE : REPRESENTATION ADAPTEE A
L'UTILISATION D'INCLINOMETRES**

Résumé du chapitre 4

A partir de ce chapitre, on s'intéresse à la généralisation de l'algorithme 2D. La démarche est décomposée en 4 étapes : généraliser la posture (x, y, θ) de façon à obtenir une pose 3D (6 paramètres indépendants), établir un modèle d'évolution à l'estime 3D, écrire les relations qui lient la pose 3D aux angles de SIREM et étudier un ou plusieurs filtres de Kalman.

Ce chapitre décrit la première étape. Cependant, ce choix de représentation étant très lié au choix des capteurs, on s'intéresse d'abord à l'adjonction de capteurs permettant une localisation à l'estime 3D. Notre choix s'est porté sur deux inclinomètres à balourd montés l'un selon l'axe d'avance de l'engin et l'autre orthogonalement. Du fait des dynamiques lentes et comme la surface de roulement d'un finisseur est assez régulière, leur utilisation est envisageable dans ce cas.

Dans ce contexte, nous proposons une nouvelle représentation de l'attitude utilisant les angles de « direction, déclivité et dévers orthogonal ». Pour des véhicules terrestres, les positions singulières ne sont pas approchées. Grâce à cette représentation, deux angles sont directement mesurés par les inclinomètres. Les relations de passage entre ces angles et les angles de lacet, tangage et roulis sont données.

Finalement, après avoir défini les différents repères qui interviendront dans le processus de localisation, on décrit la maquette de simulation de MELODY équipé de ses capteurs se déplaçant sur une surface gauche. Nous présentons la trajectoire de référence des simulations qui sera utilisée dans la suite de ce mémoire pour étudier différents filtres de Kalman.

CHAPITRE 4

Position et attitude de SIREM dans l'espace : représentation adaptée à l'utilisation d'inclinomètres

1 INTRODUCTION

On se propose, dans les chapitres qui suivent, de généraliser au cas 3D l'algorithme de localisation 2D dont le principe est de recalibrer l'odométrie avec des angles d'azimut de SIREM, obtenus de façon asynchrone. Cette méthode présente l'avantage de prendre en compte chaque angle d'azimut indépendamment, grâce à un formalisme de Kalman.

Le problème de la localisation dans l'espace que nous proposons de traiter, se définit comme suit : *un solide est localisé dans l'espace à un instant donné lorsque l'on connaît la matrice de transformation homogène entre un repère R_s , lié à ce solide, et un repère de référence, noté par la suite R_0 . Il s'agit donc d'un problème purement géométrique.*

Une matrice homogène est une matrice carrée de la forme :

$$T = \begin{bmatrix} A & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T \in \mathfrak{R}^{4 \times 4} \quad (4.1)$$

où la matrice « A », de dimension 3x3, représente la rotation et le vecteur « P », de dimension 3, indique la translation. Pour une translation pure, $A = I_{33}$ (I_{33} étant la matrice identité de rang 3) et pour une rotation pure $P = 0$. Une matrice « ${}^i T_j$ » représente la transformation permettant de passer du repère « R_j » au repère « R_i » (et inversement), ou encore, ${}^i T_j$ définit le repère R_j dans le repère R_i . La matrice ${}^i A_j$ et le vecteur ${}^i P_j$ donnent respectivement l'attitude et la position de R_j dans R_i . Les transformations homogènes possèdent des propriétés intéressantes de composition et d'inversion [Dombre, Khalil, 88] qui font que ce mode de représentation géométrique est abondamment utilisé.

Une matrice homogène contient 12 termes, alors que 6 suffisent pour décrire la position et l'orientation d'un solide dans l'espace. Cette représentation est donc redondante. La difficulté consiste à déterminer un nombre minimal de paramètres (au minimum égal à 6) s'adaptant au mieux au problème considéré. Ces paramètres définissent la **pose 3D**, c'est-à-dire la position et l'attitude du solide.

La démarche, qui conduit à une forme d'état sur laquelle sera basé l'estimateur 3D, peut se décomposer en quatre étapes :

- généraliser la posture 2D (x, y, θ) , c'est-à-dire trouver un vecteur d'état caractérisant la position et l'attitude du mobile dans l'espace.
- établir un modèle d'évolution discret utilisant des capteurs proprioceptifs (navigation à l'estime 3D).
- écrire les relations entre les angles de SIREM et le vecteur d'état (équation d'observation).
- étudier un ou plusieurs filtres de Kalman permettant l'estimation de l'état.

Après avoir défini les différents repères, ce chapitre propose tout d'abord de présenter le choix de représentation qui constitue la première étape. Toutefois, ce choix est bien entendu très lié au problème du modèle d'évolution et des capteurs qui permettent de le mettre en œuvre. En d'autres termes, le vecteur d'état doit être bien adapté à la navigation à l'estime.

Notre première approche a été de ne pas considérer de capteur supplémentaire, partant du principe que les angles d'attitude varient lentement. Grâce à une paramétrisation faisant apparaître les coordonnées du plan de roulement, un filtre de Kalman étendu a été mis en œuvre, dont la navigation à l'estime n'utilisait qu'un odomètre, les paramètres du plan étant corrigés à chaque recalage avec les mesures de SIREM. Cette version minimale, du point de vue des capteurs, n'a pas donné satisfaction, notamment au niveau de l'estimation de l'attitude. Il semble donc intéressant d'adjoindre des capteurs proprioceptifs permettant d'améliorer son estimation. Cette démarche nous amène à considérer conjointement la deuxième étape, et nous verrons ensuite que le choix des capteurs aura une incidence sur la représentation de l'attitude.

2 ADJONCTION DE CAPTEURS PERMETTANT UNE LOCALISATION A L'ESTIME 3D

Quels capteurs vont nous permettre de calculer la position et l'attitude du mobile à un instant « $i+1$ », connaissant la position et l'attitude à un l'instant « i » et les rotations élémentaires des roues entre les instants « i » et « $i+1$ » ?

Le choix s'oriente naturellement vers des capteurs permettant une mesure d'attitude, c'est-à-dire des inclinomètres ou des gyromètres.

Compte tenu de la lenteur d'évolution des machines considérées, les inclinomètres représentent une solution intéressante, puisqu'ils mesurent directement (au moins à l'arrêt) des angles par rapport à l'horizontale. Leur utilisation est donc plus simple que celles des gyromètres, dont il faut intégrer la mesure de vitesse de rotation, ce qui engendre une inévitable divergence de l'angle d'attitude estimé. Par contre, les mesures des inclinomètres ont un fort caractère « passe-bas » et sont sensibles aux accélérations. Sur un finisseur se déplaçant à une vitesse de l'ordre de quelques centimètres par seconde (quelques dixièmes de kilomètre par heure) sur une surface préparée (pas de trou, ni de bosse), les deux inconvénients des inclinomètres ne semblent plus prépondérants. Pour des vitesses de cet ordre, des essais réels (qui seront reportés au chapitre 6) menés avec le robot MELODY, ont montré que les accélérations ne sont pas perceptibles et se noient dans le bruit de mesure des inclinomètres et les bruits engendrés par les vibrations dues aux moteurs du robot et de SIREM.

Nous proposons donc d'ajouter deux inclinomètres à l'odomètre et à SIREM. Ils seront disposés comme sur la figure 4.1 : l'un selon l'axe d'avance du robot MELODY et l'autre selon sa perpendiculaire et parallèle à la surface de roulement. Ils sont solidaires de la plaque sur laquelle est fixé SIREM. D'un point de vue technologique, ils sont constitués d'un pendule en balourd asservi en position ; le courant de l'asservissement est proportionnel au sinus de l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale.

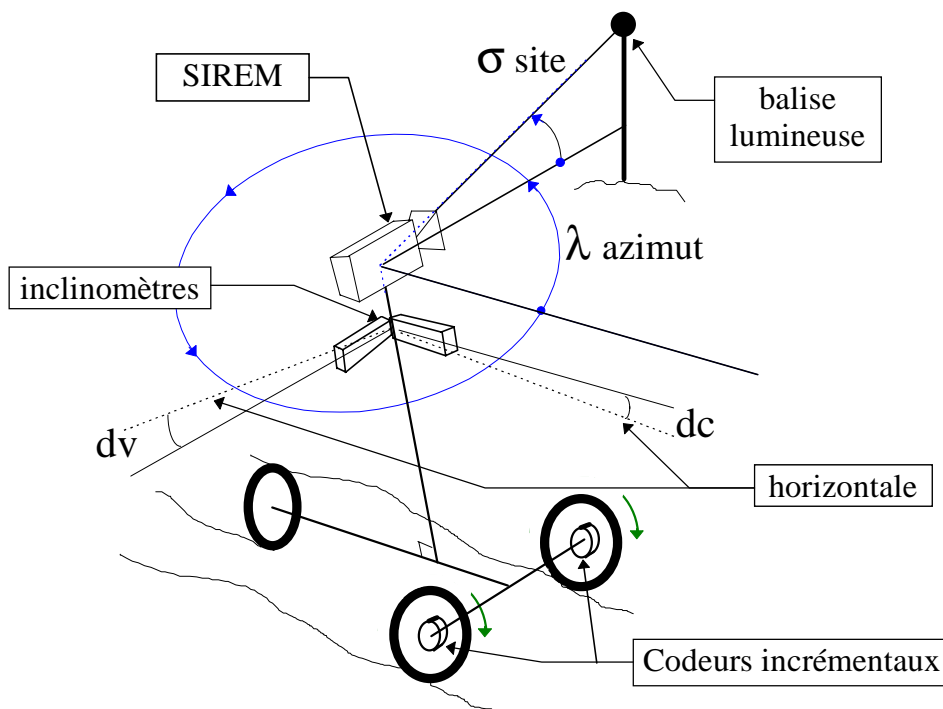


figure 4.1 : configuration des capteurs sur MELODY

Utiliser des angles par rapport à l'horizontale pour représenter l'attitude aura trois conséquences :

- définir une représentation qui, quoique proche d'une convention utilisée par les géomètres, est originale. Elle est basée sur l'utilisation des angles de « direction, déclivité et dévers orthogonal ».
- aboutir à une représentation 3D qui généralise celle utilisée en 2D, ce qui permet de conserver le formalisme de la localisation 2D.
- conduire à une formulation assez simple de la localisation à l'estime 3D, ce qui simplifiera d'autant l'expression du filtre de Kalman.

L'originalité de la représentation n'est bien entendu pas une fin en soi, et n'est justifiée que par les simplifications ultérieures. Toutefois, cela explique que, dans la suite de ce chapitre, nous présentons les formules de passage entre les représentations classiques et notre solution.

Enfin, la dernière partie du chapitre est consacrée à la présentation du principe et des fonctionnalités essentielles du logiciel de simulation du déplacement, sur une surface gauche, d'un véhicule de type MELODY équipé de SIREM, d'inclinomètres et de codeurs incrémentaux sur les roues. Ce logiciel joue un rôle pratique important puisque c'est grâce à celui-ci que l'on engendrera des mouvements le long desquels le logiciel de localisation pourra être testé.

3 LES REPERES

3.1 Le repère local

Le repère « R_0 » est le repère local et fixe de l'environnement, dans lequel est déterminée la pose 3D du véhicule. R_0 est supposé avoir son axe « z_0 » colinéaire à la gravité terrestre. Cette hypothèse est liée à l'utilisation d'inclinomètres, et n'est valable que localement puisque la terre est ronde.

3.2 Le repère de MELODY

Soit le repère « R_M » caractérisant la position et l'attitude du robot mobile MELODY dans le repère R_0 .

Lorsque le robot MELODY se déplace, si l'on suppose que chacune de ses trois roues est en contact ponctuel avec le sol, alors ces trois points définissent naturellement le plan de roulement. Il est à noter que l'on peut confondre ce plan de roulement avec le plan tangent à la surface de roulement, si celle-ci est « suffisamment régulière », c'est-à-dire que ses longueurs d'onde sont très grandes devant les distances entre les roues. Cette hypothèse sera faite lors de la simulation de MELODY.

L'origine du repère R_M est le point « M » milieu de l'essieu des roues motrices (figure 4.2). Le vecteur unitaire « \vec{s} » de R_M , axe des abscisses, est défini comme la perpendiculaire à l'essieu, parallèle au plan de roulement, et dirigée vers l'avant du véhicule. Notons que si l'on fait l'hypothèse de roulement sans glissement, la vitesse linéaire est portée par \vec{s} .

Le vecteur « \vec{n} », directeur des ordonnées, est porté par l'essieu et tel que le troisième vecteur « \vec{a} », portant « z_M », soit orienté vers le haut. On peut aussi dire que le vecteur \vec{n} est dirigé selon « bâbord¹ » comme dans le cas 2D. Le trièdre $(\vec{s}, \vec{n}, \vec{a})$ est direct.

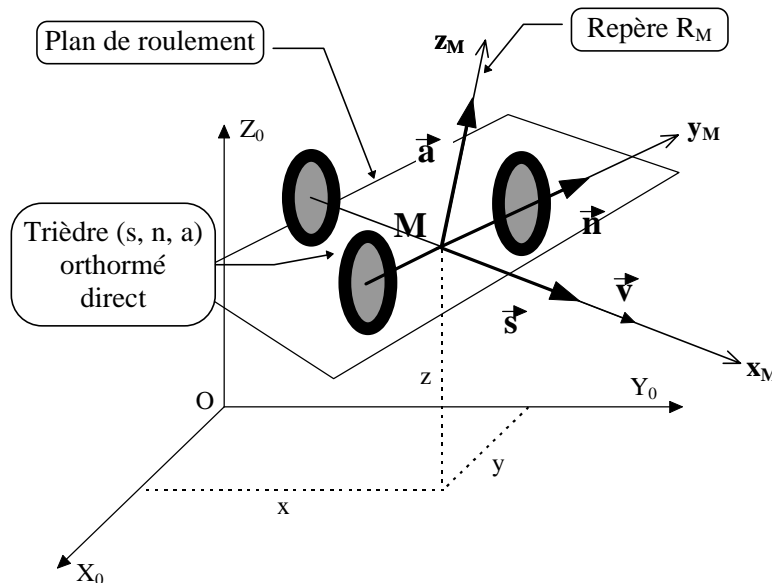


figure 4.2 : définition du repère R_M

Il faut noter que, comme nous avons fait le choix de définir le repère R_M à partir de la surface de roulement (qui elle-même définit le vecteur vitesse), R_M est (légèrement) variable par rapport au véhicule. Il dépend, entre autres, de la pression des pneus. Par exemple, si le pneu arrière de MELODY se dégonfle, R_M ne change pas, mais son orientation par rapport à la structure mécanique du robot est modifiée.

¹ Les termes marins « bâbord » et « tribord » sont définis par rapport à l'avant du bateau. Bâbord indique la gauche quand on regarde vers l'avant.

3.3 Le repère de SIREM

Le repère lié à SIREM, noté R_S , est le repère dans lequel sont définis les angles d'azimut et de site des balises (cf. figure 4.3). Son origine, notée S , est l'intersection de l'axe optique et de l'axe de rotation, supposés orthogonaux et concourants au centre optique.

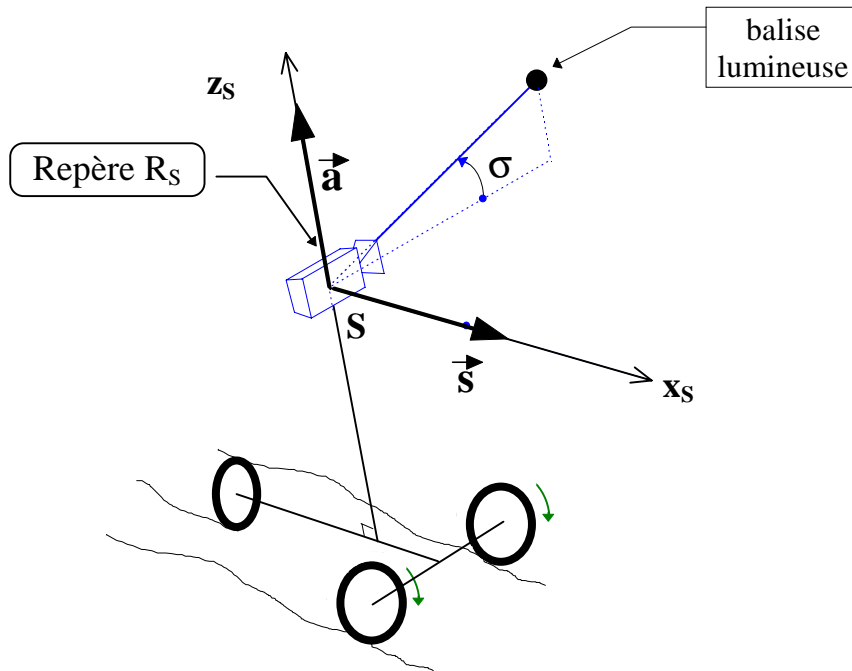


figure 4.3 : vue 3D du repère R_S

L'axe des altitudes est confondu avec l'axe de rotation de la caméra, comme présenté sur la figure 4.4. Enfin, l'axe des abscisses est défini par un point de référence du codeur qui mesure l'angle d'azimut (cf. figure 4.4). On choisit habituellement cet axe de telle sorte qu'il soit colinéaire à l'axe d'avance du véhicule. Ce repère est en adéquation avec la modélisation de SIREM, présentée au chapitre 1.

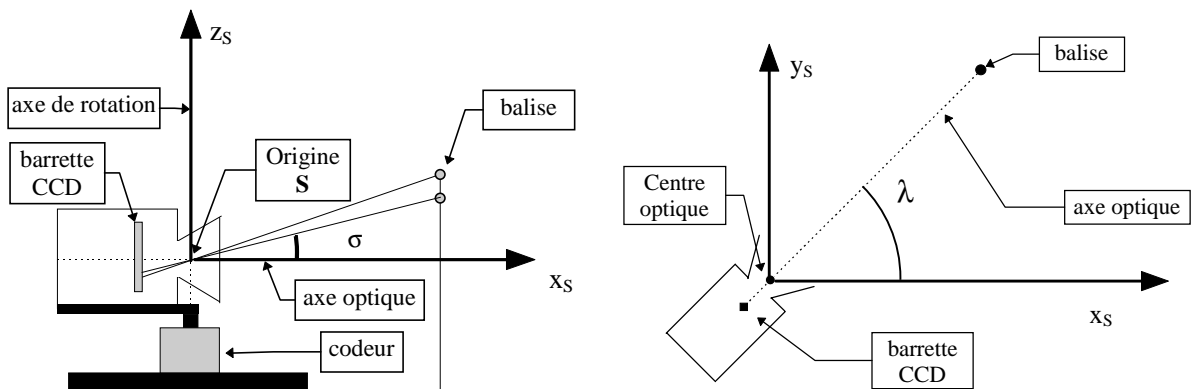


figure 4.4 : repère R_S pour un azimut nul et vue de dessus du repère R_S

4 REPRESENTATION DE L'ATTITUDE

4.1 Introduction

L'attitude ou l'orientation d'un solide dans l'espace peut être représentée de multiples façons. Les plus connues utilisent les cosinus directeurs, les angles d'Euler, les angles de lacet, tangage et roulis ou les quaternions [Vaganay, 93]. Nous allons proposer une représentation utilisant les angles de direction, déclivité et dévers orthogonal, très bien adaptée à notre problème. Par souci de concision, nous n'allons décrire que les trois modes de représentation que nous utiliserons par la suite : les cosinus directeurs, les angles de lacet, tangage et roulis et enfin les angles de direction, déclivité et dévers orthogonal. Pour plus de détails sur les autres modes de représentation, le lecteur peut se reporter à [Dombre, Khalil, 88, Vaganay, 93]. Notamment, nous n'utiliserons pas les quaternions qui présentent l'avantage de ne pas avoir de singularité, au prix d'une redondance. Etant donné que les machines considérées sont des véhicules terrestres, les rotations sont limitées, sauf autour de « z ». Dans ce cadre, la représentation « direction, déclivité et dévers orthogonal » ne s'approche jamais de ses singularités.

4.2 Les cosinus directeurs

Cette représentation est en fait étroitement liée à la notion de matrice homogène, car l'orientation est ici définie par trois vecteurs unitaires orthonormés $(\vec{s}, \vec{n}, \vec{a})$ appelés *cosinus directeurs*. Les composantes des vecteurs de base $(\vec{s}, \vec{n}, \vec{a})$ du repère R_j exprimés dans le repère R_i définissent directement la matrice iA_j :

$${}^iA_j = \begin{bmatrix} {}^i s_x & {}^i n_x & {}^i a_x \\ {}^i s_y & {}^i n_y & {}^i a_y \\ {}^i s_z & {}^i n_z & {}^i a_z \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Il est à noter que trois composantes seulement sont indépendantes et donc suffisent à définir iA_j , mais, dans le cas général, il est difficile de les fixer à cause de singularités. Les cosinus directeurs nous serviront par la suite de paramètres intermédiaires dans les calculs.

4.3 Les angles de lacet, tangage et roulis

Nous présentons ici la représentation « lacet, tangage, roulis » car elle est couramment utilisée, mais aussi car elle nous servira à calculer la matrice homogène correspondant à la

représentation « direction, déclivité, dévers orthogonal ». Dans ce mode de représentation, l'orientation du repère R_j dans le repère R_i est obtenue après trois rotations successives autour des axes du repère courant. Ainsi, en fonction de l'ordre des rotations élémentaires appliquées, il existe **six** conventions qui conduisent à des représentations différentes [Le Corre, 93]. Par conséquent, dire que l'on utilise la convention « lacet, tangage, roulis » est insuffisant si l'on ne précise pas l'ordre des rotations. Afin de lever cette ambiguïté, nous adoptons la convention suivante :

« lacet, tangage, roulis » \Leftrightarrow « lacet, tangage, roulis » dans cet ordre.

Par ailleurs, les notions de lacet, tangage et roulis sont définies par rapport au sens d'avance de l'engin. Ainsi, selon notre convention (qui est d'ailleurs la plus commune en robotique mobile, car elle correspond à celle utilisée en marine) le mouvement se fait selon l'axe des abscisses ; le roulis est alors défini comme la rotation autour de cet axe².

4.3.1 Passage des angles de lacet, tangage, et roulis aux cosinus directeurs

Si L, T et R représentent respectivement le lacet, le tangage et le roulis, alors l'attitude homogène correspondant à la représentation « lacet, tangage, roulis » est donnée par le produit matriciel :

$${}^i A_j = \begin{bmatrix} \cos(L) & -\sin(L) & 0 \\ \sin(L) & \cos(L) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(T) & 0 & \sin(T) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(T) & 0 & \cos(T) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(R) & -\sin(R) \\ 0 & \sin(R) & \cos(R) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

soit :

$${}^i A_j = \begin{bmatrix} \cos(T).\cos(L) & \sin(T).\sin(R).\cos(L) - \cos(R).\sin(L) & \sin(T).\cos(R).\cos(L) + \sin(R).\sin(L) \\ \cos(T).\sin(L) & \sin(T).\sin(R).\sin(L) + \cos(R).\cos(L) & \sin(T).\cos(R).\sin(L) - \sin(R).\cos(L) \\ -\sin(T) & \cos(T).\sin(R) & \cos(T).\cos(R) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

4.3.2 Passage des cosinus directeurs aux angles de lacet, tangage et roulis

Connaissant une matrice ${}^i A_j$ du type de l'équation (4.2), le problème est de déterminer les angles L, T, R. En identifiant les équations (4.2) et (4.4), on obtient :

$$L = \text{atan2}(s_x, s_y) \quad (4.5)$$

L'équation (4.5) est singulière pour $s_x = s_y = 0$, soit un tangage de $\pi/2$ ou $-\pi/2$.

$$T = \arctan\left(\frac{-s_z}{\cos(L).s_x + \sin(L).s_y}\right) \quad (4.6)$$

² Cette convention est différente de celle fréquemment utilisée pour modéliser des robots manipulateurs [Dombre, Khalil, 88] : dans ce cas le roulis est défini autour de « z ».

Le tangage est donné par la fonction « arctan(y/x) » car, pour un engin terrestre, on a :

$$-\pi/2 < T < \pi/2 \tag{4.7}$$

$$R = \arctan\left(\frac{\sin(L).a_x - \cos(L).a_y}{-\sin(L).n_x + \cos(L).n_y}\right) \tag{4.8}$$

De même que pour le tangage, pour un engin terrestre, le roulis n'a de sens que si :

$$-\pi/2 < R < \pi/2 \tag{4.9}$$

4.4 Représentation de l'attitude avec les angles de direction, déclivité, dévers orthogonal

Dans la suite de ce document, ces trois paramètres « direction », « déclivité », « dévers orthogonal » seront notés respectivement « ψ », « dc », « dv ».

4.4.1 Définition des angles de direction, déclivité et dévers géométrique

La direction, la déclivité et le dévers sont des angles habituellement utilisés par les géomètres. Ils sont définis par rapport au nord géographique en ce qui concerne la direction, et par rapport à la gravité terrestre en ce qui concerne la déclivité et le dévers.

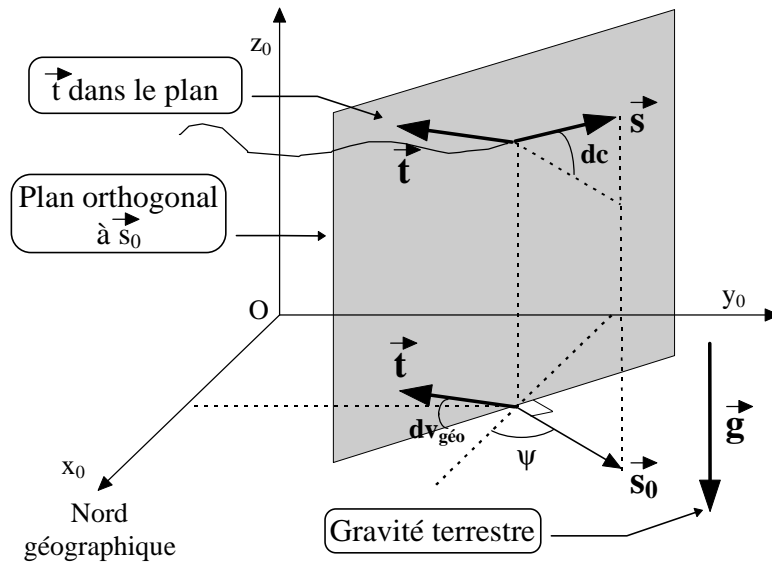


figure 4.5 : direction, déclivité et dévers géométrique

La déclivité est l'angle que fait le vecteur « \vec{s} » avec l'horizontale, de signe positif quand \vec{s} est dirigé vers le haut. Plus mathématiquement, « dc » est l'angle entre \vec{s} et « \vec{s}_0 », projection de \vec{s} sur le plan horizontal (cf. figure 4.5), et son signe est opposé à celui du produit scalaire $\vec{s} \cdot \vec{g}$. On a :

$$-\pi/2 < dc < \pi/2 \tag{4.10}$$

Pour définir le dévers géométrique « $dv_{géo}$ », il faut considérer une coupe verticale de la chaussée perpendiculaire à \vec{s}_0 . La trace de la chaussée dans ce plan est caractérisée par un vecteur « \vec{t} » dirigé selon tribord (cf. figure 4.5). Le dévers géométrique est l'angle que fait \vec{t} avec l'horizontale, de signe positif quand ce vecteur est dirigé vers le haut. Il est à noter que les vecteurs \vec{t} et \vec{s} **ne sont pas orthogonaux** quand la déclivité est non nulle.

Enfin, la direction est l'angle que fait \vec{s} avec le nord géographique, c'est-à-dire l'angle entre \vec{x}_0 et \vec{s}_0 .

4.4.2 Définition de l'angle de dévers orthogonal

Nous recherchons une paramétrisation telle que deux paramètres soient directement mesurés par les inclinomètres. Si un inclinomètre est orienté parallèlement à l'axe d'avance alors il mesure directement la déclivité. Par contre, un deuxième inclinomètre orthogonal à cet axe d'avance ne mesure pas le dévers géométrique. En effet, dans le cas général, son plan dans lequel bouge le pendule, n'est pas confondu avec le plan définissant le dévers géométrique de la figure 4.5. Nous proposons donc de définir une nouvelle paramétrisation telle que l'angle mesuré par l'inclinomètre transversal soit l'un des paramètres, et l'on choisit d'appeler cet angle « **dévers orthogonal** » car, à la différence du dévers géométrique, il est défini par un vecteur toujours orthogonal à \vec{s} .

Considérons un vecteur \vec{d} tel que :

$$\vec{d} = -\vec{n} \tag{4.11}$$

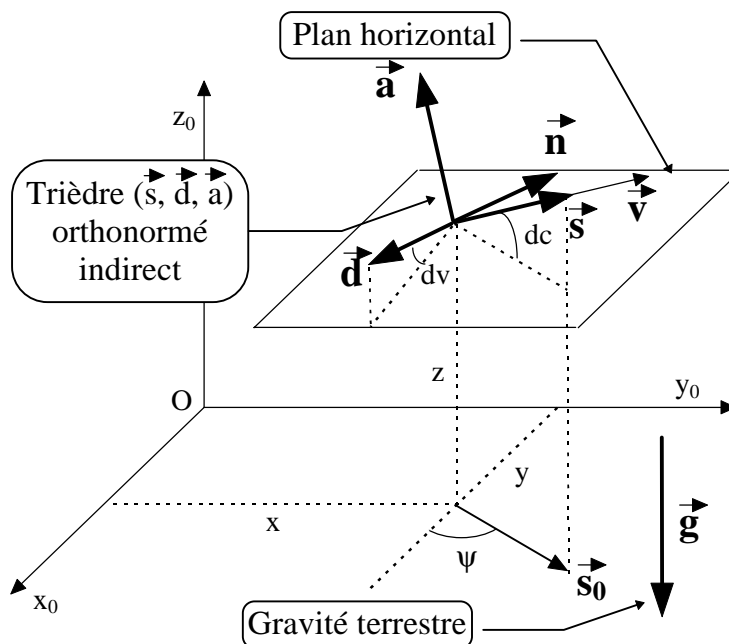


figure 4.6 : direction, déclivité et dévers orthogonal

Le dévers orthogonal est l'angle que fait le vecteur \vec{d} de la figure 4.6 avec l'horizontale, de signe positif quand ce vecteur est dirigé vers le haut. C'est cet angle que mesure un inclinomètre si le plan dans lequel se trouve son pendule est le plan (\vec{d}, \vec{a}) et si, quand \vec{d} est horizontal, la mesure est nulle.

Le vecteur \vec{d} est tel que le trièdre $(\vec{s}, \vec{d}, \vec{a})$ est indirect, autrement dit \vec{d} est dirigé selon tribord ; cette convention a été choisie pour rester proche de la solution utilisée par les géomètres. Comme pour la déclivité, on a :

$$-\pi/2 < dv < \pi/2 \quad (4.12)$$

Notre définition de la « direction » (ou cap) diffère aussi légèrement de celle utilisée par les géomètres : nous n'imposons aucune contrainte à l'axe des abscisses du repère local R_0 ³. Ainsi, selon notre convention, la direction n'est pas forcément définie par rapport au nord géographique.

4.4.3 Passage des angles de direction, déclivité et dévers orthogonal aux cosinus directeurs

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer la rotation homogène 0A_S , c'est-à-dire les cosinus directeurs $(\vec{s}, \vec{n}, \vec{a})$ correspondant à un triplet (ψ, dc, dv) donné.

La démonstration proposée ici consiste à exprimer les angles (L, T, R) en fonction de (ψ, dc, dv) , puis à remplacer (L, T, R) par ces expressions dans l'équation (4.4).

D'après la figure 4.6, on obtient directement les composantes du vecteur \vec{s} :

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} \cos(dc) \cdot \cos(\psi) \\ \cos(dc) \cdot \sin(\psi) \\ \sin(dc) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Or, d'après l'équation (4.4), \vec{s} a aussi pour expression :

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} \cos(T) \cdot \cos(L) \\ \cos(T) \cdot \sin(L) \\ -\sin(T) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

En identifiant les expressions (4.13) et (4.14), on obtient la relation entre le lacet et la direction :

$L = \psi$	(4.15)
------------	--------

³ La seule hypothèse formulée relativement à R_0 (cf. paragraphe 3.1) est qu'il ait son axe « z_0 » colinéaire à la gravité terrestre et de sens opposé.

En identifiant de nouveau les expressions (4.13) et (4.14) et en utilisant la relation (4.7), on obtient la relation entre le tangage et la déclivité :

$$T = -dc \quad (4.16)$$

On peut remarquer l'inversion de signe entre le tangage et la déclivité. A se sujet, un engin montant une côte a un tangage négatif, ce qui n'est pas naturel. La déclivité, quant à elle, est logiquement positive.

Il reste maintenant à trouver la relation entre le roulis et le dévers. D'après l'équation (4.4), \vec{n} a pour coordonnées :

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} \sin(T).\sin(R).\cos(L) - \cos(R).\sin(L) \\ \sin(T).\sin(R).\sin(L) + \cos(R).\cos(L) \\ \cos(T).\sin(R) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

En appliquant la relation (4.11) et en remplaçant T et L par les expressions (4.15) et (4.16), on obtient :

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} \sin(dc).\sin(R).\cos(\psi) + \cos(R).\sin(\psi) \\ \sin(dc).\sin(R).\sin(\psi) - \cos(R).\cos(\psi) \\ -\cos(dc).\sin(R) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Or, d'après la définition du vecteur \vec{d} (cf. figure 4.6), sa composante « d_z » selon l'axe Z_0 , est égale au sinus du dévers. On a donc :

$$d_z = \sin(dv) \quad (4.19)$$

En identifiant (4.18) et (4.19), on a :

$$\sin(dv) = -\cos(dc).\sin(R) \quad (4.20)$$

En utilisant l'équation (4.9), on obtient :

$$R = -\arcsin\left(\frac{\sin(dv)}{\cos(dc)}\right) \quad (4.21)$$

Il est à noter encore une inversion de signe.

Lorsque la déclivité est nulle, le roulis et le dévers orthogonal sont identiques, au signe près. On obtient le même résultat quand la déclivité est faible, mais cette fois au premier ordre. Par conséquent, si l'on utilise la représentation « lacet, tangage et roulis » en supposant que le tangage et le roulis sont mesurés par les inclinomètres, ceci est valable au premier ordre pour un tangage faible (quelques degrés maximum). Compte tenu du niveau de précision que nous recherchons, et comme des pentes de plusieurs degrés sont tout à fait réalistes, nous préconisons l'utilisation de la représentation (ψ, dc, dv) .

On retrouve une singularité analogue à celle de la représentation « lacet, tangage, roulis » quand la déclivité a pour valeur $\{\pi/2, -\pi/2\}$, puisque dans ce cas il n'est pas possible de déterminer « R ».

Enfin, on remplace L, T, et R par les expressions (4.15), (4.16) et (4.21) dans l'expression (4.4) pour obtenir :

$${}^0A_s = \begin{bmatrix} \cos(\psi)\cos(dc) & n_x & a_x \\ \sin(\psi)\cos(dc) & n_y & a_y \\ \sin(dc) & -\sin(dv) & \chi \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

où :

$$\chi = \cos(dc) \sqrt{\frac{\cos(dc)^2 - \sin(dv)^2}{\cos(dc)^2}} \quad (4.23)$$

Comme $-\pi/2 < dc < \pi/2$, alors $\cos(dc) > 0$ et donc :

$$\chi = \sqrt{\cos(dc)^2 - \sin(dv)^2} \quad (4.24)$$

$$n_x = -\frac{\sin(\psi).\chi - \cos(\psi).\sin(dc)\sin(dv)}{\cos(dc)} \quad (4.25)$$

$$n_y = \frac{\cos(\psi).\chi + \sin(\psi).\sin(dc)\sin(dv)}{\cos(dc)} \quad (4.26)$$

$$a_x = -\frac{\sin(\psi).\sin(dv) + \cos(\psi).\sin(dc).\chi}{\cos(dc)} \quad (4.27)$$

$$a_y = -\frac{-\cos(\psi).\sin(dv) + \sin(\psi).\sin(dc).\chi}{\cos(dc)} \quad (4.28)$$

Comme les angles (ψ, dc, dv) permettent de définir une matrice d'attitude homogène, ils sont suffisants pour représenter l'attitude d'un solide dans l'espace.

Remarques

a) χ est défini pour toutes valeurs de « dc » et « dv » différentes de $\{\pi/2, -\pi/2\}$.

Preuve :

d'après (4.21) : $\sin(dv) = -\sin(R).\cos(dc)$

donc, $\cos(dc)^2 - \sin(dv)^2 = \cos(dc)^2.(1 - \sin(R)^2)$ est bien positif ou nul.

Par conséquent, « $\cos(dc)^2 - \sin(dv)^2$ » est positif et χ est bien défini pour toutes valeurs de « dc » et « dv » différentes de $\{\pi/2, -\pi/2\}$.

b) Relation de contrainte entre déclivité et dévers orthogonal

En utilisant le fait que $-\pi/2 < dc < \pi/2$, on montre que :

$$|dc| + |dv| < \pi / 2 \quad (4.29)$$

Il existe donc une inégalité de contrainte entre « dc » et « dv », qui n'existe pas dans le cas des angles « lacet, tangage, roulis ». Ainsi, par exemple quand « dc » tend vers $\pi/2$, alors « dv » tend vers 0 et réciproquement.

4.4.4 Passage des cosinus directeurs aux angles de direction, déclivité et dévers orthogonal

Connaissant une matrice 0A_S du type de l'équation (4.2), le problème est de déterminer les angles ψ , dc, dv. On calcule d'abord les angles R, T, L grâce aux équations (4.5), (4.6) et (4.8).

Les angles de direction, déclivité et dévers orthogonal sont alors donnés par :

$$\psi = L \quad (4.30)$$

$$dc = -T \quad (4.31)$$

$$dv = -\arcsin(\sin(R) \cdot \cos(T)) \quad (4.32)$$

Ces relations sont toujours valables, sauf pour la singularité $s_x = s_y = 0$.

4.4.5 Singularité de la représentation par le angles de direction, déclivité, et dévers orthogonal

La représentation de l'attitude par les angles de direction, déclivité et dévers orthogonal est singulière pour $s_x = s_y = 0$, c'est-à-dire pour un vecteur vitesse vertical (colinéaire à la gravité). Ce cas n'est évidemment pas réaliste pour un véhicule réel se déplaçant sur terre. Par conséquent, comme les conditions normales de fonctionnement ne se situent pas au voisinage de la singularité, cette représentation est bien adaptée au problème qui nous concerne. De plus, elle est minimale, car elle n'utilise que trois paramètres.

5 REPRESENTATION DE LA POSE 3D

Nous nous proposons maintenant de choisir 6 paramètres indépendants permettant de décrire parfaitement un solide dans l'espace.

L'intérêt immédiat de l'utilisation des angles de direction, déclivité et dévers orthogonal est que, sur MELODY, les deux derniers angles sont directement mesurés par les inclinomètres ; il n'y a plus que l'angle de direction à estimer.

Il reste donc à déterminer 3 paramètres de position. Les coordonnées les plus connues sont les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. Nous proposons d'utiliser les coordonnées cartésiennes car elle conduisent à une représentation 3D proche du formalisme utilisé en 2D.

La pose 3D est donc représentée par le vecteur :

$$X = [x \ y \ z \ \psi \ dc \ dv]^t \quad (4.33)$$

Dans la suite de ce document, le paramètre « z » sera appelé « altitude » par abus de langage⁴, car il est défini selon un axe colinéaire à la gravité terrestre.

Ainsi, le vecteur X définit complètement le repère R_S dans R_0 : connaissant X, on peut déterminer la matrice homogène 0T_S de la façon suivante :

$${}^0T_S = \begin{bmatrix} & & x \\ & {}^0A_S & y \\ & & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

où 0A_S est donnée par l'équation (4.22).

6 SIMULATION DE MELODY AVEC SES CAPTEURS SE DEPLAÇANT SUR UNE SURFACE GAUCHE

6.1 Introduction

On se propose d'étudier en simulation le système constitué de SIREM, de l'odomètre et des inclinomètres. On souhaite ainsi savoir si le choix et la configuration des capteurs sont pertinents. En fonction des bruits qui affectent les mesures, on cherche enfin à valider différents filtres.

⁴ Normalement, l'altitude est définie par rapport au niveau de la mer.

L'intérêt fondamental réside dans le fait qu'en simulation, on connaît la trajectoire réellement suivie par le repère R_S que l'on cherche à localiser. Ainsi, il est possible pour chaque estimation de calculer l'erreur commise. La simulation permet de plus de générer facilement des trajectoires (chemins, profils de vitesse). Cette facilité par rapport à une expérimentation réelle peut être mise à profit pour étudier des trajectoires particulières, comme déjà fait en 2D (cercle passant par les trois balises, droites passant par les balises, etc.). En effet, en conditions réelles, il n'est pas forcément possible d'obtenir les trajectoires que l'on désire tester.

Les différentes étapes de la simulation peuvent être résumées de la façon suivante :

- créer un chemin dans l'espace (axe en plan, profil en long, profil en travers).
- imposer un profil de vitesse sur ce chemin.
- simuler le robot MELODY et ses capteurs se déplaçant sur cette trajectoire.
- en cours de déplacement, mémoriser les données de ces capteurs.
- étudier un estimateur d'état après avoir bruité ces données.

Les données obtenues à l'aide du banc de simulation ont un format identique à celles récupérées lors d'un essai réel. Ainsi, un filtre mis au point en simulation est capable, sous hypothèse que le modèle de simulation soit proche du réel, d'utiliser en entrée les mesures réelles des capteurs.

6.2 Réalisation informatique

La simulation informatique a été réalisée en langage « MATLAB 4.2.c » et utilise l'interface graphique « Simulink 1.3 », sous l'environnement « SimuCirc ». SimuCirc est un logiciel conçu par le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (L.C.P.C.), permettant de simuler sur ordinateur une application de type CIRC (*Computer Integrated Road Construction* ou *construction des routes assistée par ordinateur*) pour les phases de répannage de chaussées. Grâce aux facilités incluses dans ce logiciel, la simulation de notre système est rendue plus facile.

6.2.1 SimuCirc

Fondamentalement, SimuCirc est un logiciel qui utilise en entrée des données numériques de projets de CAO routière (Micropiste, Macao...), modélise et simule des machines de chantier en déplacement [Bétaille, Peyret, 97]. On peut ainsi tester différentes

lois de commande utilisant les données fournies par différents systèmes de localisation, pour contrôler le véhicule et ses outils. Les fonctions principales de SimuCirc peuvent être résumées de la façon suivante :

- construire des modèles adaptés à partir des données de CAO.
- contenir des modèles de machines.
- contenir des modèles externes de systèmes de localisation.
- simuler le déplacement de la machine par rapport au projet routier.
- présenter une interface graphique à l'utilisateur.

Ainsi, SimuCirc offre un cadre de simulation, dans lequel le robot MELODY et ses capteurs peuvent être modélisés.

6.2.2 Génération de trajectoire

Une trajectoire est composée d'un chemin, décrivant la géométrie du parcours, et d'une loi horaire précisant les dynamiques de l'engin (vitesses et accélérations) le long du chemin.

6.2.2.1 Création d'un chemin

Une route est décrite dans l'espace par une « *ligne rouge* », intersection des deux chaussées, sur laquelle s'appuient deux nappes représentant les chaussées.

Le « *profil en travers* » est défini par des coupes de la route par des plans verticaux (cf. figure 4.7). On y trouve la valeur de l'angle de dévers (*dévers géométrique*, différent du *dévers orthogonal* en présence de déclivité) et des informations relatives à la largeur de la chaussée, au nombre de couches, à leurs épaisseurs, au terre-plein central, etc. Pour nos besoins de simulation, la connaissance du dévers en fonction de l'abscisse curviligne sera suffisante pour définir un profil en travers.

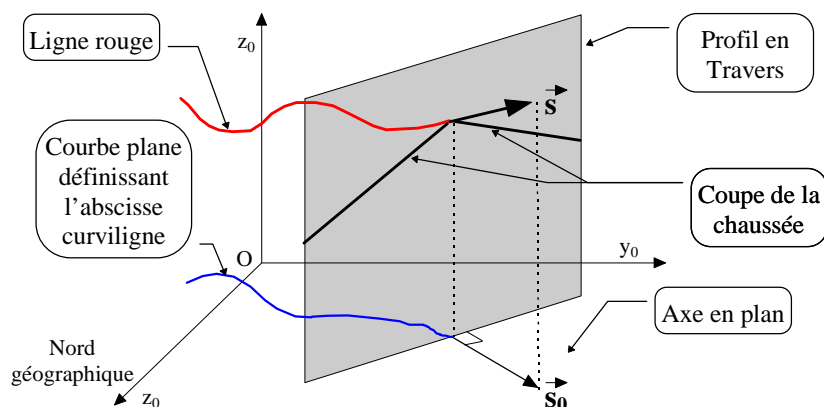


figure 4.7 : caractérisation d'une route dans l'espace

La courbe obtenue par projection de la ligne rouge dans le plan (O, X_0, Y_0) , s'appelle « *axe en plan* » ou « *vue en plan* ». On appelle « *abscisse curviligne* » (notée « *s* » par la suite) la longueur le long de cette courbe plane (figure 4.7), et non le long de la ligne rouge. Le « *profil en long* » est décrit par la fonction donnant l'altitude en fonction de l'abscisse curviligne ($z = f(s)$).

Ainsi, un chemin décrivant une route est décrit par un axe en plan, un profil en long et un profil en travers. Un chemin provient en général de la CAO routière. Les éléments géométriques qui le décrivent sont, en général, des droites, des arcs de cercle, des arcs de paraboles et des clothoïdes. Après extraction par SimuCirc des informations nécessaires à la simulation, un chemin se retrouve décrit par un nombre assez réduit de matrices qui indiquent, par exemple, qu'entre les abscisses 1789 et 1997, le profil en long est décrit par un cercle de centre $(27 ; 03 ; 69)$ et de rayon 421. Pour des trajectoires assez simples, le chemin peut être créé à la main, sans moyen de CAO, à condition de respecter les règles de raccordement entre les éléments géométriques.

6.2.2.2 Génération de la loi horaire

La génération de la loi horaire est réalisée quand la fonction $s = f(t)$ est définie. Le profil de vitesse que nous utiliserons le plus sera celui correspondant à une vitesse constante (typiquement 10 cm/s). Il est possible d'utiliser des interpolateurs polynomiaux de degré 5 produisant une accélération et une décélération progressives.

Dans la version actuelle de la maquette de simulation, comme les informations relatives aux accélérations ne sont pas disponibles, les profils à vitesse variable ont peu d'intérêt.

6.2.3 Intégration de la simulation de MELODY dans SimuCirc

Après la génération d'une trajectoire, au cours du déplacement simulé du robot MELODY, les mesures exactes des capteurs sont mémorisées.

On sauvegarde en mémoire de façon synchrone à 20 Hz :

- la variation angulaire de la roue droite (en impulsions codeur),
- la variation angulaire de la roue gauche,
- la mesure de la déclivité fournie par un inclinomètre,
- la mesure du dévers orthogonal fournie par l'autre inclinomètre,
- la position et l'attitude du repère R_S .

De façon asynchrone ($\approx 1/6$ Hz pour chaque balise) :

- la mesure de l'angle d'azimut de SIREM,
- la mesure de l'angle de site.

Parmi les fonctionnalités offertes par SimuCirc autres que la gestion des trajectoires et l'interface graphique, nous en retenons trois principales présentées sur la figure 4.8 : le contrôle de simulation, l'animation graphique et la génération de la position et de l'attitude de R_S en fonction de l'abscisse curviligne.

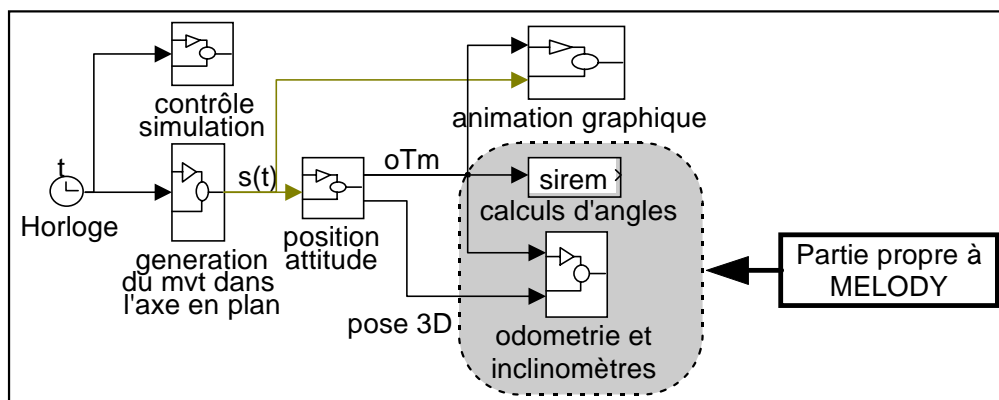


figure 4.8 : schéma Simulink modélisant MELODY et ses capteurs dans SimuCirc

Les modules « génération du mouvement dans l'axe en plan », « SIREM » et « odométrie et inclinomètres » sont propres à la simulation de MELODY et constituent la contribution de l'IRCyN à SimuCirc.

Le capteur SIREM est modélisé de façon assez simple. Connaissant la position du mobile et celles des balises, on en déduit les écarts azimutaux existant entre deux relevés. La vitesse de rotation de la caméra étant connue, il est alors possible de déterminer la durée séparant les mesures des balises B_3 et B_2 de celle de B_1 . En émettant l'hypothèse simplificatrice que l'instant de mesure de la balise B_1 est périodique (de l'ordre de 6 secondes), il est donc possible de calculer à l'avance tous les instants de mesure des balises. Cette hypothèse est assez réaliste compte tenu des dynamiques faibles. Ainsi, au cours de la simulation, à chaque fois que le temps courant dépasse les instants de mesures, les angles d'azimut et de site correspondant à la position courante de R_S sont mémorisés. Il est à noter que les mesures de SIREM sont ainsi entièrement asynchrones par rapport aux mesures odométriques et inclinométriques.

Les distances élémentaires parcourues par les roues sur la surface gauche entre deux instants d'échantillonnage sont calculées en discrétisant le déplacement avec un pas

« suffisamment fin ». Cette fréquence de discrétisation correspond à la fréquence d'échantillonnage de la simulation, laissée au choix de l'utilisateur. Cette fréquence doit être au minimum égale à la fréquence odométrique multipliée par 10. A l'inverse, si elle devient trop grande, la durée de simulation devient très grande, et il y a risque d'accumulation d'erreurs numériques.

6.3 Une trajectoire de référence

6.3.1 Chemin

Parmi les chemins que nous avons utilisés, nous proposons de considérer le suivant, qui sera dit de « chemin de référence ». Sa vue en plan, son profil en long et son profil en travers sont présentés sur les figures suivantes (où « s » est l'abscisse curviligne dans l'axe en plan).

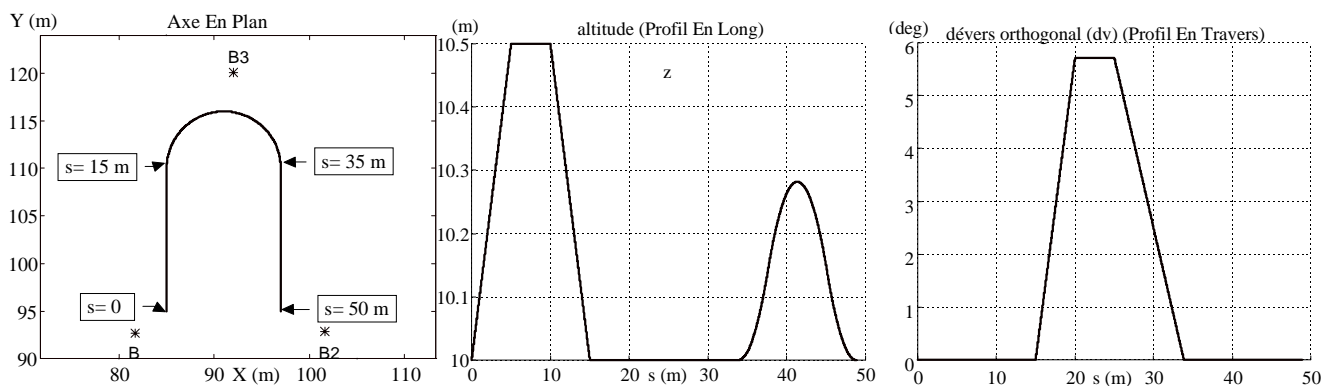


figure 4.9 : chemin de référence

L'axe en plan est constitué de deux droites reliées par un demi cercle. Pendant les parties linéaires le dévers reste nul et seule l'altitude varie selon le profil de la figure 4.9. Pendant la partie circulaire le dévers augmente, reste constant à 5,5 degrés pour décroître ensuite jusqu'à 0, à l'entrée de la dernière droite (figure 4.9).

Ce chemin contient des points anguleux (dus aux raccordements des droites) provoquant des discontinuités de déclivité et de dévers qui engendreront de légers transitoires par la suite.

De ces courbes on déduit l'évolution de x, y, ψ et dc en fonction de l'abscisse curviligne (cf. figure 4.10).

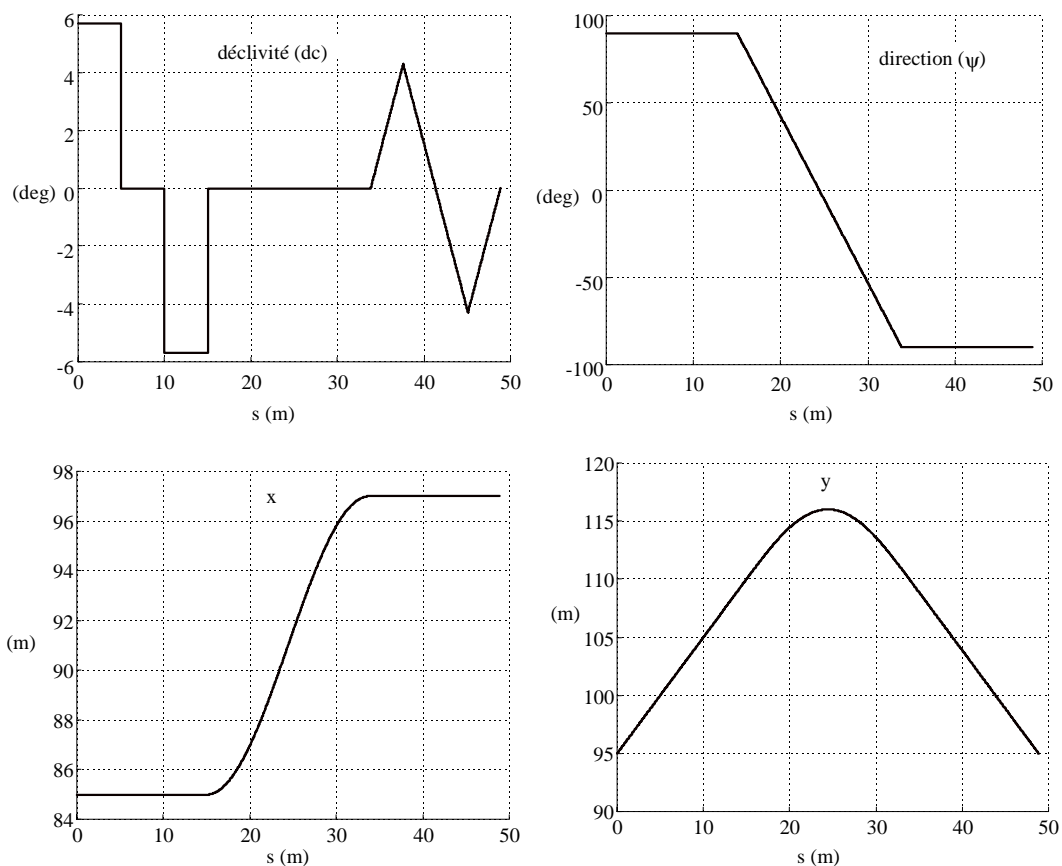


figure 4.10 : dc , ψ , x et y en fonction de l'abscisse curviligne

6.3.2 Remarque sur les vitesses linéaire et angulaire du mobile

La vitesse est imposée dans l'axe en plan. Ainsi, les vitesses linéaire et angulaire dans l'espace peuvent être légèrement différentes. Par exemple, considérons le chemin de référence (paragraphe 6.3.1) à vitesse constante.

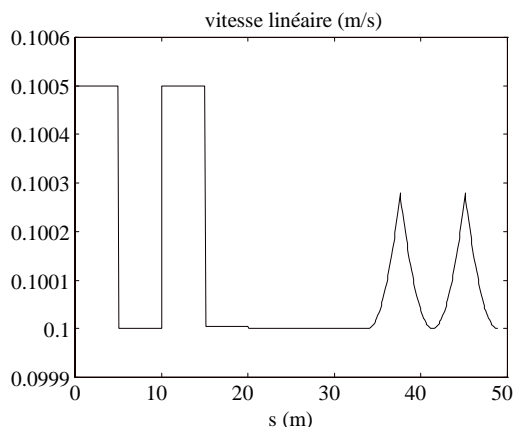


figure 4.11 : vitesse linéaire de l'engin dans l'espace

Les variations de vitesse linéaire sont dues aux variations de déclivité : c'est la projection de la vitesse sur le plan horizontale qui est constante.

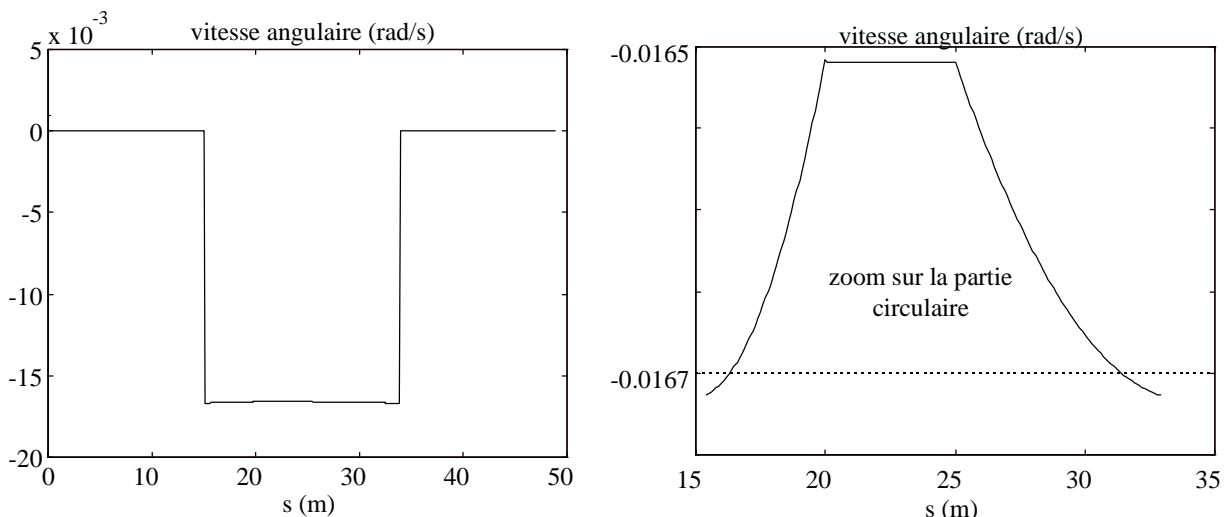


figure 4.12 : vitesse angulaire de l'engin dans l'espace

Sur la partie circulaire, la vitesse de rotation n'est pas constante à cause du dévers.

Il apparaît donc que les variations de déclivité et de dévers ont peu d'incidence sur la vitesse réelle du mobile. Ceci devient encore plus négligeable si l'on considère le bruit qui affecte les mesures odométriques, comme indiqué sur la figure 4.13.

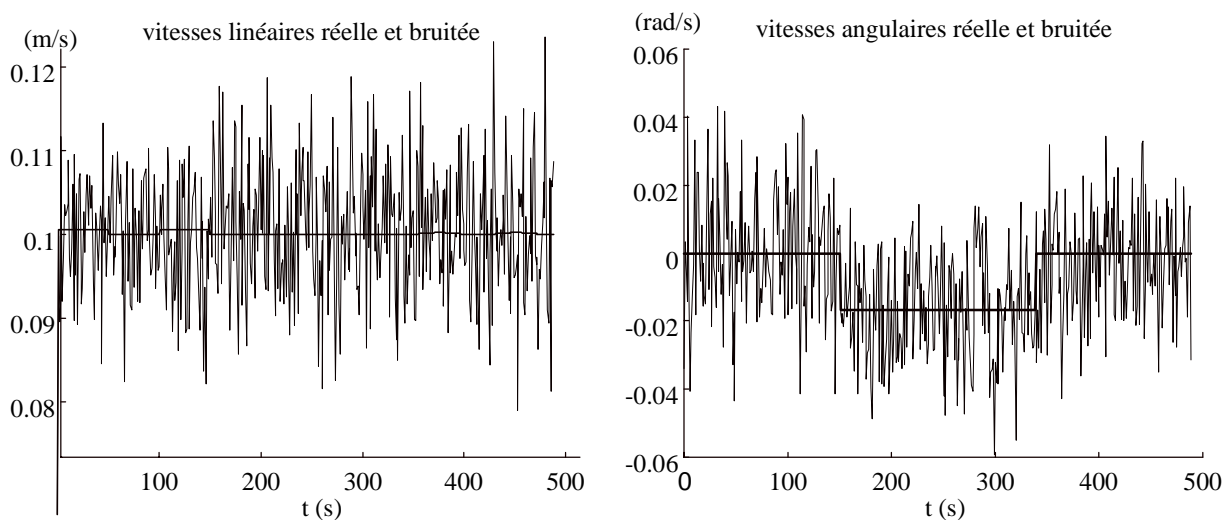


figure 4.13 : vitesses bruitées mesurées par l'odomètre

7 CONCLUSION

Ce chapitre a été consacré à une représentation de la pose de SIREM adaptée à l'utilisation d'inclinomètres, généralisant celle de l'algorithme 2D : la position est représentée sous forme cartésienne et l'attitude utilise des angles de direction, déclivité et dévers orthogonal.

Cette paramétrisation est minimale car elle n'utilise que 6 paramètres. En outre, pour un véhicule terrestre, sa singularité n'est jamais rencontrée.

Par ailleurs, elle présente l'avantage que la déclivité et le dévers orthogonal sont directement mesurés par deux inclinomètres, si l'un est orienté de façon colinéaire à l'axe d'avance du véhicule, et l'autre orthogonal à cet axe et parallèle à la surface de roulement. Cette nouvelle représentation, nous l'avons dit, permet de simplifier la conception de l'algorithme de localisation qui est présenté au chapitre suivant.

Enfin, la maquette de simulation permet de modéliser MELODY et ses capteurs se déplaçant sur une surface gauche parfaitement connue. Cette maquette a été intégrée dans le logiciel SimuCirc dans le cadre de la collaboration entre l'IRCyN et le L.C.P.C.

CHAPITRE 5

ODOMÉTRIE 3D AVEC DEUX INCLINOMÈTRES

RECALÉE PAR SIREM :

ETUDE D'UN SYSTÈME SIMPLIFIÉ EN SIMULATION

Résumé du chapitre 5

Grâce à la représentation de l'attitude avec les angles de « direction, déclivité et dévers orthogonal » deux angles sont directement mesurés par les inclinomètres, si l'on suppose les accélérations négligeables. Ce chapitre présente alors des équations odométriques 3D itératives sur seulement 4 paramètres : (x, y, z) et l'angle de direction. En outre, ces équations sont très simples, ce qui facilite la réalisation de filtres de Kalman.

Sur la trajectoire de simulation de référence, on étudie ensuite les effets des bruits des différents capteurs sur la localisation à l'estime pure. Si l'inclinomètre de déclivité est parfaitement aligné sur l'axe d'avance de l'engin, il apparaît que la dérive en altitude est assez faible.

On présente ensuite les relations qui existent entre les angles de SIREM et la pose 3D choisie ; cette relation est nécessaire à la formulation d'un filtre de Kalman.

Les deux derniers paragraphes du chapitre sont dédiés à la réalisation et à l'étude de deux filtres de Kalman étendus sur un système simplifié pour lequel les repères de SIREM et de l'engin sont confondus, et pour lequel on suppose les inclinomètres parfaitement alignés avec les axes des repères. Grâce à ces formalismes, les erreurs de la localisation à l'estime sont immédiatement recalées à chaque nouvelle mesure de SIREM, selon le principe de l'algorithme 2D.

Une première approche conduit à un filtre ayant un vecteur d'état à 6 éléments. Dans cette formulation, la déclivité et le dévers orthogonal font partie du vecteur d'état. Au regard des simulations, il apparaît qu'un filtrage convenable de type passe bas des mesures des inclinomètres permet d'augmenter sensiblement la qualité de l'estimation de l'altitude.

Un deuxième raisonnement, considérant les mesures des inclinomètres comme faisant partie de l'entrée du filtre, permet d'aboutir à un filtre de Kalman à 4 éléments et à bruits corrélés, puisque les bruits de mesure des inclinomètres interviennent dans les étapes de prédiction et d'estimation.

Les performances des deux filtres sont les mêmes, mais le filtre à 4 éléments a une exécution deux fois et demi plus rapide que le filtre à 6 éléments.

On aboutit donc dans ce chapitre à la forme finale de l'estimateur de position et d'attitude que nous proposons d'implanter sur MELODY. Il s'agit du filtre à 4 éléments, à l'entrée duquel les mesures des inclinomètres sont filtrées de façon analogique. L'exécution en temps réel du processus de localisation est donc très rapide.

Odométrie 3D avec deux inclinomètres recalée par SIREM

Etude d'un système simplifié en simulation

1 INTRODUCTION ET SIMPLIFICATIONS

Ce chapitre présente une technique de localisation à l'estime 3D, utilisant un odomètre et deux inclinomètres. Comme pour l'algorithme 2D, la dérive de cette méthode est recalée en utilisant les mesures de SIREM, une par une et dès qu'elles sont disponibles. L'angle de site de SIREM, qui n'était pas utilisé en 2D, va donc être mis à profit pour corriger l'estimation de l'altitude.

Afin d'avoir une démarche plus pédagogique, on propose d'étudier dans ce chapitre un système simplifié pour lequel $R_S = R_M$, c'est-à-dire que les repères de MELODY et de SIREM sont confondus. En particulier, on suppose que le point S origine de R_S est confondu avec le milieu de l'essieu. Cette hypothèse simplificatrice permet de s'affranchir du problème lié à la matrice de passage entre les deux repères. En outre, on suppose que les inclinomètres sont parfaitement colinéaires aux axes (S,x) et (S,y). Ainsi, ils mesurent directement la déclivité et le dévers orthogonal. Le repère dont on détermine, de manière récurrente, la position et l'orientation, est le repère R_S . Compte tenu de ces hypothèses, MELODY peut être représenté, avec ses capteurs, comme sur la figure 5.1.

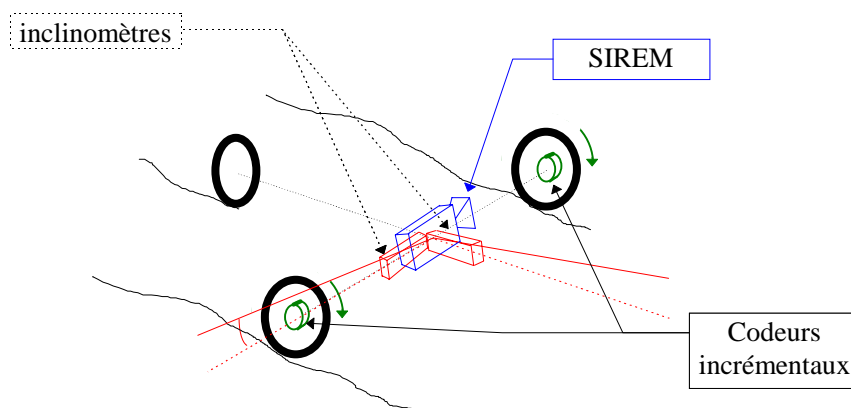


figure 5.1 : configuration des capteurs sur MELODY pour le système simplifié

La première partie du chapitre est dédiée à la mise en équations et à l'étude de l'odométrie 3D avec deux inclinomètres, notamment en présence de bruits sur les capteurs. L'hybridation de cette technique avec SIREM est ensuite étudiée à travers un formalisme de Kalman. Deux filtres sont proposés et comparés en simulation.

2 ODOMETRIE 3D AVEC DEUX INCLINOMETRES

Le déplacement à l'estime est le cœur de la modélisation sur laquelle s'appuie la localisation par filtrage de Kalman. Nous allons proposer dans ce paragraphe un modèle de déplacement dans l'espace, avec des codeurs montés sur deux roues et deux inclinomètres disposés de telle sorte que l'un mesure la déclivité et l'autre le dévers orthogonal. Pour faire de l'estime 3D, la configuration de capteurs habituelle utilise trois gyromètres et trois accéléromètres, avec éventuellement des codeurs, mais qui ne mesurent que la vitesse linéaire [Fuke, Krotkov, 96] ou bien l'accélération (après filtrage numérique [Vaganay, 93]). Notre solution en revanche n'utilise que **4** capteurs¹. Lorsque la surface de roulement est « suffisamment » régulière, l'odométrie est envisageable et, dans le cas particulier où l'équation de cette surface est connue, on trouve dans [Kim, Lee, Kim, 96] une technique odométrique n'utilisant que deux codeurs.

2.1 Hypothèses

Le formalisme que nous allons proposer repose sur les hypothèses suivantes.

Hypothèses sur l'odométrie :

- l'odométrie est réalisée par mesure de vitesse de deux roues montées sur le même essieu (codeurs incrémentaux ou tachymètres),
- il n'y a pas de glissement des roues : ni patinage (glissement longitudinal), ni dérapage (glissement transversal),
- les roues sont rigides et infiniment fines, de telle sorte que les contacts roue / sol puissent être supposés ponctuels (les rayons des roues et la voie sont alors constants et parfaitement connus).

¹ De nombreux travaux de recherche concernent la localisation 3D sur des surfaces accidentées (exploration planétaire par exemple) : dans ce cadre, il est vrai que l'odométrie est difficilement réalisable.

Hypothèses sur les deux inclinomètres :

- un inclinomètre mesure la déclivité. Ceci implique qu'il est parfaitement colinéaire à l'axe des abscisses de l'odomètre (pas d'offset),
- l'autre inclinomètre mesure le dévers orthogonal. Il doit être alors parfaitement colinéaire à l'axe des ordonnées de l'odomètre (pas d'offset). De plus, par rapport au sens de cet axe, il est de signe opposé pour respecter la convention du paragraphe 4.4.2 du chapitre 4,
- la sensibilité transversale² des inclinomètres est nulle,
- les accélérations sont faibles ; leurs effets sur les mesures inclinométriques seront négligés³.

2.2 Problème

On considère la paramétrisation 3D utilisant les 6 paramètres « x, y, z, ψ , dc et dv ». Comme la déclivité « dc » et le dévers orthogonal « dv » sont mesurés directement par les inclinomètres, il ne reste plus qu'à déterminer les 4 paramètres (x, y, z, ψ) de façon récurrente connaissant la pose de départ (x_0, y_0, z_0, ψ_0) et les mesures odométriques et inclinométriques.

2.3 Principe de la méthode de navigation à l'estime

Notons « O » le vecteur des paramètres dont on cherche à exprimer l'évolution :

$$O_i = [x_i, y_i, z_i, \psi_i]^t \quad (5.1)$$

On suppose connaître O_i à l'instant « i », et on cherche O_{i+1} connaissant le vecteur de mesure :

$$M_i = [\Delta_i, \omega_i, \alpha_i, \beta_i]^t \quad (5.2)$$

où :

- Δ_i et ω_i sont respectivement la translation et la rotation élémentaires mesurées par l'odomètre entre les instants « i » et « i+1 ».

² La mesure angulaire d'un inclinomètre est définie dans un plan vertical. La « sensibilité transversale » caractérise l'effet d'une accélération ou du champ de pesanteur ne se situant pas dans ce plan.

³ Dans la pratique, les problèmes les plus sensibles sont dus aux vibrations engendrées par un moteur thermique, par exemple. Comme le montreront les essais réels du prochain chapitre, les accélérations dues aux dynamiques de l'engin sont négligeables, compte tenu que l'évolution est lente et à vitesse quasi constante.

- α_i est la mesure de l'inclinomètre de la déclivité à l'instant « i ».
- β_i est la mesure de l'inclinomètre de dévers orthogonal à l'instant « i ».

Soit R_π , un repère auxiliaire définissant le plan de roulement, tel que, à l'instant « i » :

$$(R_\pi)_i = (R_s)_i \tag{5.3}$$

$$\left({}^0A_\pi\right)_i = \left({}^0A_S\right)_i = \begin{bmatrix} {}^0s_\pi & {}^0n_\pi & {}^0a_\pi \end{bmatrix}_i \tag{5.4}$$

L'expression de la matrice 0A_S est donnée par l'équation (4.22), dans laquelle il faut remplacer « dc » par « α » et « dv » par « β ».

Ainsi, à l'instant « i », l'origine « Ω » de R_π est confondue avec l'origine « S » de R_S . Entre les instants « i » et « i+1 » le repère R_π reste immobile, c'est-à-dire qu'il définit le plan de roulement (Ω, \vec{a}) dans lequel est supposé se faire le déplacement du robot, comme indiqué sur la figure 5.2.

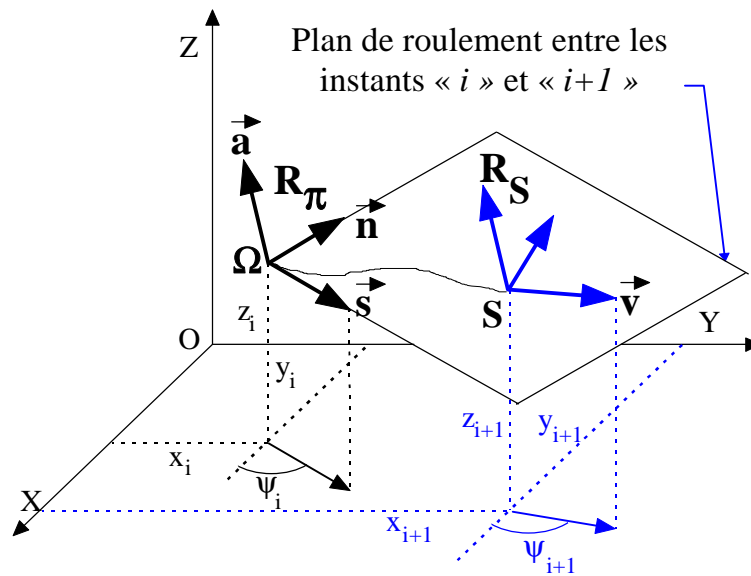


figure 5.2 : déplacement du robot dans le plan de roulement défini par R_π

Le modèle de déplacement que nous proposons est le suivant :

- entre les instants « i » et « i+1 », le robot se déplace dans le plan (Ω, \vec{a}) défini par la pose à l'instant « i » ;
- à l'instant « i+1 », les mesures des inclinomètres donnent la nouvelle déclivité et le nouveau dévers orthogonal.

Finalement, le problème revient à déterminer les variations élémentaires δx , δy , δz et $\delta \psi$ que subit le vecteur $O = [x, y, z, \psi]^t$ dans R_0 , du fait du déplacement dans le plan R_π .

$$\text{dans } \mathbf{R}_0 \quad \begin{cases} x_{i+1} = x_i + \delta x(\mathbf{O}_i, \mathbf{M}_i) \\ y_{i+1} = y_i + \delta y(\mathbf{O}_i, \mathbf{M}_i) \\ z_{i+1} = z_i + \delta z(\mathbf{O}_i, \mathbf{M}_i) \\ \psi_{i+1} = \psi_i + \delta \psi(\mathbf{O}_i, \mathbf{M}_i) \end{cases} \quad (5.5)$$

Dans la suite de ce paragraphe 2, nous cherchons l'expression de la rotation élémentaire $d\vec{R} = {}^0[0 \ 0 \ \delta\psi]^t$ autour de « z_0 » et de la translation élémentaire, effectuée dans le plan de roulement et ramenée dans \mathbf{R}_0 , soit $d\vec{T} = {}^0[\delta x \ \delta y \ \delta y]^t$. Par souci de clarté, nous ne considérerons pas les indices temporels dans les détails des calculs.

2.4 Rotation élémentaire autour de z_0

L'odomètre mesure la vitesse de rotation instantanée « ω » dans le plan de roulement :

$${}^\pi d\mathbf{R} = [0 \ 0 \ \omega]^t \quad (5.6)$$

Donc, dans \mathbf{R}_0 :

$${}^0 d\mathbf{R} = {}^0 A_\pi \cdot {}^\pi d\mathbf{R} \quad (5.7)$$

La troisième composante de ${}^0 d\mathbf{R}$ est la composante de la vitesse de rotation selon z_0 , c'est-à-dire $\delta\psi$. Après calcul, on obtient :

$$\delta\psi = \sqrt{\cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2} \cdot \omega = \chi \cdot \omega \quad (5.8)$$

2.5 Translation élémentaire dans \mathbf{R}_0

Le déplacement élémentaire du robot dans le plan (Ω, \vec{a}) peut être déterminé en appliquant un des modèles d'évolution classiques de l'odométrie plane présentés dans le chapitre 2.

Si l'on considère le modèle le plus simple, qui suppose que le déplacement du robot est composé d'une translation de longueur « Δ » suivie d'une rotation sur place « ω », alors en 2D, on a vu que :

$$d\vec{T} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \cos(\theta) \\ \Delta \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

où Δ est le déplacement élémentaire mesuré par l'odomètre, et θ l'angle entre l'axe d'avance et l'axe des abscisses du repère plan considéré avant le mouvement. Ainsi, dans \mathbf{R}_π , θ est nul puisque $(\mathbf{R}_\pi)_i = (\mathbf{R}_s)_i$ et donc :

$${}^{\pi}d\mathbf{T} = [\Delta \quad 0 \quad 0]^t \quad (5.10)$$

On remarque, dans l'équation (5.10), que la composante selon « z » est évidemment nulle puisque le mouvement se fait dans R_{π} .

Dans R_0 , ce vecteur a pour coordonnées :

$${}^0d\mathbf{T} = [\delta x \quad \delta y \quad \delta z]^t = {}^0A_{\pi} \cdot {}^{\pi}d\mathbf{T} \quad (5.11)$$

Soit finalement :

$$\delta x = \Delta \cos(\alpha) \cos(\psi) \quad (5.12)$$

$$\delta y = \Delta \cos(\alpha) \sin(\psi) \quad (5.13)$$

$$\delta z = \Delta \sin(\alpha) \quad (5.14)$$

Remarque :

Un modèle plus précis pourrait aussi être utilisé ; c'est celui que nous avons utilisé en 2D et qui suppose le mouvement localement assimilable à un arc de cercle. Dans ce cas, le déplacement élémentaire 2D est donné par :

$$d\vec{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \cos(\theta + \omega / 2) \\ \Delta \sin(\theta + \omega / 2) \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Avec le même raisonnement, on obtient la translation élémentaire, dont on donne l'expression juste pour montrer qu'elle est bien plus compliquée que dans le cas précédent :

$$\delta x = \Delta \left\{ \cos(\omega / 2) \cos(\psi) \cos(\alpha) - \sin(\omega / 2) \left[\frac{\sin(\psi)\chi}{\cos(\alpha)} - \cos(\psi) \tan(\alpha) \sin(\beta) \right] \right\} \quad (5.16)$$

$$\delta y = \Delta \left\{ \cos(\omega / 2) \sin(\psi) \cos(\alpha) + \sin(\omega / 2) \left[\frac{\cos(\psi)\chi}{\cos(\alpha)} + \sin(\psi) \tan(\alpha) \sin(\beta) \right] \right\} \quad (5.17)$$

$$\delta z = \cos(\omega / 2) \cdot \sin(\alpha) \cdot \Delta - \sin(\omega / 2) \cdot \sin(\beta) \cdot \Delta \quad (5.18)$$

Si $\omega = 0$, ces équations deviennent identiques à (5.12), (5.13) et (5.14).

Nous choisissons d'utiliser le modèle odométrique simple pour les raisons suivantes. Premièrement, en supposant que la période d'échantillonnage est petite, et vu que les machines considérées sont lentes, la vitesse de rotation « ω » est faible. Ensuite, la formulation mathématique est bien plus compliquée dans le cas du modèle précis ; cette considération a une incidence non seulement sur le calcul de la posture prédite, mais aussi sur le calcul des matrices jacobiennes, puisque l'on utilise un filtre de Kalman étendu⁴.

⁴ En 2D, nous avons utilisé le modèle odométrique plus précis, car le terme « $\omega/2$ » compliquait peu les calculs.

2.6 Equations odométriques 3D avec deux inclinomètres

Conscients qu'il est approximatif en présence d'une vitesse de rotation, le modèle d'évolution que nous proposons d'utiliser, a finalement pour expression :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta_i \cos(\alpha_i) \cos(\psi_i) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta_i \cos(\alpha_i) \sin(\psi_i) \\ z_{i+1} = z_i + \Delta_i \sin(\alpha_i) \\ \Psi_{i+1} = \Psi_i + \omega_i \sqrt{\cos(\alpha_i)^2 - \sin(\beta_i)^2} \end{cases} \quad (5.19)$$

Cette forme est un cas particulier du modèle (5.5).

Remarques :

a) Le modèle d'évolution en (x, y, z) du modèle simplifié (5.19) est assez évident, alors que le modèle d'évolution pour « ψ » n'est pas trivial.

b) si $\alpha_i = \beta_i = 0$ alors

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta_i \cos(\psi_i) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta_i \sin(\psi_i) \\ z_{i+1} = z_i \\ \Psi_{i+1} = \Psi_i + \omega_i \end{cases} \quad (5.20)$$

On retrouve bien le modèle d'évolution 2D simplifié.

c) si $\alpha_i = 0$ alors

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta_i \cos(\psi_i) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta_i \sin(\psi_i) \\ z_{i+1} = z_i \\ \Psi_{i+1} = \Psi_i + \omega_i \cos(\beta_i) \end{cases} \quad (5.21)$$

L'engin est penché. Seule la vitesse de rotation est affectée. Attention, si à un instant « i », $\alpha_i=0$, et que la vitesse de rotation n'est pas nulle ($\omega_i \neq 0$), alors à l'instant « i+1 », $\alpha_{i+1} \neq 0$ et la forme (5.21) n'est plus valable.

2.7 Validation du modèle odométrique 3D sous SimuCirc : étude des erreurs de modèle

Afin de valider la méthode de navigation à l'estime, on se propose de lui donner en entrée des mesures odométriques et inclinométriques non bruitées. Les objectifs sont ici de valider les équations odométriques 3D en les comparant à une référence connue, et d'apprécier les erreurs de modèle qui, par intégration, s'accroissent.

La trajectoire de simulation correspond à la trajectoire de référence du chapitre 4, avec une vitesse constante de 0,1 m/s et une période d'échantillonnage de 50 ms.

Comme nous connaissons à chaque instant la posture du mobile, il est possible de calculer les erreurs commises sur les 4 paramètres (x , y , z , ψ).

L'odométrie 3D est initialisée sans erreur.

La figure 5.3 reporte les erreurs sur les paramètres 2D, x , y et ψ .

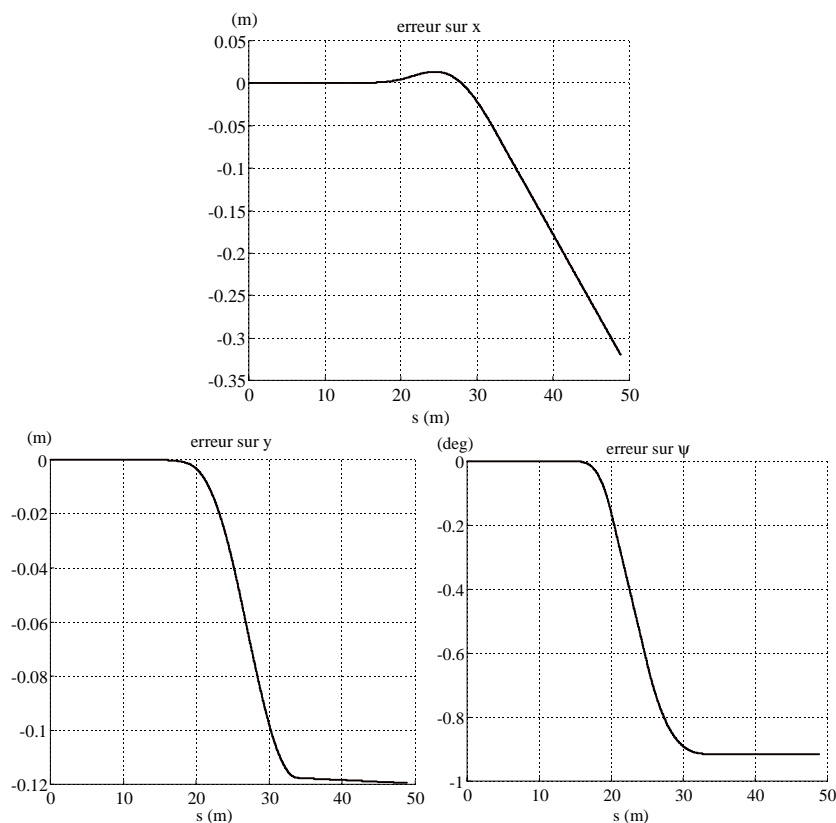


figure 5.3 : erreurs sur les paramètres 2D, sans bruit sur les capteurs

Apparaissent des erreurs sur x , y et ψ à partir du virage. Ces erreurs d'intégration sont dues au modèle odométrique 2D simplifié qui modélise approximativement le mouvement de l'engin lors de rotations associées à des translations.

Par ailleurs, il est clair que des variations d'altitude n'affectent pas l'estimation 2D car, quand l'abscisse curviligne varie de 0 à 20 m, l'altitude subit des variations et il n'y a pas d'erreur sur x , y et ψ .

En fin de trajectoire, soit après 50 m, on constate des erreurs de 30 cm sur « x », 12 cm sur « y » (soit des erreurs inférieures à 0,6 % de la distance parcourue) et 1 degré sur « ψ » : les erreurs de modèle sur l'estimation 2D sont donc faibles, voire négligeables.

Considérons l'erreur d'altitude sur la même trajectoire (figure 5.4).

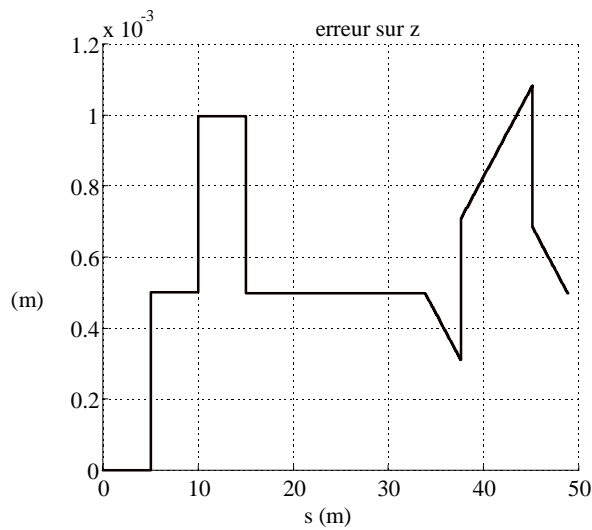


figure 5.4 : erreur d'altitude, sans bruit sur les capteurs

Une erreur sur « z » apparaît lors des variations d'altitude : elle est nulle au début, puis change à chaque fois qu'il y a une discontinuité (irréaliste) de déclivité. Quand l'altitude varie linéairement, logiquement un pas d'échantillonnage de retard apparaît, ce qui explique le demi millimètre d'erreur entre les mètres 5 et 10. Quand l'altitude suit une variation quadratique, l'erreur sur « z » augmente puisque son modèle d'évolution discret est linéaire.

Comme les discontinuités sont irréalistes, nous estimons que les erreurs de modèle sur l'altitude, liées aux approximations effectuées dans les équations odométriques, sont très faibles.

Il est à noter que, dans la réalité, d'autres sources d'erreur vont intervenir, notamment l'offset entre la mesure de la déclivité et l'axe d'avance de l'engin. Cet offset, idéalement nul, joue un rôle crucial ; il sera source de biais dans le filtre, puisqu'il sera intégré au même titre que la mesure de déclivité.

2.8 Comportement de la navigation à l'estime en présence de bruits sur les capteurs

On considère maintenant la même trajectoire que dans le paragraphe précédent, mais avec des bruits sur les capteurs, afin d'apprécier la sensibilité de la méthode de navigation à l'estime 3D aux erreurs de mesure.

La puissance du bruit odométrique correspond à celle obtenue en 2D sur des données réelles ; le bruit des inclinomètres, quant à lui, a été multiplié par 10 par rapport au bruit

théorique indiqué par le fabricant pour considérer une situation réaliste avec des vibrations parasites.

$$\text{Variance du bruit des inclinomètres} = \text{diag}((0,1 \text{ deg})^2; (0,1 \text{ deg})^2;) \quad (5.22)$$

$$\text{Variance du bruit de l'odomètre} = \text{diag}((4e-4 \text{ m})^2; (0,04,6e-2 \text{ deg})^2) \quad (5.23)$$

Sur la figure 5.5, les erreurs de modèle caractérisées au paragraphe 2.7 sont toujours présentes, mais les erreurs dues au bruits des capteurs s'y ajoutent :

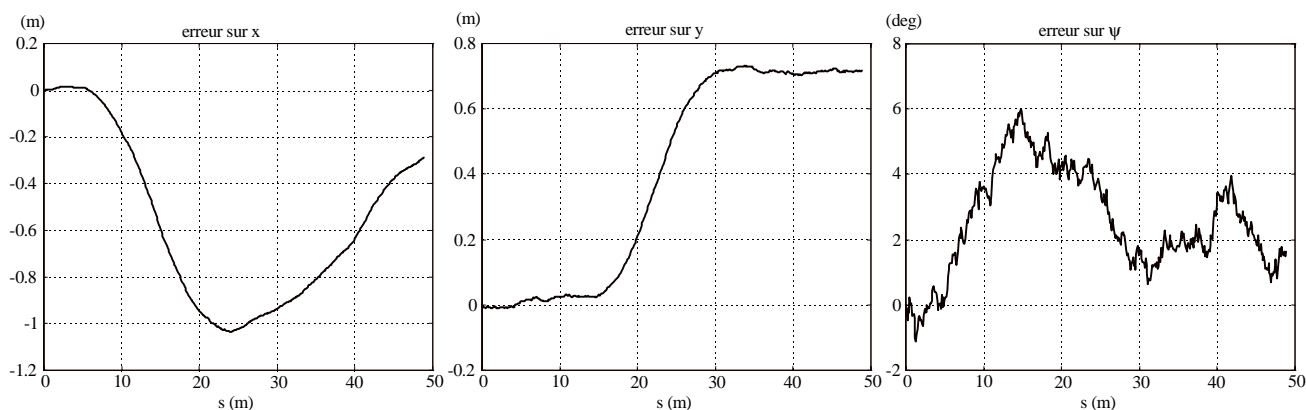


figure 5.5 : erreurs sur les paramètres 2D, avec des bruits sur les capteurs

On observe bien entendu une divergence des erreurs comme pour l'algorithme 2D, et on remarque que l'effet des erreurs de modèle est négligeable par rapport à celui des bruits des capteurs. En effet, les formes et les amplitudes des courbes de la figure 5.3 sont très différentes de celles de la figure 5.5. Cette constatation confirme *a posteriori* le choix du modèle odométrique simplifié du paragraphe 2.6 : comme les erreurs de modélisation qu'il engendre sont négligeables, il n'est pas utile d'utiliser les équations (5.16) à (5.18).

Intéressons nous, maintenant, à la divergence de l'altitude (figure 5.6).

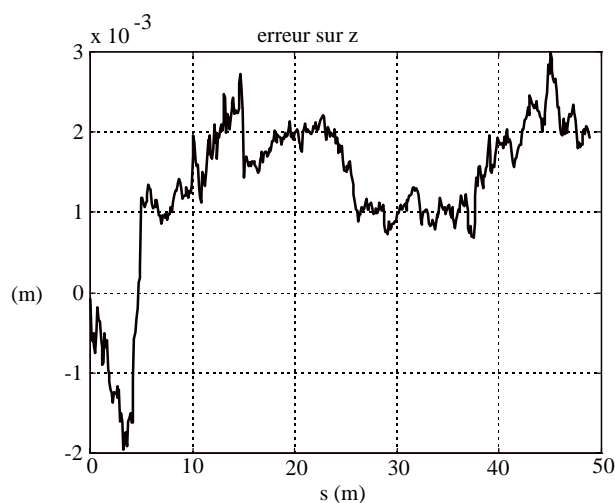


figure 5.6 : erreur d'altitude, avec des bruits sur les capteurs

Force est de constater que la vitesse de divergence de l'altitude est très faible (quelques millimètres après 50 m). On vérifie grâce à d'autres essais, que la courbe de la figure 5.6 n'est pas un cas particulier. En outre, les erreurs de modèle de la figure 5.4 sont du même ordre de grandeur.

Même si le problème est non linéaire, essayons, grâce à des approximations, d'analyser ce comportement.

Notons « e_α » et « e_ψ » les erreurs, supposées petites, sur « α » et « ψ ». Le modèle d'évolution, en « x , y et z », s'écrit :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta \cos(\alpha + e_\alpha) \cos(\psi + e_\psi) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta \cos(\alpha + e_\alpha) \sin(\psi + e_\psi) \\ z_{i+1} = z_i + \Delta \sin(\alpha + e_\alpha) \end{cases} \quad (5.24)$$

Pour simplifier, on suppose que $\alpha = 0$ (pas de déclivité) et que $\psi = 0$. On remplace ensuite les termes trigonométriques par leurs développements limités au premier ordre :

$$\begin{cases} x_{i+1} \approx x_i + \Delta \\ y_{i+1} \approx y_i + \Delta \cdot e_\psi \\ z_{i+1} = z_i + \Delta \cdot e_\alpha \end{cases} \quad (5.25)$$

L'erreur « e_α » se reporte sur « z » de la même façon que l'erreur « e_ψ » se reporte sur « y ». Or, ces deux erreurs ont le même ordre de grandeur (équations (5.22) et (5.23)) ; ce ne sont donc pas des différences de puissance de bruit qui expliquent que la forme des erreurs en « x » et « y » soit complètement différente de celle de l'erreur en « z ». L'explication vient du fait que « ψ » diverge, à cause de l'intégration, alors que « α » ne diverge pas puisqu'il s'agit de la mesure de l'inclinomètre.

Considérons maintenant « e_Δ », l'erreur sur « Δ » :

$$z_{i+1} \approx z_i + (\Delta + e_\Delta) \cdot e_\alpha \approx z_i + \Delta \cdot e_\alpha \quad (5.26)$$

L'erreur de mesure de l'inclinomètre de déclivité se reporte sur « z » avec la pondération « Δ ». Typiquement à 0.1 m/s et à $T_e = 50$ ms, $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$ m. L'effet de « e_α » sur « z » est donc fortement atténué, alors que « e_ψ » agit directement sur « ψ » :

$$\psi_{i+1} = \psi_i + e_\psi \quad (5.27)$$

Les équations (5.26) et (5.27) expliquent ainsi pourquoi la divergence en « z » est de la même nature que celle en « ψ », mais aussi, pourquoi la vitesse de divergence est bien plus faible en « z » (plus de cent fois plus faible que celle en « ψ »).

2.9 Conclusion sur l'odométrie 3D avec deux inclinomètres

Avec l'hypothèse que les inclinomètres mesurent la déclivité et le dévers orthogonal sans offset⁵, le modèle odométrique 3D avec deux inclinomètres présenté dans ce paragraphe (équation (5.19)) est un modèle simple. Il n'utilise que 4 équations récurrentes, car deux des six paramètres sont directement mesurés par les inclinomètres.

Sa faible divergence en « z » le rend très attractif pour des véhicules respectant les hypothèses que nous avons définies (notamment des dynamiques faibles) ne pouvant recalculer leur altitude estimée que par intermittence. Il s'avère (ce qui sera montré plus tard) qu'un filtrage passe-bas des inclinomètres peut améliorer sensiblement le processus d'estimation de l'altitude, ce qui conforte l'attrait de ce modèle.

Enfin, nous pensons que ce modèle 3D peut être justifié même pour des robots qui ne nécessitent pour l'accomplissement de leur tâche que des paramètres 2D. En effet, il peut arriver, dans certains environnements, qu'il y ait des variations de hauteur, comme par exemple une rampe d'accès permettant d'entrer dans un bâtiment. Dans ce cas, les algorithmes 2D pâtiront de chaque variation de hauteur (l'estimée aura tendance à prendre de l'avance par rapport à la position réelle). Dans ce cas, le modèle 2D suivant, dérivé directement de l'équation (5.19), améliorera grandement le processus d'estimation⁶.

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta_i \cos(\alpha_i) \cos(\psi_i) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta_i \cos(\alpha_i) \sin(\psi_i) \\ \psi_{i+1} = \psi_i + \omega_i \sqrt{\cos(\alpha_i)^2 - \sin(\beta_i)^2} \end{cases} \quad (5.28)$$

Par contre, le formalisme proposé ne permet pas de compenser l'effet de variations rapides d'altitude, provoquées par exemple par des trous ou des bosses sur le sol. Dans ce cas, ces variations rapides risquent de perturber le fonctionnement des inclinomètres. Pour améliorer l'odométrie 2D dans ce genre de situation, Boreinstein et Feng [Boreinstein, Feng, 96a] préconisent l'utilisation d'un gyromètre bon marché dont la mesure est très bonne à court terme. En cas de bosse ou de trou, la variation de vitesse mesurée par l'odomètre devient incohérente avec celle du gyromètre ; dans ce cas, c'est la mesure de ce dernier qui est conservée. Cette technique très simple est appelée « gyrodométrie ».

⁵ Cette hypothèse est compliquée à réaliser en pratique.

⁶ Ce modèle peut être affiné, si besoin est, en considérant les équations (5.16) et (5.18) plus précises, ce qui pourrait se justifier en cas de vitesse angulaire importante.

3 RELATION ENTRE LA POSITION ET L'ATTITUDE DU ROBOT ET LES MESURES DE SIREM

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de trouver les relations qui existent entre les angles d'azimut et de site de SIREM, et les six paramètres de position et d'attitude « x, y, z, ψ , dc, dv » donnés dans le repère R_0 .

La figure 5.7 présente les angles d'azimut et de site, dans le repère R_S .

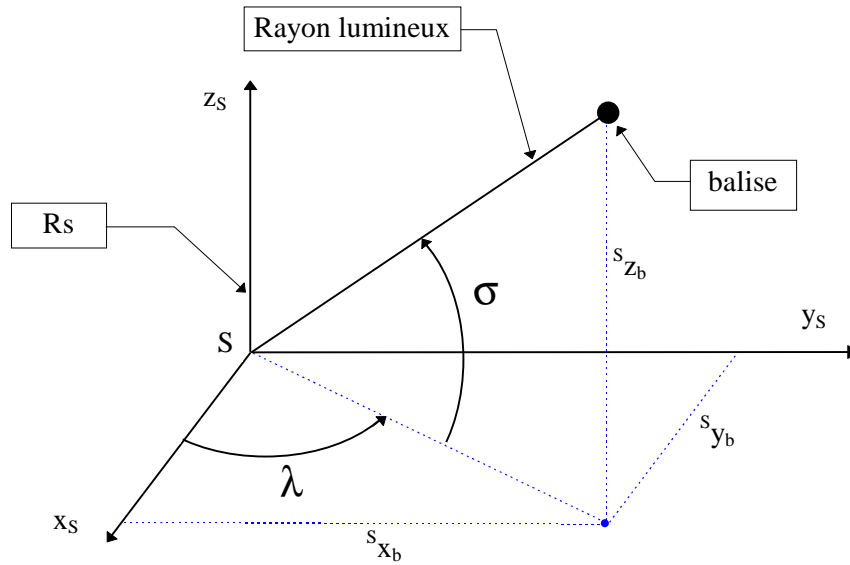


figure 5.7 : angles d'azimut et de site dans le repère R_S

Dans le repère capteur R_S , les équations reliant les angles mesurés et la pose 3D sont données par:

$$\begin{cases} \lambda = \text{atan2}(s_{y_B}, s_{x_B}) \\ \sigma = \arctan\left(\frac{s_{z_b}}{\sqrt{s_{x_B}^2 + s_{y_B}^2}}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \sigma \end{pmatrix} = G_B(x, y, z, \psi, dc, dv) \quad (5.29)$$

L'indice « B » de la fonction « G » indique que l'équation (5.29) est non stationnaire, puisqu'elle dépend de la balise qui a été relevée.

Déterminons maintenant les trois termes « s_{x_B} », « s_{y_B} » et « s_{z_B} », c'est-à-dire la position de la balise dans le repère R_S .

Dans R_0 , la position de la balise est parfaitement connue. En coordonnées homogènes elle est notée « 0P_B » :

$${}^0P_B = \begin{bmatrix} x_B & y_B & z_B & 1 \end{bmatrix}^t \quad (5.30)$$

Notons « 0P_S » la position de SIREM, en coordonnées homogènes :

$${}^0P_S = \begin{bmatrix} 0_x & 0_y & 0_z & 1 \end{bmatrix}^t \quad (5.31)$$

Dans R_S , l'équation (5.30) devient :

$${}^S P_B = {}^S T_0 \cdot {}^0 P_B = \begin{bmatrix} {}^0 A_S^t & -{}^0 A_S^t \cdot {}^0 P_S \\ 0 & 1 \end{bmatrix} {}^0 P_B \quad (5.32)$$

où la matrice d'attitude « ${}^0 A_S$ » est définie par l'équation (4.22).

Après calcul, les termes de « ${}^S P_B$ » ont pour expression :

$${}^S x_B = -\cos(dc) \left[\cos(\psi)(x-{}^0 x_B) + \sin(\psi)(y-{}^0 y_B) \right] - \sin(dc)(z-{}^0 z_B) \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} {}^S y_B &= \left[\frac{\sin(\psi)\chi}{\cos(dc)} - \tan(dc) \sin(dv) \cos(\psi) \right] (x-{}^0 x_B) \\ &\quad - \left[\tan(dc) \sin(dv) \sin(\psi) + \frac{\cos(\psi)\chi}{\cos(dc)} \right] (y-{}^0 y_B) \\ &\quad + \sin(dv)(z-{}^0 z_B) \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} {}^S z_B &= \left[\frac{\sin(\psi)\sin(dv)}{\cos(dc)} + \cos(\psi) \tan(dc) \chi \right] (x-{}^0 x_B) \\ &\quad + \left[\frac{-\cos(\psi)\sin(dv)}{\cos(dc)} + \sin(\psi) \tan(dc) \chi \right] (y-{}^0 y_B) \\ &\quad - \chi(z-{}^0 z_B) \end{aligned} \quad (5.35)$$

L'expression finale de la relation (5.29) faisant apparaître (x, y, z, ψ, dc, dv) n'est pas donnée car son écriture est complexe.

4 PREMIERE APPROCHE CONDUISANT A UN FILTRE DE KALMAN ETENDU A 6 ELEMENTS

4.1 Introduction

Les paragraphes 2 et 3 ont défini respectivement un modèle de déplacement à l'estime et les équations d'observation liées à SIREM.

On s'intéresse maintenant à mettre en œuvre un filtre de Kalman tel que le capteur SIREM puisse recalculer les erreurs de la localisation à l'estime. On propose de se ramener à un formalisme proche de celui que nous avons étudié en 2D.

Or, les mesures de la déclivité et du dévers orthogonal (α et β) apparaissent à la fois dans le modèle odométrique 3D et dans les équations d'observation de SIREM, puisque l'on a une équation de sortie de la forme (cf. (5.29)) :

$$\begin{pmatrix} \lambda_j \\ \sigma_j \end{pmatrix} = G_B(x, y, z, \psi, \alpha, \beta) \quad (5.36)$$

Si l'on veut suivre la même approche qu'en 2D, l'équation d'observation doit être uniquement fonction de l'état à estimer. Afin de satisfaire cette condition, nous proposons de mettre dans le vecteur d'état la déclivité (dc) et le dévers orthogonal (dv) ; le vecteur d'état a ainsi 6 éléments et se définit par :

$$\zeta = [x \ y \ z \ \psi \ dc \ dv]^t \quad (5.37)$$

L'équation (5.36) devient alors :

$$\begin{pmatrix} \lambda_j \\ \sigma_j \end{pmatrix} = G_B(\zeta) \quad (5.38)$$

La suite de ce paragraphe décrit la mise en œuvre d'un filtre de Kalman étendu. On présente, tout d'abord, le modèle d'évolution, puis les équations d'observation, pour aboutir au modèle d'état sur lequel sera basé le filtre [Bonnifait, Garcia, 97b]. Dans cette approche, les mesures inclinométriques sont traitées comme les mesures de SIREM, c'est-à-dire qu'elles sont vues comme des sorties mesurées. Les mesures odométriques, quant à elles, sont toujours considérées comme une entrée bruitée (cf. figure 5.8).

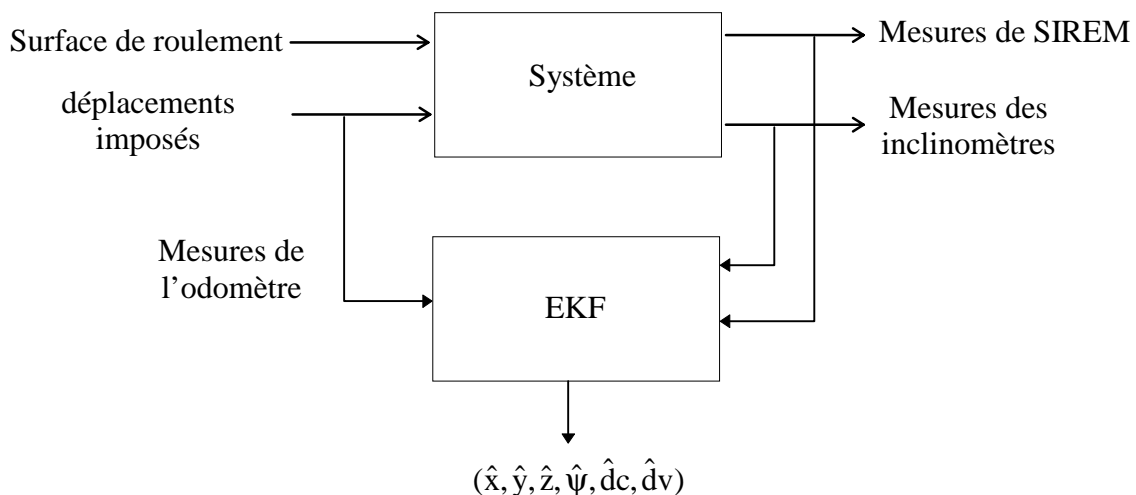


figure 5.8 : entrées et sorties du système selon la première approche

Le filtre de Kalman étendu comportera deux étapes d'estimation correspondant, l'une à SIREM, et l'autre aux inclinomètres.

4.2 Modèle d'état

4.2.1 Modèle d'évolution

Considérons le modèle odométrique 3D (équation (5.19)) dans lequel on remplace « α » par « dc » et « β » par « dv » puisqu'ils appartiennent maintenant au vecteur d'état :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta_i \cos(dc_i) \cos(\psi_i) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta_i \cos(dc_i) \sin(\psi_i) \\ z_{i+1} = z_i + \Delta_i \sin(dc_i) \\ \psi_{i+1} = \psi_i + \omega_i \sqrt{\cos(dc_i)^2 - \sin(dv_i)^2} \end{cases} \quad (5.39)$$

Il faut ensuite un modèle d'évolution pour « dc » et « dv ». Pour ce faire, il faut une connaissance *a priori* du système réel, c'est-à-dire qu'entre deux instants d'échantillonnage, il faut pouvoir prédire le plus correctement possible l'évolution de « dc » et « dv ». Compte tenu des machines considérées, à évolution lente, et en supposant une fréquence d'échantillonnage suffisamment grande, un modèle de type constant semble tout à fait acceptable.

$$\begin{cases} dc_{i+1} = dc_i + \text{bruit de modèle} \\ dv_{i+1} = dv_i + \text{bruit de modèle} \end{cases} \quad (5.40)$$

L'évolution de « dc » et « dv » est rendue possible grâce au bruit de modèle.

En concaténant les équations (5.39) et (5.40), on obtient le modèle d'évolution de l'état « ξ » :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta_i \cos(dc_i) \cos(\psi_i) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta_i \cos(dc_i) \sin(\psi_i) \\ z_{i+1} = z_i + \Delta_i \sin(dc_i) \\ \psi_{i+1} = \psi_i + \omega_i \sqrt{\cos(dc_i)^2 - \sin(dv_i)^2} \\ dc_{i+1} = dc_i \\ dv_{i+1} = dv_i \end{cases} \quad (5.41)$$

Dans ce modèle, les données odométriques « Δ » et « ω » sont considérées comme l'entrée (bruitée) du système. On pose :

$$V_i^* = \begin{bmatrix} \Delta_i \\ \omega_i \end{bmatrix}^7 \quad (5.42)$$

Le modèle d'évolution peut être alors réécrit sous la forme :

$$\zeta_{i+1} = F(\zeta_i, V_i^*) \quad (5.43)$$

⁷ Par convention d'écriture, une entrée bruitée est notée avec une « * ».

4.2.2 Equation d'observation inclinométrique

Les mesures « α » et « β » des inclinomètres sont traitées comme des sorties, et ainsi elles apparaissent au travers d'une équation d'observation. La relation est linéaire :

$$\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \zeta_i = C \zeta_i \quad (5.44)$$

L'indice temporel « i » indique que les mesures des inclinomètres sont périodiques et cadencées avec l'étape de prédiction.

4.2.3 Equation d'observation de SIREM

L'équation d'observation reliant les mesures de SIREM à l'état « ξ » est identique à celle calculée dans le paragraphe 3, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda_j = \text{atan2}(S_{y_B}, S_{x_B}) \\ \sigma_j = \arctan\left(\frac{S_{z_b}}{\sqrt{S_{x_B}^2 + S_{y_B}^2}}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_j \\ \sigma_j \end{pmatrix} = G_B(\zeta_j) \quad (5.45)$$

L'indice temporel « j » différent de « i » joue le même rôle qu'en 2D : il est là pour indiquer l'asynchronisme des mesures de SIREM avec la localisation à l'estime.

4.2.4 Mise sous forme d'état

On regroupe les équations (5.43), (5.44) et (5.45). On considère que l'entrée est bruitée et on ajoute les bruits qui agissent sur ces équations :

$$\left. \begin{array}{l} \zeta_{i+1} = F(\zeta_i, V_i^*) + \varepsilon_i \\ \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = C \zeta_i + \eta_i \\ \begin{pmatrix} \lambda_j \\ \sigma_j \end{pmatrix} = G_B(\zeta_j) + v_j \\ V_i^* = V_i + \gamma_i \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{modèle} \\ \text{sorties} \\ \text{mesure bruitée de l'entrée} \end{array} \quad (5.46)$$

où les bruits sont :

- ε (6x1) bruit de modèle, de variance Q_ε , dont les deux dernières composantes agissent sur « dc » et « dv »,
- η (2x1) bruit de mesure des inclinomètres, de variance Q_η ,
- v (2x1) bruit de mesure de SIREM, de variance Q_v ,
- γ (2x1) bruit de mesure de l'entrée ou bruit de l'odomètre, de variance Q_γ .

Compte tenu du fait que les capteurs sont différents, on peut supposer de façon assez correcte que les bruits sont décorrélés.

Supposons, pour un instant, que les mesures de SIREM soient disponibles à chaque période d'échantillonnage. Si les observations sont regroupées dans un vecteur « Z » :

$$Z_i = [\alpha_i \quad \beta_i \quad \lambda_i \quad \sigma_i]^t \quad (5.47)$$

$$\mu_i = [\eta_i^t \quad v_i^t]^t \quad (5.48)$$

En ne considérant plus l'équation de mesure de l'entrée, on a un modèle d'état de la forme :

$$\begin{cases} \zeta_{i+1} = F(\zeta_i, V_i^*) + \varepsilon_i \\ Z_i = O(\zeta_i) + \mu_i \end{cases} \quad (5.49)$$

On est donc ramené à l'estimation d'état d'un système non linéaire en modèle et observation, avec entrée bruitée, et sans transmission directe de l'entrée sur la sortie (cf. annexe A, équations (A.92) à (A.99)).

4.3 Filtre de Kalman étendu

Etant donné que les bruits de mesure de SIREM et des inclinomètres sont supposés indépendants, on peut décomposer l'étape de filtrage en deux étapes.

Par ailleurs, les mesures inclinométriques sont périodiques et cadencées avec le calcul de la prédiction. Ainsi, après chaque prédiction odométrique, on effectue une étape dite « d'estimation inclinométrique » qui permet de corriger les estimations de « dc » et « dv ». Les paramètres (x, y, z, ψ) , comme dans toute navigation à l'estime, divergent sans borne en l'absence d'autres mesures. Voici le fonctionnement de l'algorithme :

```

Début
| localisation statique déterministe - initialisation du filtre
| Répéter à la fréquence de 20 Hz
|   | U = mesures odométriques
|   | (X,P) = phase de prédiction odométrique (X,P,U)
|   | I = mesures des inclinomètres
|   | (X,P) = phase d'estimation inclinométrique (X,P,I)
|   | Si (mesures extéroceptives  $\lambda$  et  $\sigma$ ) alors
|   |   | (X,P) = phase de correction (X,P, $\lambda$ , $\sigma$ )
|   | Fin si.
| Fin
Fin

```


Les mesures « λ » et « σ » de SIREM sont traitées comme en 2D, de façon asynchrone. Dès qu'elles sont disponibles, on effectue ce que l'on appelle une « correction extéroceptive » qui permet de corriger la divergence de (x, y, z, ψ) .

Dans la suite de ce document, ce filtre de Kalman étendu à 6 éléments sera appelé « EKF6a ». La lettre « a » indique qu'il s'agit d'une première version obtenue avec les hypothèses simplificatrices énoncées au tout début de ce chapitre.

4.3.1 Prédiction odométrique

On dispose de la mesure V_i^* de l'entrée. On calcule l'état prédit :

$$\zeta_{i+1} = F(\zeta_i, V_i^*) \quad (6 \times 1) \quad (5.50)$$

Avec la covariance associée :

$$P_{i+1/i} = A_i P_{i/i} A_i^t + B_i Q_\gamma B_i^t + Q_\epsilon \quad (6 \times 6) \quad (5.51)$$

$$\text{avec } A_i = \left[\frac{\partial F}{\partial \zeta}(\hat{\zeta}_{i/i}, V_i^*) \right] \quad (6 \times 6) \quad \text{et} \quad B_i = \left[\frac{\partial F}{\partial V}(\hat{\zeta}_{i/i}, V_i^*) \right] \quad (6 \times 2) \quad (5.52)$$

Ce calcul de la variance est approximatif et suppose l'indépendance des bruits entre eux et par rapport à l'état. Les expressions des jacobiennes sont données dans l'annexe D.

4.3.2 Estimation inclinométrique

Dans cette étape linéaire, aucune matrice jacobienne n'est calculée. Soit le gain de Kalman (6×2) qui nécessite l'inversion d'une matrice 2×2 ⁸ :

$$K_i = P_{i+1/i} C^t (C P_{i+1/i} C^t + Q_\eta)^{-1} \quad (6 \times 2) \quad (5.53)$$

L'état estimé et sa variance sont donnés par :

$$\hat{\zeta}_{i+1/i+1} = \hat{\zeta}_{i+1/i} + K_i \left(\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} - C \hat{\zeta}_{i+1/i} \right) \quad (6 \times 1) \quad (5.54)$$

$$P_{i+1/i+1} = (I - K_i C) P_{i+1/i} \quad (6 \times 6) \quad (5.55)$$

⁸ On pourrait décomposer cette étape en deux sous étapes, en émettant l'hypothèse que les bruits de mesure des inclinomètres sont décorrélés.

4.3.3 Correction extéroceptive

A l'instant « j », une mesure de SIREM est disponible. La correction de l'état « $\hat{\zeta}$ » se fait selon les équations suivantes :

On pose :

$$\hat{\zeta}_{j/j-1} = \hat{\zeta}_{i+1/i} \text{ et } P_{j/j-1} = P_{i+1/i} \quad (5.56)$$

$$C_j = \left[\frac{\partial G_B}{\partial \zeta} (\hat{\zeta}_{j/j-1}) \right] (2 \times 6) \quad (5.57)$$

Son expression est détaillée dans l'annexe D.

On calcule un deuxième gain de Kalman :

$$K_j = P_j C_j^t (C_j P_j C_j^t + Q_v)^{-1} (6 \times 2) \quad (5.58)$$

$$\hat{\zeta}_{j/j} = \hat{\zeta}_{j/j-1} + K_j \left(\begin{pmatrix} \lambda_j \\ \sigma_j \end{pmatrix} - H(\hat{\zeta}_{j/j-1}) \right) \quad (5.59)$$

$$P_{j/j} = (I - K_j C_j) P_{j/j-1} \quad (5.60)$$

NB : ne pas confondre la jacobienne « C_j » avec la matrice « C » de l'équation de mesure des inclinomètres.

4.3.4 Filtrage des mesures des inclinomètres

Le filtre « EKF6a » possède une caractéristique intéressante. En effet, considérons le modèle d'évolution de « dc » et « dv » donné par l'équation (5.40). Lorsque le bruit de modèle tend vers zéro, les estimations de « dc » et « dv » ne peuvent suivre de variation. A l'inverse, si ce paramètre devient grand, alors l'estimation de la déclivité et du dévers orthogonal seront identiques aux mesures brutes des inclinomètres. En d'autres termes, ce bruit de modèle, à condition que le modèle corresponde à la réalité, permet d'appliquer un filtrage de type « passe-bas » aux mesures des inclinomètres. Cette propriété, incluse naturellement dans « EKF6a », sera d'un grand intérêt, puisque, comme on le verra, elle permettra d'atténuer l'effet du bruit de mesure des inclinomètres.

La mise au point de ce filtrage n'est pas évidente, car s'il devient trop fort, alors le modèle d'évolution ne correspond plus à la réalité et, les performances du filtre se trouvent dégradées.

Remarque :

Les mesures des inclinomètres, puisqu'elles font partie du vecteur d'état, ne sont pas considérées de la même façon que celles de l'odomètre qui sont traitées comme un vecteur d'entrée bruité. On peut se demander alors pourquoi ne pas intégrer ces dernières dans le vecteur d'état afin de les filtrer elles aussi.

Alors qu'il semble correct d'appliquer un modèle d'évolution de type constant pour les inclinomètres, une telle approche n'est pas envisageable pour le déplacement et la rotation odométriques ; leur évolution est trop variable et nous n'avons pas de connaissance *a priori*. En outre, les résultats réels, obtenus avec l'algorithme 2D, ont montré qu'il est satisfaisant de considérer les mesures odométriques de façon brute, sans filtrage.

4.4 Etude en simulation du filtre à six éléments

4.4.1 Etude du calcul d'erreur de la navigation à l'estime du filtre

Le filtre «EKF6a» estime, à chaque instant, une matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation. Cette matrice contient les écarts types estimés pour chacun des 6 éléments, plus les intercovariances. On ne s'intéresse dans ce paragraphe qu'aux écarts types estimés.

On rappelle que le calcul de la variance de l'erreur de prédiction de l'équation (5.51) est le résultat d'une linéarisation au premier ordre : le calcul de la matrice de covariance est donc approché. Nous comparons, dans ce paragraphe, les écarts types estimés aux erreurs d'estimation réellement commises, en considérant 50 simulations utilisant toutes des séquences de bruits différentes (figure 5.9), en se plaçant sur la trajectoire de référence des simulations du chapitre 4.

Dans les simulations ci-après, les variances estimées des bruits, fournies à «EKF6a», sont les mêmes que les variances des bruits réels appliqués au système ($T_e = 50$ ms).

Bruit de modèle

$$Q_\varepsilon = \text{diag}((1 \cdot 10^{-3})^2; (1 \cdot 10^{-3})^2; (7 \cdot 10^{-4})^2; (2 \cdot 10^{-3})^2; (60)^2; (60)^2) \text{ (m}^2 \text{ et deg}^2) \quad (5.61)$$

Bruit des inclinomètres

$$Q_\eta = \text{diag}((0,1 \text{ deg})^2; (0,1 \text{ deg})^2;) \quad (5.62)$$

Bruit de l'odomètre

$$Q_\gamma = \text{diag}((4e-4\text{m})^2; (4,6e-2 \text{ deg})^2) \quad (5.63)$$

On note que la variance du bruit de modèle sur « dc » et « dv » est suffisamment élevée pour qu'il n'y ait pas de filtrage des inclinomètres.

On remarquera que les écarts types sont figurés par une unique courbe commune à tous les essais. Cela est dû au fait que le calcul de « P » n'est effectué qu'une fois le long de la trajectoire théorique, les courbes correspondant aux différents essais étant quasi confondues.

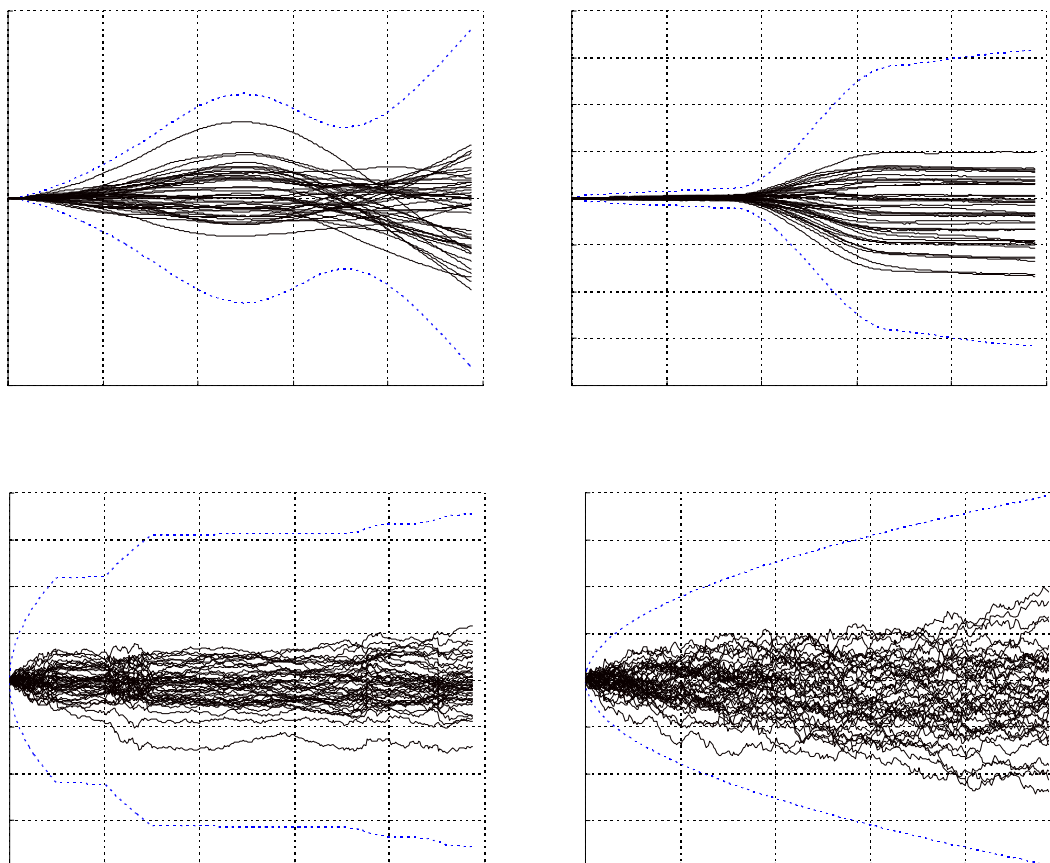


figure 5.9 : erreurs d'estimation sur x, y, z et ψ avec +/- un écart type estimé

Au vu de ces simulations, il semble que les écarts types estimés soient un peu surévalués. On rappelle que l'on considère qu'un calcul d'erreur est convenable dès lors que l'erreur commise reste dans une bande de plus ou moins trois écarts types. Le calcul d'erreur de « EKF6a » est largement compris dans cette fourchette et est donc correct.

Nous n'avons pas essayé de diminuer les variances estimées des bruits de façon à ce que l'erreur s'approche des écarts types, car il s'agit de simulations ne modélisant que partiellement le système réel. Les bruits de « EKF6a », pour des données réelles, seraient de toute façon à modifier.

4.4.2 Fonctionnement du filtre à six éléments avec SIREM

Les mesures (bruitées) de SIREM sont maintenant utilisées pour corriger les erreurs de la navigation à l'estime. La simulation prend en compte l'asynchronisme des mesures de SIREM, qui arrivent toutes les 30 à 50 prédictions odométriques (soit aussi toutes les 30 à 50 estimations inclinométriques).

4.4.2.1 Effet d'une erreur initiale

On conserve les mêmes puissances de bruits qu'au paragraphe précédent et on considère la variance de SIREM :

$$Q_v = \text{diag}((1,3 \cdot 10^{-2} \text{ deg})^2 ; (3,3 \cdot 10^{-4} \text{ deg})^2) \quad (5.64)$$

La variance de l'azimut est celle qui a été utilisée dans l'algorithme 2D pour des données réelles. La variance de l'angle de site est calculée en considérant une erreur maximum de un pixel sur la caméra barrette de SIREM. Les erreurs d'estimation de « EKF6a » sur la trajectoire de référence sont indiquées sur la figure 5.10.

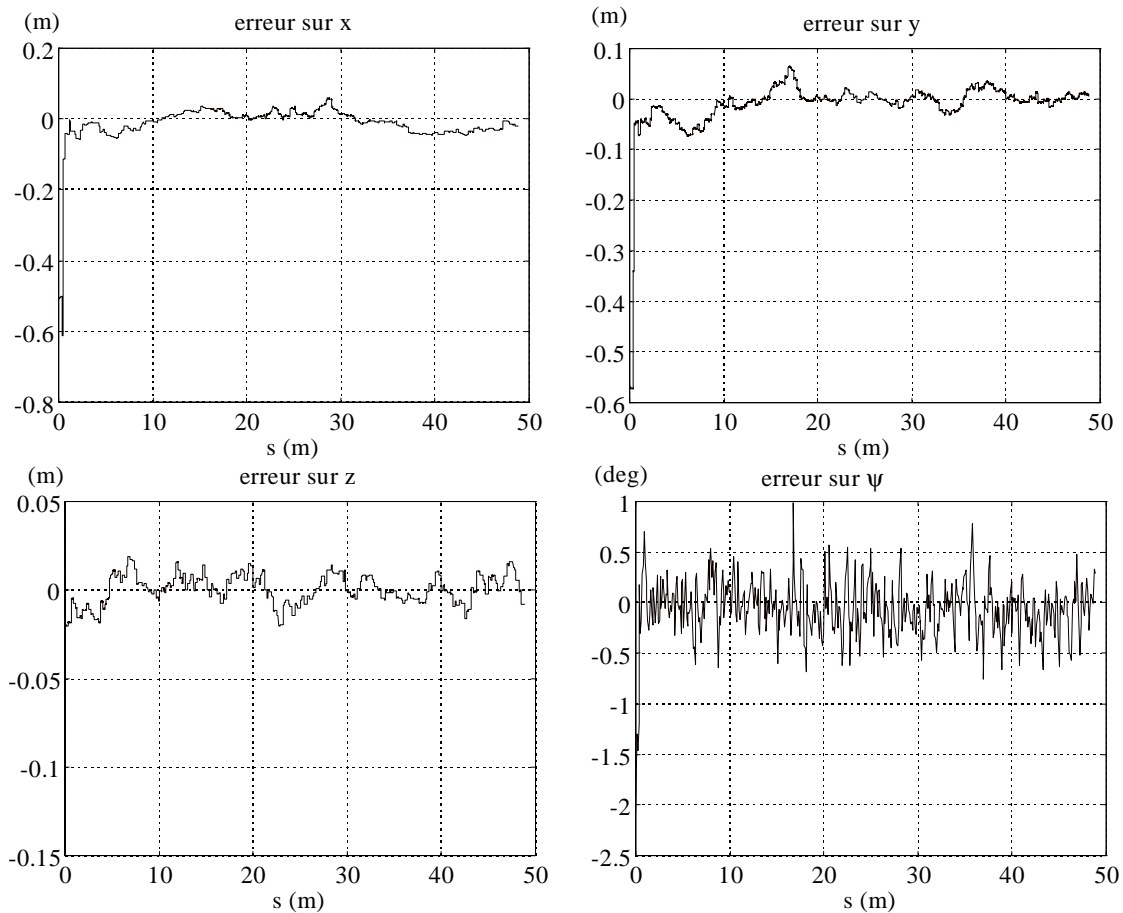


figure 5.10 : erreurs d'estimation de « EKF6a » avec erreur initiale

On constate que l'erreur initiale (0,5 m en x et y, 15 cm en z, et 2 degrés en ψ) est vite corrigée, en deux ou trois recalages, et qu'elle ne fait pas converger « EKF6a » vers un point de fonctionnement erroné.

Les erreurs d'estimation sont de l'ordre de 5 cm au maximum en (x, y), de l'ordre du centimètre en z, et inférieure à $0,5^\circ$ pour la direction. On constate que les performances de la localisation en (x, y et ψ) sont de l'ordre de celles obtenues en 2D.

4.4.2.2 Etude des écarts types estimés

Intéressons nous maintenant aux écarts types estimés. Pour ce faire, étudions une série de 50 essais utilisant chacun des séquences de bruit différentes (cf. figure 5.11).

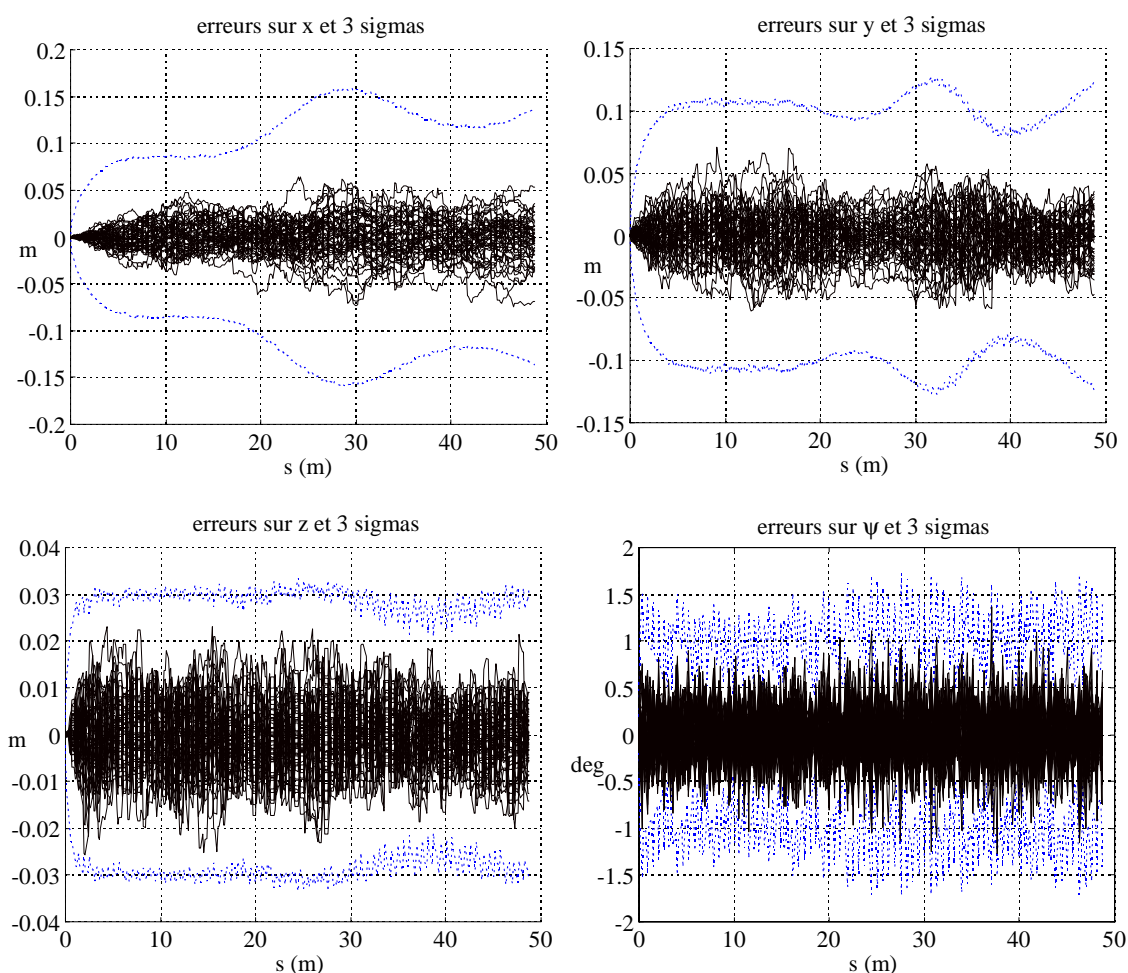


figure 5.11 : erreurs d'estimation de 50 essais de EKF6a et +/- 3 écarts types estimés (traits pointillés)

Ces simulations indiquent que les erreurs d'estimation restent comprises dans la bande de +/- 3 écarts types estimés, ce qui valide le fonctionnement de « EKF6a ».

Ces différents tests permettent d'estimer la précision des localisations. Ainsi, les erreurs en x et y sont bornées par 6 cm ; la précision de la localisation en z est meilleure que 2 cm. L'erreur de direction est inférieure à un degré.

Comme ces résultats sont issus de simulations, il est clair qu'ils ne permettent pas de quantifier la précision du système réel ; il faut les considérer comme des indicateurs d'ordres de grandeur.

4.4.2.3 Amélioration de l'estimation de l'altitude grâce au filtrage des inclinomètres

Un filtrage des données inclinométriques est, en premier lieu, indispensable pour diminuer le bruit « hautes fréquences » qui affectent les estimations de la déclivité et du dévers orthogonal. Cette possibilité, incluse dans « EKF6a », va être mise à profit et on montre, dans ce paragraphe, qu'elle permet d'améliorer l'estimation de l'altitude.

On considère toujours les mêmes séquences de bruits mais on diminue le bruit de modèle sur « dc » et « dv », ce qui a un effet analogue à un filtre « passe-bas » appliqué à ces paramètres.

Bruit de modèle

$$Q_{\epsilon} = \text{diag}((1 \cdot 10^{-3})^2; (1 \cdot 10^{-3})^2; (7 \cdot 10^{-4})^2; (2 \cdot 10^{-3})^2; (0,06)^2; (0,06)^2) \text{ (m}^2 \text{ et deg}^2) \quad (5.65)$$

Deux essais, utilisant les mêmes données, sont d'abord considérés sur la figure 5.12.

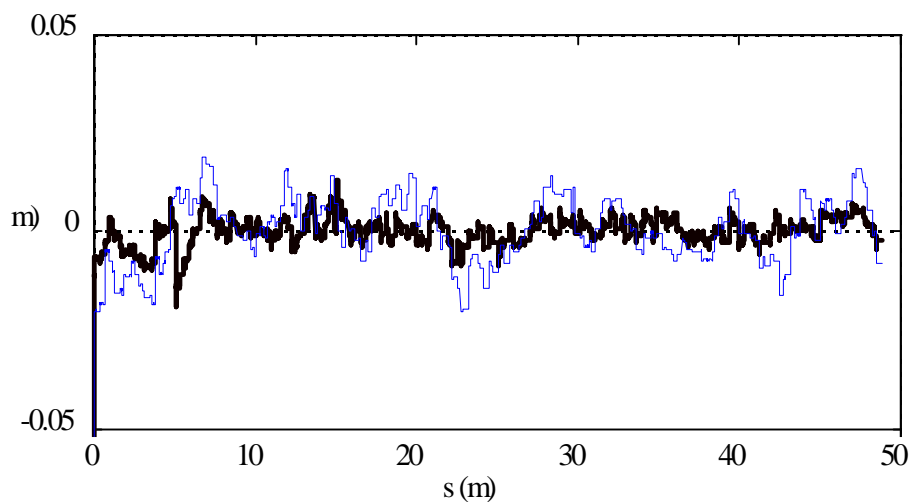


figure 5.12 : erreurs d'estimation de l'altitude de « EKF6a », avec (en gras) et sans filtrage des inclinomètres

Avec le filtrage des inclinomètres, les oscillations sont plus faibles en régime permanent (en effet, une localisation initiale erronée a été introduite). L'amélioration de l'estimation de l'altitude peut être mieux appréciée sur la figure 5.13, qui reporte les erreurs de 50 essais avec des bruits différents.

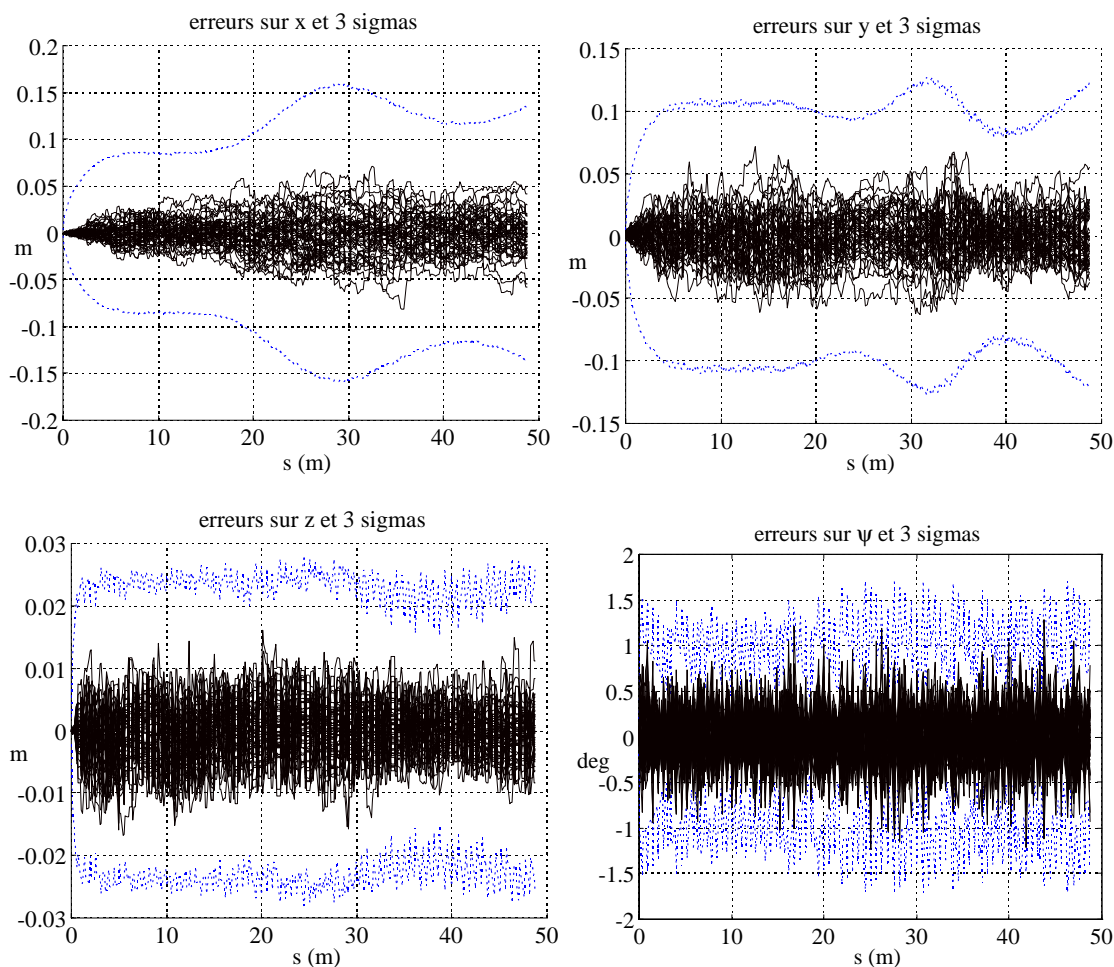


figure 5.13 : erreurs d'estimation de 50 essais de « EKF6a » et +/- 3 écarts types estimés (traits pointillés) avec filtrage des inclinomètres

On constate une amélioration notable de l'estimation du « z » puisque l'erreur se rapproche d'une bande de +/- 1 cm, alors que, sur la figure 5.11, elle était de 2 cm : le gain en précision est pratiquement de 2. L'écart type estimé du « z » est aussi diminué, puisque sa valeur est plus faible que le centimètre ($3\sigma_z < 3\text{ cm}$). Cet indicateur montre bien que « EKF6a » a une plus grande confiance dans l'estimation de l'altitude.

On peut comprendre pourquoi le filtrage des inclinomètres améliore l'estimation de l'altitude. En effet, la déclivité est la dérivée de l'altitude. En d'autres termes, le filtre intègre « dc » pour estimer « z ». Ainsi, en améliorant l'estimation de la déclivité, on améliore l'estimation de l'altitude.

Néanmoins, un trop fort filtrage peut avoir des effets néfastes. En effet, comme dans tout filtrage, un déphasage (retard) apparaît. Cette erreur de traînage peut engendrer un offset qui a l'effet d'un biais dans le filtre : le modèle d'évolution de « dc » et « dv » n'est plus correct. Le filtrage passe-bas doit donc être le résultat d'un compromis. Ce réglage dépend évidemment des dynamiques de l'engin.

Par ailleurs, de façon assez logique, le filtrage des inclinomètres n'améliore pas la précision en x et y , ce qui semble indiquer que l'estimation 2D (x, y, ψ) est « assez découplée » de l'estimation de (z, dc, dv).

Enfin, il ne faut pas oublier que le filtrage des inclinomètres est aussi d'un grand intérêt pour les estimations des angles de déclivité et dévers orthogonal. En effet, grâce au filtrage, les erreurs sur ces paramètres ne dépassent pas 0,08 degré. La précision de 0,1 degré demandée par les finisseurs serait donc atteinte.

4.4.2.4 Comparaison avec l'odométrie 3D sans SIREM

Comparons maintenant l'odométrie 3D, correctement initialisée, avec le filtre « EKF6a » (avec filtrage des inclinomètres), les deux processus utilisant les mêmes données bruitées. Pour que la comparaison puisse se faire, on considère une simulation sans erreur initiale (cf. figure 5.14).

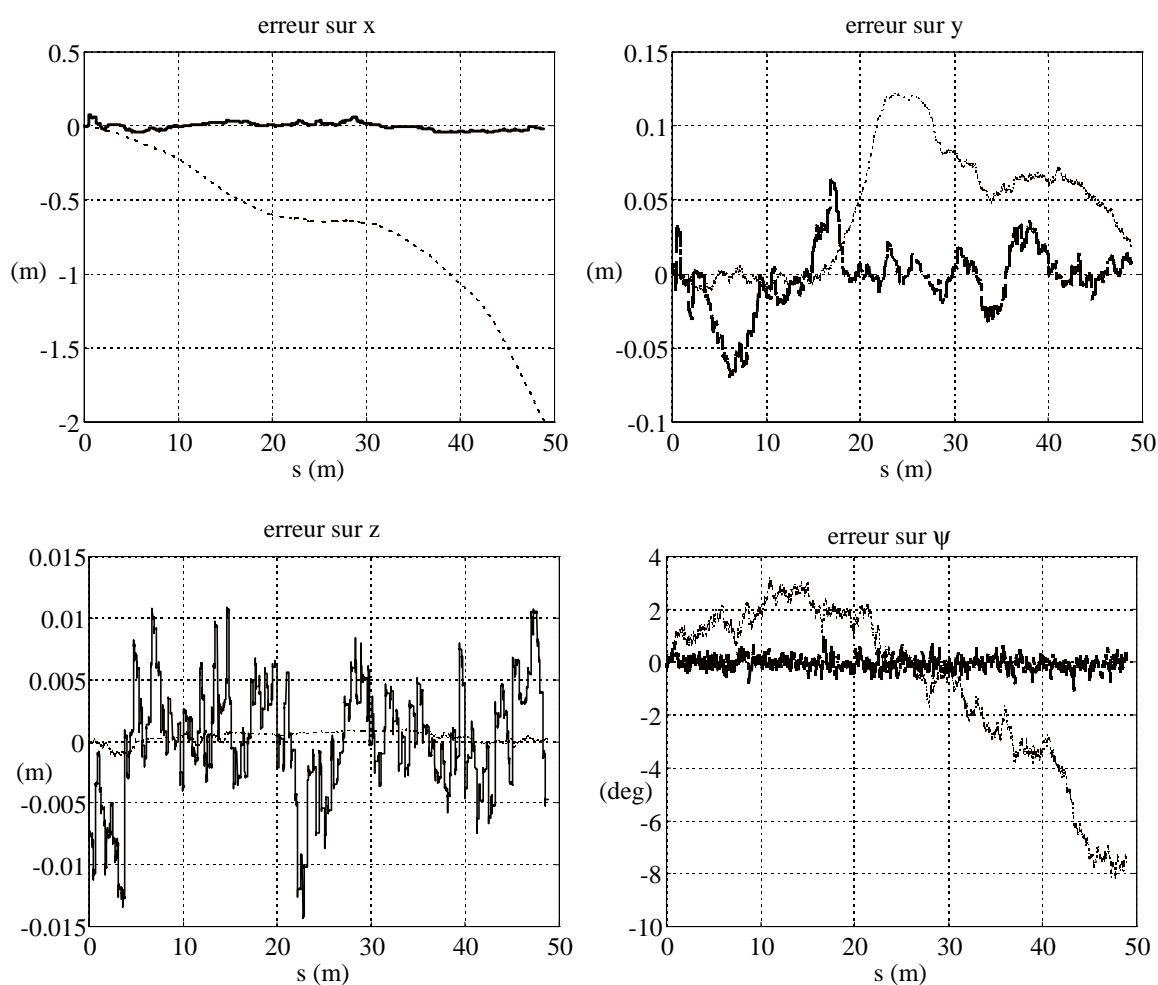


figure 5.14 : EKF6a (trait fort) et localisation à l'estime sans erreur initiale(trait fin)

L'inévitable divergence de la navigation à l'estime n'est plus présente pour « EKF6a », puisque les erreurs de ce dernier sont bornées. Néanmoins, son estimation de l'altitude est moins bruitée que celle du filtre.

Ce phénomène peut paraître surprenant au premier abord. Nous pouvons l'expliquer en considérant que l'estimation de « z » est le résultat d'un compromis effectué par le filtre. En effet, il existe des erreurs sur « dc » et « dv » et ces paramètres sont corrigés au même titre que « z ». De plus, une erreur de la mesure de site d'un pixel par SIREM (50 secondes d'arc) correspond à 8 mm d'erreur en « z » pour une balise située à 40 m. L'addition de ces deux phénomènes provoque les oscillations de la figure 5.14.

En pratique, la divergence en « z » de l'odométrie 3D seule serait certainement plus importante qu'elle ne l'est ici, ne serait-ce qu'à cause d'un (léger) offset entre l'inclinomètre de déclivité et l'axe d'avance de l'engin.

4.5 Conclusion sur le filtre à six éléments

Au vu des résultats de ce paragraphe, le formalisme du filtre à six éléments est validé. Sa formulation mathématique est proche de celle du filtre utilisé en 2D, avec en plus une étape d'estimation réalisée avec les inclinomètres.

Ses performances 2D sont proches de celles obtenues avec l'algorithme 2D. Son estimation de l'altitude est sensible aux erreurs des inclinomètres : un bon filtrage des signaux de ces derniers améliore de façon très sensible l'estimation de l'altitude.

5 DEUXIEME APPROCHE CONDUISANT A UN FILTRE DE KALMAN ETENDU A 4 ELEMENTS

5.1 Introduction

La première approche, présentée au paragraphe 4, a conduit à un filtre de Kalman étendu à 6 éléments s'appliquant à un système non linéaire en modèle et observation, avec entrée bruitée, et sans transmission directe de l'entrée sur la sortie.

Il est possible d'aborder le problème différemment, en considérant que l'entrée du système est composée maintenant des mesures odométriques et inclinométriques. Comme il s'agit d'une mesure bruitée, elle sera notée U_i^* :

$$U_i^* = [\Delta_i \quad \omega_i \quad \alpha_i \quad \beta_i]^t \quad (5.66)$$

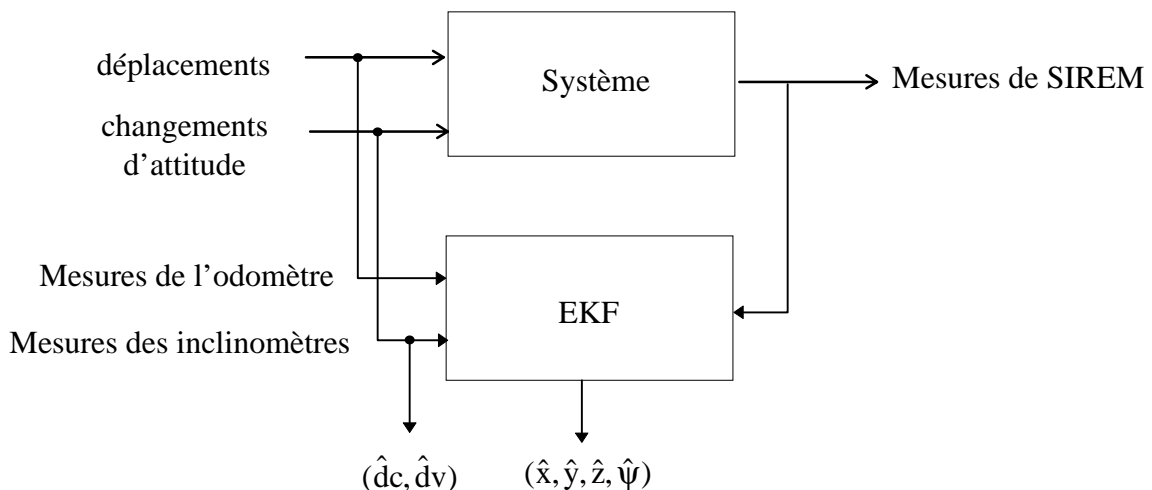


figure 5.15 : entrées et sorties du système de la deuxième approche

Le système n'a maintenant pour sortie que les angles d'azimut et de site de SIREM. La déclivité et le dévers orthogonal ne font plus partie de l'état.

On montre, dans la suite de ce paragraphe, qu'en considérant un état à 4 éléments composé de (x, y, z, ψ) , le système est décrit par une forme d'état différente puisque l'on se ramène à un système toujours non linéaire en modèle et observation, avec encore une entrée bruitée, mais présentant une transmission directe de l'entrée sur la sortie. Cette dernière caractéristique n'autorise pas une hypothèse d'indépendance des bruits et le filtre de Kalman étendu qui en découle est sensiblement modifié.

Dans cette version de filtrage, les estimations de la déclivité et du dévers orthogonal sont fournies directement par les deux inclinomètres (cf. figure 5.15).

5.1.1 Modèle d'évolution

C'est directement le modèle odométrique 3D donné par l'équation (5.19) :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta_i \cos(\alpha_i) \cos(\psi_i) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta_i \cos(\alpha_i) \sin(\psi_i) \\ z_{i+1} = z_i + \Delta_i \sin(\alpha_i) \\ \psi_{i+1} = \psi_i + \omega_i \sqrt{\cos(\alpha_i)^2 - \sin(\beta_i)^2} \end{cases} \quad (5.67)$$

Le vecteur d'état étant défini par :

$$\mathbf{X}_i = [x_i \quad y_i \quad z_i \quad \psi_i]^t \quad (5.68)$$

le modèle d'évolution s'écrit :

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{H}(\mathbf{X}_i, \mathbf{U}_i^*) \quad (5.69)$$

où \mathbf{U}_i^* est défini par l'équation (5.66).

5.1.2 Equation d'observation de SIREM

L'équation d'observation reliant les mesures de SIREM avec l'état « X » est identique à celle calculée dans le paragraphe 4, mais elle s'écrit différemment car, bien qu'elle soit toujours fonction de l'état, elle dépend maintenant de l'entrée bruitée « \mathbf{U}_i^* » puisque les mesures inclinométriques y apparaissent. Pour clarifier, on lui change son nom et on l'appelle « \mathbf{O}_B ».

$$\begin{pmatrix} \lambda_j \\ \sigma_j \end{pmatrix} = \mathbf{O}_B(\mathbf{X}_j, \mathbf{U}_j^*) \quad (5.70)$$

L'indice temporel « j » différent de « i » joue toujours le même rôle.

5.1.3 Mise sous forme d'état

On regroupe les équations (5.69) et (5.70), on considère que l'entrée est bruitée et on ajoute les bruits qui agissent sur ces équations :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{H}(\mathbf{X}_i, \mathbf{U}_i^*) + \varepsilon_i \\ \begin{pmatrix} \lambda_j \\ \sigma_j \end{pmatrix} = \mathbf{O}_B(\mathbf{X}_i, \mathbf{U}_i^*) + \mathbf{v}_j \\ \mathbf{U}_i^* = \mathbf{U}_i + \gamma_i \end{cases} \begin{array}{l} \text{modèle} \\ \text{observations} \\ \text{mesure bruitée de l'entrée} \end{array} \quad (5.71)$$

où les bruits sont :

- ε (4x1) bruit de modèle, de variance Q_ε .
- v (2x1) bruit de mesure de SIREM, de variance Q_v .
- γ (4x1) bruit de l'entrée ou bruit de mesure de l'odomètre et des inclinomètres, de variance Q_γ .

Compte tenu du fait que les capteurs sont différents, on peut supposer de façon assez correcte que les bruits sont décorrélés.

En ne considérant plus l'équation de mesure de l'entrée, on a un modèle d'état de la forme :

$$\begin{cases} X_{i+1} = H(X_i, U_i^*) + \varepsilon_i \\ \begin{pmatrix} \lambda_j \\ \sigma_j \end{pmatrix} = O_B(X_i, U_i^*) + v_j \end{cases} \quad (5.72)$$

On est donc ramené à l'estimation d'état d'un système non linéaire en modèle et observation, avec entrée bruitée, avec transmission directe de l'entrée bruitée sur la sortie.

5.2 Filtrage

Etant donné que le bruit du vecteur d'entrée apparaît dans l'équation d'évolution et dans l'équation d'observation (ce sont les mêmes mesures inclinométriques qui sont utilisées lors des étapes de prédiction et de filtrage), il y a **corrélation des bruits**.

Cette constatation change sensiblement l'expression du filtre de Kalman. En effet, ce type de corrélation implique une modification de l'étape de correction de SIREM [Maybeck, 79b]. Les équations correspondant à ce cas sont données dans l'annexe A, (équations (A.101) à (A.109) - paragraphe « Système non linéaire à entrée mesurée avec transmission directe »).

Le filtre à 4 éléments sera noté « EKF4a », la lettre « a » signifiant qu'il s'agit d'une version correspondant aux simplifications du début du chapitre.

5.2.1 Prédiction odométrique et inclinométrique

On dispose de la mesure U_i^* de l'entrée (mesures odométriques et inclinométriques). On calcule l'état prédit :

$$\hat{X}_{i+1/i} = H(\hat{X}_{i/i}, U_i^*) \quad (5.73)$$

Avec la covariance associée :

$$P_{i+1/i} = A_i P_{i/i} A_i^t + B_i Q_\gamma B_i^t + Q_\varepsilon \quad (5.74)$$

$$\text{avec } A_i = \left[\frac{\partial H}{\partial X}(\hat{X}_{i/i}, U_i^*) \right] \text{ et } B_i = \left[\frac{\partial H}{\partial U}(\hat{X}_{i/i}, U_i^*) \right] \quad (5.75)$$

Ce calcul de la variance est approximatif et suppose l'indépendance des bruits entre eux et par rapport à l'état. Les expressions des jacobiennes sont données dans l'annexe D.

5.2.2 Correction extéroceptive

A l'instant « j », une mesure de SIREM est disponible. La correction de l'état se fait selon les équations suivantes :

On pose :

$$\hat{X}_{j/j-1} = \hat{X}_{i+1/i} \text{ et } P_{j/j-1} = P_{i+1/i} \quad (5.76)$$

L'entrée mesurée est notée « U_j^* ». Sa dernière valeur a été mesurée à l'instant « i ». On pose :

$$U_j^* = U_i^* \quad (5.77)$$

On calcule ensuite trois matrices jacobiennes (cf. annexe D) :

$$B_j = \left[\frac{\partial H}{\partial X}(\hat{X}_{j/j-1}, U_j^*) \right] \quad (4 \times 4) \quad (5.78)$$

$$C_j = \left[\frac{\partial O_B}{\partial X}(\hat{X}_{j/j-1}, U_j^*) \right] \quad (2 \times 4) \text{ et } D_j = \left[\frac{\partial O_B}{\partial U}(\hat{X}_{j/j-1}, U_j^*) \right] \quad (2 \times 2) \quad (5.79)$$

Dans le terme de corrélation apparaît la variance « Q_γ » du bruit d'entrée :

$$S_j = B_j Q_\gamma D_j^t \quad (4 \times 2) \quad (5.80)$$

Le gain de Kalman s'obtient par l'équation :

$$K_j = \left(P_{j/j-1} C_j^t + S_j \right) \left(C_j P_{j/j-1} C_j^t + D_j Q_\gamma D_j^t + Q_v + C_j S_j + S_j^t C_j^t \right)^{-1} \quad (4 \times 2) \quad (5.81)$$

Enfin, l'état corrigé et sa variance sont donnés par :

$$\hat{X}_{j/j} = \hat{X}_{j/j-1} + K_j \left(\begin{pmatrix} \lambda_j \\ \sigma_j \end{pmatrix} - O_B(\hat{X}_{j/j-1}, U_j^*) \right) \quad (4 \times 1) \quad (5.82)$$

$$P_{j/j} = P_{j/j-1} - K_j \left(C_j P_{j/j-1} + S_j^t \right) \quad (4 \times 4) \quad (5.83)$$

5.3 Etude en simulation

Intéressons nous au fonctionnement du filtre à 4 éléments avec SIREM. On considère une simulation sur la trajectoire de référence. Les puissances des bruits des capteurs sont les mêmes que pour « EKF6a ». Le bruit de modèle, de dimension 4x4, a sur les paramètres (x, y, z, ψ) les mêmes valeurs que pour « EKF6a », soit :

$$Q_\varepsilon = \text{diag}((1 \cdot 10^{-3})^2; (1 \cdot 10^{-3})^2; (7 \cdot 10^{-4})^2; (2 \cdot 10^{-3})^2) \text{ (m}^2 \text{ et deg}^2) \quad (5.84)$$

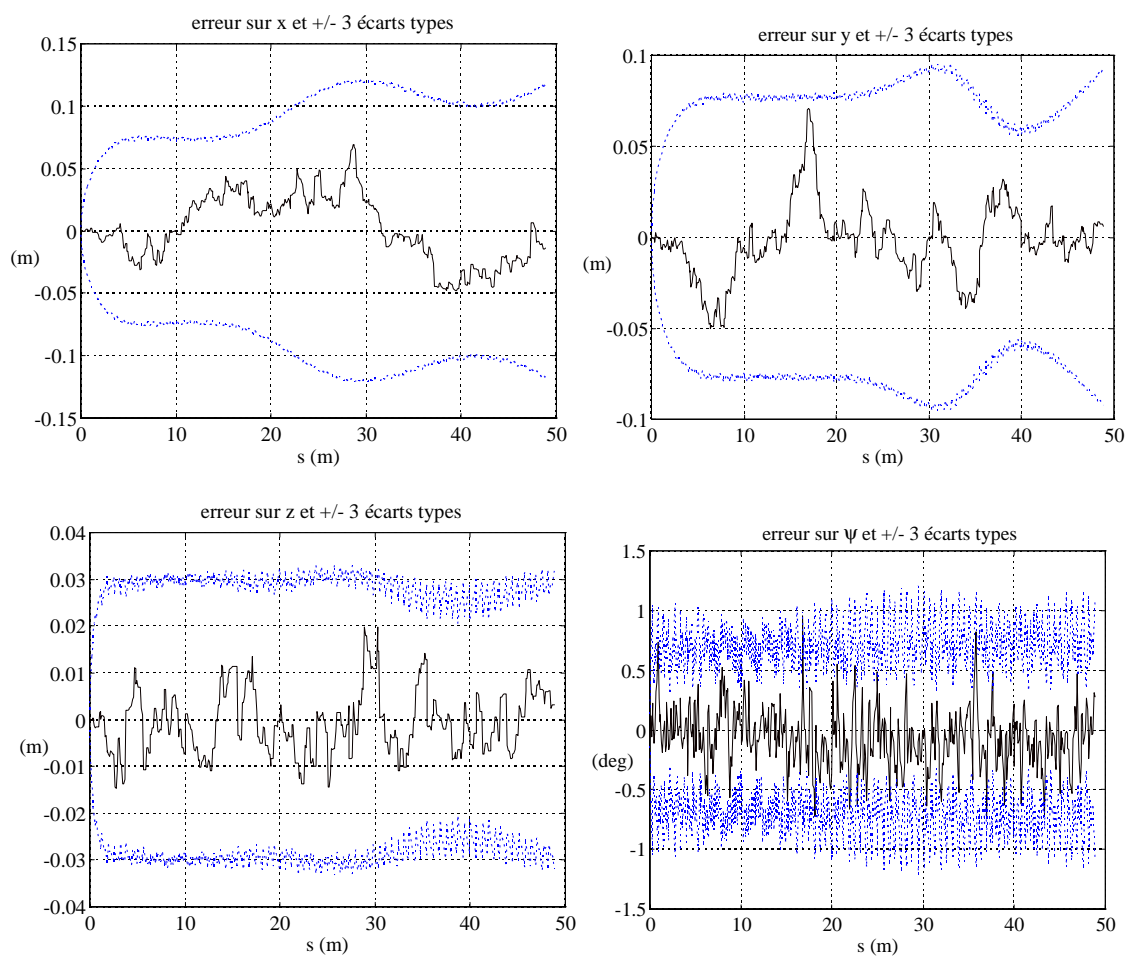


figure 5.16 : erreurs d'estimation de « EKF4a » avec +/- 3 écarts types estimés (traits pointillés)

Comme le montre la figure 5.16, les erreurs sont centrées et du même ordre de grandeur qu'avec « EKF6a ».

La figure 5.17 reporte les erreurs de 50 essais différents et les écarts types estimés.

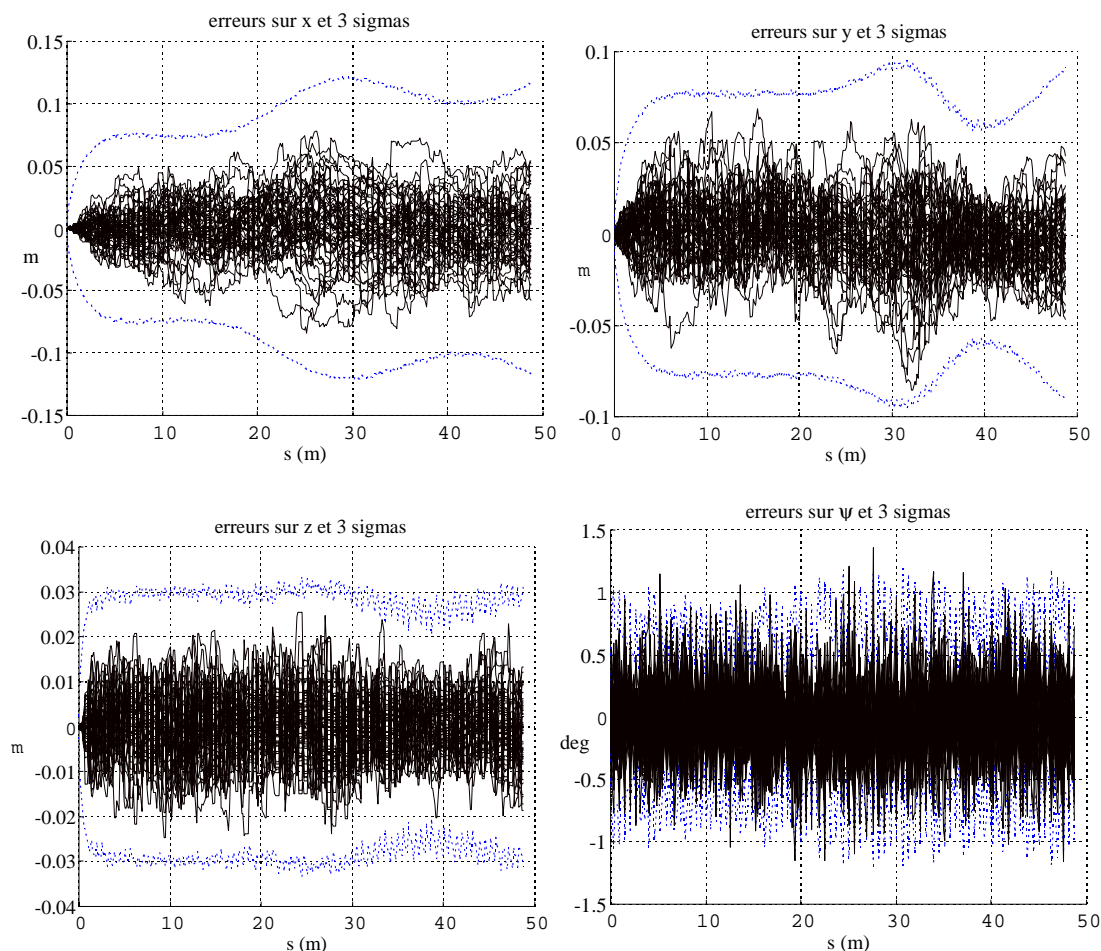


figure 5.17 : erreurs d'estimation de 50 essais de « EKF4a » avec +/- 3 écarts types estimés (traits pointillés)

Le bon fonctionnement de « EKF4a » est validé puisque les erreurs ne dépassent pas les +/- 3 écarts types, sauf pour l'erreur de direction qui sort ponctuellement de la bande.

6 COMPARAISON DES DEUX FILTRES 3D

L'étude comparative est réalisée, dans ce paragraphe, sans filtrage des inclinomètres, puisque « EKF4a » ne possède pas intrinsèquement cette propriété. Ainsi, le bruit de modèle sur « dc » et « dv » pour « EKF6a » est élevé.

6.1 Comparaison des calculs d'erreur des navigations à l'estime

Quand il n'y a pas de recalage de SIREM, les localisations à l'estime sont les mêmes pour les deux filtres : pour « EKF4a », l'étape de « prédiction odométrique - inclinométrique » est itérée, et pour « EKF6a », ce sont les phases de « prédiction odométrique » et « estimation

inclinométriques » qui sont répétées. Les façons dont les deux filtres calculent la variance de l'erreur d'estimation de la navigation à l'estime sont donc radicalement différentes.

Dans les simulations de la figure ci-après, les séquences de bruit sont les mêmes pour les deux filtres et elles ont pour variances celles des paragraphes précédents. On ne reporte pour simplifier que les calculs d'erreur sur x et y.

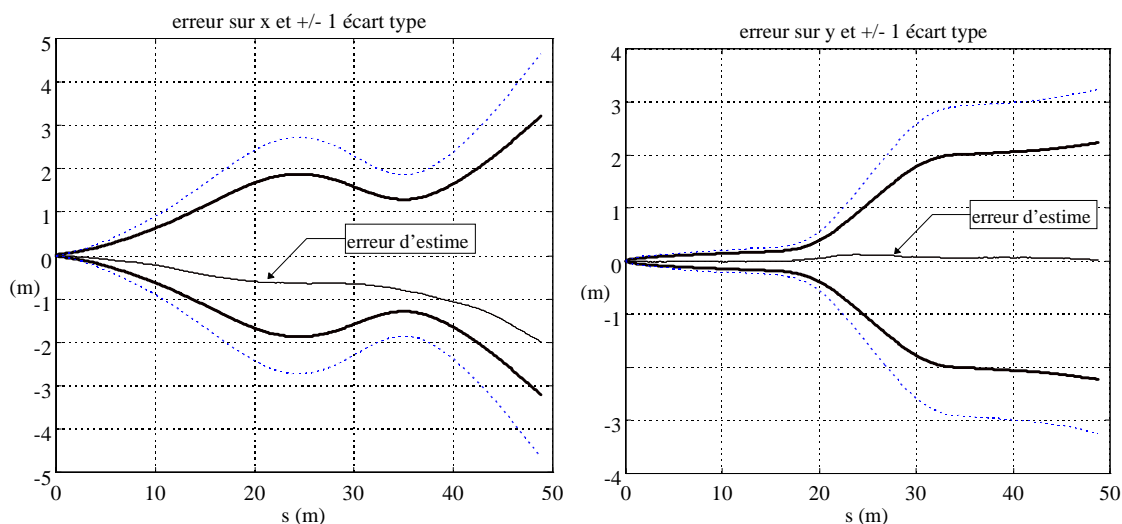


figure 5.18 : erreurs d'estime et +/- 1 écart type estimé des filtres EKF6a (pointillés) et EKF4a (gras)

Il apparaît donc que les variances estimées du filtre à 4 éléments (gras) sont plus faibles que celles du filtre à 6 éléments. On rappelle que pour « EKF6a », cette variance est le résultat d'un filtre de Kalman étendu des inclinomètres auquel on ajoute la contribution odométrique, alors que pour « EKF4a » il s'agit d'un calcul approché direct.

Puisque les formes des courbes sont sensiblement les mêmes et puisque les écarts restent raisonnables, on en déduit qu'à chaque pas de temps les incréments élémentaires d'incertitude sont sensiblement les mêmes. On juge donc que les deux filtres ont des calculs d'erreur proches.

Enfin, la variance estimée de « EKF4a » n'est pas trop faible puisque « EKF6a » avait un peu tendance à surestimer la variance de l'erreur de navigation à l'estime.

Remarque :

En examinant la matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation du filtre à 6 éléments, on constate que cette dernière est diagonale par blocs. En effet, les termes de corrélation entre « dc » et « dv » et le reste de l'état sont très petits. Ceci est en accord parfait avec le fait que les bruits qui affectent les mesures inclinométriques sont indépendants.

6.2 Comparaison des performances des deux filtres avec SIREM

On considère une simulation de chaque filtre avec les mêmes séquences de bruit.

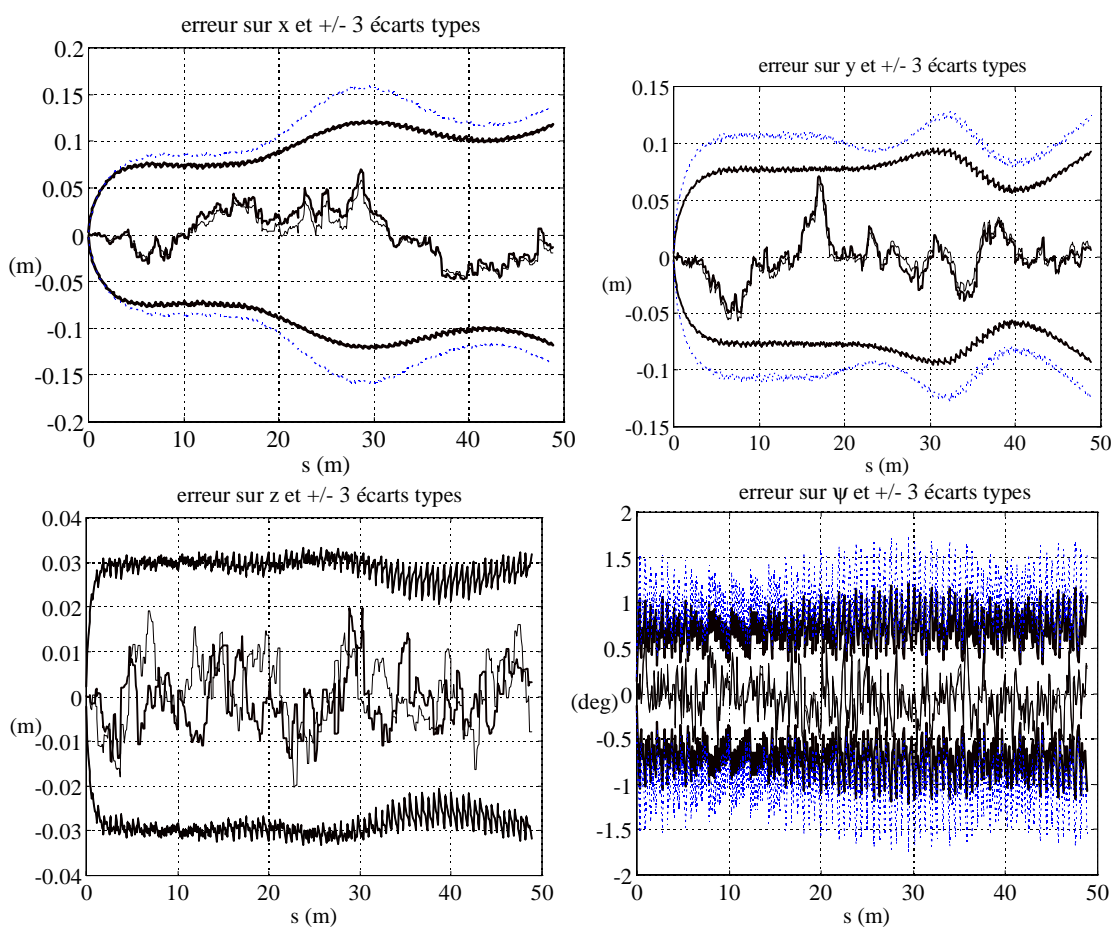


figure 5.19 : comparaison des filtres « EKF4a » (en gras) et « EKF6a » (en trait fin)

Mêmes si les variances estimées par « EKF4a » sont un peu plus faibles (sauf pour les variances de l'altitude qui sont sensiblement les mêmes), **les performances des deux filtres sont semblables**. Notamment, les erreurs d'estimation de l'altitude ont la même amplitude.

6.3 Comparaison du nombre d'opérations des deux filtres

Grâce au logiciel « Matlab », il est possible de compter (approximativement) le nombre d'opérations réalisées en virgule flottante (fonction « flops() - *floating point operations* »). Une exécution de chacun des deux filtres a été réalisée sur les mêmes données, et on obtient :

pour « EKF4a » : 5 458 231 flops

pour « EKF6a » : 13 253 943 flops

Par conséquent, le nombre total d'opérations en virgule flottante est approximativement 2,5 fois plus faible pour « EKF4a » que pour l'autre filtre.

En effet, même si les expressions mathématiques du filtre de Kalman étendu sont plus compliquées dans le cas du filtre à 4 éléments, son exécution se fait sur des matrices de dimension 4, au lieu de 6. Par ailleurs, « EKF6a » nécessite le calcul d'une étape d'estimation inclinométrique (calcul d'un gain, d'une correction et d'une nouvelle matrice de variance) que n'a pas le filtre à 4 éléments. A l'inverse, une étape de recalage avec SIREM est plus compliquée dans le cas de « EKF4a », mais cette étape est peu fréquente car elle se produit toutes les 40 périodes (en moyenne) de la localisation à l'estime.

6.4 Conclusion

Lorsqu'il n'y a pas de filtrage des inclinomètres, les performances des deux filtres sont sensiblement les mêmes, alors que « EKF4a » nécessite deux fois et demi moins d'opérations ; son implantation en temps réel est donc plus aisée¹.

« EKF6a » présente l'avantage de pouvoir filtrer les mesures inclinométriques, mais au prix d'une augmentation notable du nombre d'opérations mathématiques. Ce filtrage de la déclivité et du dévers orthogonal est non seulement nécessaire pour améliorer l'estimation de ces deux angles, mais en outre, il rend meilleur le processus d'estimation de l'altitude.

Par conséquent, on propose d'utiliser le formalisme de « EKF4a » et de préfiltrer les mesures des inclinomètres par un filtre passe-bas externe au filtre de Kalman. Des simulations, non reportées ici pour simplifier, indiquent que les performances que peut atteindre « EKF4a », avec préfiltrage des données, sont les mêmes que celles de « EKF6a » avec filtrage des inclinomètres. Le processus d'estimation 3D que nous proposons donc de conserver par la suite peut être représenté par la figure 5.20.

Cette approche permet ainsi de choisir de façon indépendante le filtre appliqué aux mesures inclinométriques. Notamment, ce filtre peut être réalisé de façon analogique ou mieux encore, être intégré dans l'inclinomètre et être réglé en usine. Cette idée ne pose pas de problème technique *a priori* puisque le type d'inclinomètre que nous proposons d'utiliser² intègre déjà un filtre.

Néanmoins, le réglage du filtre passe-bas n'est pas complètement indépendant de celui des variances de « EKF4a », car le filtrage modifie les statistiques des bruits d'entrée.

¹ Le filtre 2D identifiant les rayons utilise 5 éléments. Son exécution en temps réel est plus lourde que celle de « EKF4a ».

² Avec pendule balourdé.

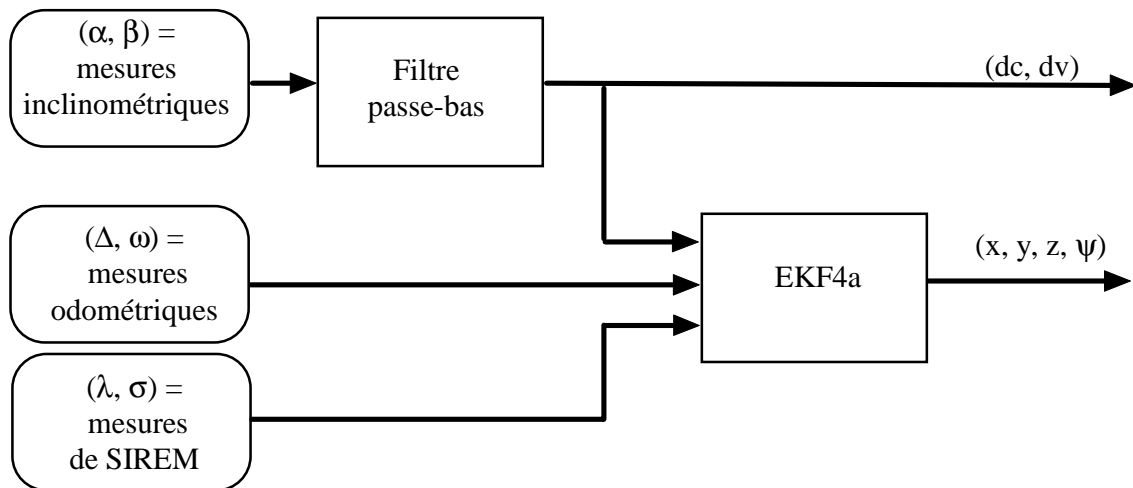


figure 5.20 : architecture du processus d'estimation 3D

7 CONCLUSION

Ce chapitre a été consacré à l'étude d'un système de localisation 3D simplifié. Différents modèles de déplacement à l'odométrie 3D ont été présentés. Grâce à la représentation de l'attitude par les angles de direction, déclivité et dévers orthogonal, les équations odométriques 3D avec des inclinomètres utilisent un formalisme récurrent à 4 paramètres. Le modèle odométrique le plus simple a été retenu car, dans notre cas, la vitesse de rotation des engins est faible. Ce mode de navigation à l'estime a été validé en simulation ; sa faible vitesse de divergence en altitude le rend très intéressant même pour des applications 2D où il existe des variations d'altitude.

L'hybridation de cette technique à l'estime avec SIREM a ensuite été étudiée. Deux filtres de Kalman étendus ont été développés et simulés. Le filtre à 6 éléments a mis en évidence l'effet positif d'un filtrage de type passe-bas des mesures des inclinomètres sur l'estimation de l'altitude : le gain de performance est important. Le filtre à 4 éléments, utilisant un formalisme avec bruits corrélés, a une exécution deux fois plus rapide que celle du filtre à six éléments ; en outre, les performances des deux filtres sont identiques. Par conséquent, le formalisme à 6 éléments sera oublié dans la suite de ce manuscrit.

Enfin, l'attention du lecteur est attirée sur le fait que le processus de localisation 3D, impliquant l'estimation de 6 paramètres, est réalisé par un **formalisme récurrent à 4 éléments seulement**. Cette grande simplicité calculatoire est obtenue grâce à l'utilisation de deux inclinomètres, d'une représentation de la posture 3D adaptée et d'un filtre de Kalman étendu à bruits corrélés.

CHAPITRE 6

VERS UN FILTRE 3D COMPLET ...

RESULTATS EXPERIMENTAUX

Résumé du chapitre 6

Ce dernier chapitre s'intéresse à l'implantation du filtre de Kalman étendu à 4 éléments, étudié en simulation sur un système simplifié, sur le robot MELODY. Or, sur le système réel, les repères liés à SIREM et à l'engin ne sont pas confondus. En outre, les inclinomètres ne sont pas parfaitement alignés : il existe des offsets de quelques dixièmes de degré dont les effets sont très sensibles.

Sans considérer la translation résultant du décalage de SIREM par rapport à l'essieu des roues, nous proposons un filtre qui prend en compte les offsets des inclinomètres vis-à-vis de SIREM et du repère de l'engin. Notre solution implique que l'axe de rotation de SIREM soit assez proche de l'axe « z » du repère du mobile. Il ne reste alors qu'à étalonner le codeur de l'axe de SIREM de façon à ce que son axe des abscisses se confonde avec l'axe d'avance du véhicule. Des manipulations d'étalonnage ont été réalisées à l'aide d'une station de mesure optique de grande précision.

Une étude des signaux des inclinomètres embarqués sur MELODY montre que le bruit qui les affecte est la résultante de vibrations : les accélérations de l'engin ne sont pas perceptibles pour des dynamiques correspondant à celles d'un finisseur.

Les performances du filtre 3D sur des données réelles en traitement différé, comparées à celle d'un G.P.S. différentiel centimétrique, sont très satisfaisantes puisque la précision est de quelques centimètres en (x, y), de l'ordre de deux centimètres en « z », et de l'ordre du dixième de degré pour les angles de déclivité et dévers orthogonal et ce, à une vitesse de 6 cm/s et avec des balises éloignées d'une trentaine de mètres. On montre aussi que les performances de la localisation dans le plan sont meilleures avec le filtre 3D qu'avec le filtre 2D dès lors que le terrain est légèrement en pente, comme souvent en milieu extérieur.

Vers un filtre 3D complet ... Résultats expérimentaux

1 INTRODUCTION

Grâce à des simulations, le chapitre 5 a validé un filtre de Kalman étendu (« EKF4a ») à 4 éléments avec bruits corrélés, pour l'estimation des 6 paramètres de position et d'attitude. Cette validation a été obtenue sur un système simplifié conformément aux hypothèses suivantes :

- les repères R_S et R_M sont confondus (même origine, même attitude)
- les inclinomètres sont colinéaires aux axes (S,x) et (S,y) ¹.

On propose de conserver le formalisme de « EKF4a » et de l'étendre au système réel constitué du robot mobile MELODY et de ses capteurs.

Sur le système réel, les hypothèses de fonctionnement de « EKF4a » sont mises en défaut pour les raisons suivantes. En premier lieu, il n'est pas possible de garantir que les inclinomètres soient colinéaires aux axes « x » et « y » du repère SIREM, et ce pour deux raisons principales : les axes du repère SIREM sont immatériels puisqu'ils sont définis par l'axe optique et l'axe de rotation de la caméra ; ensuite, malgré un montage mécanique soigné, il existe forcément de petits décalages angulaires (appelés « offsets » par la suite) car les inclinomètres sont montés sur un support, lui-même monté sur la plaque sur laquelle est fixé SIREM.

Par ailleurs, comme la caméra se situe au bout d'un mat légèrement en retrait des roues motrices (cf. figure 6.1), les points S et M, origines de R_S et R_M ne coïncident pas. Enfin, compte tenu de la définition des repères du paragraphe 2 du chapitre 4, le repère R_M étant variable, l'attitude de R_S n'est jamais rigoureusement identique à celle de R_M . Cependant, au lieu de considérer la matrice de rotation entre R_S et R_M , on préfère prendre en compte les offsets entre les inclinomètres et le repère R_M .

¹ Le point « S » est l'origine du repère de SIREM (R_S).

Néanmoins, on suppose dans ce chapitre que :

- les offsets des inclinomètres avec les axes (M,x) et (M,y) sont faibles ;
- les offsets des inclinomètres avec les axes (S,x) et (S,y) sont faibles.

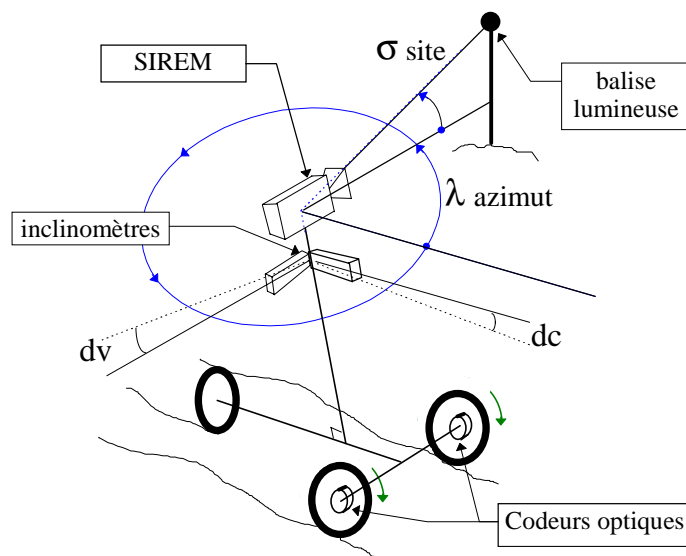


figure 6.1 : configuration des capteurs sur MELODY

Il reste le problème du filtrage des mesures des inclinomètres. La simulation de « EKF6a » a montré clairement le bienfait d'un filtrage passe-bas sur les mesures inclinométriques. Or, en traitement différé, il est possible d'utiliser des filtres, non réalisables en temps réel, qui n'apportent pas de déphasage². Nous proposons donc d'utiliser cette facilité pour lisser les mesures des inclinomètres. Cette étude nous semble intéressante pour déterminer la limite de précision ou plus exactement les oscillations minimum des estimées des filtres. En effet, on verra qu'un filtrage réel des inclinomètres engendre un déphasage qui biaise le processus d'estimation et engendre des oscillations. Une fois cette limite de fonctionnement quantifiée, on analysera la dégradation apportée par un filtre réaliste.

Ce chapitre est organisé comme suit. Tout d'abord, le principe des manipulations est présenté. L'étalonnage géométrique du système multisensoriel est ensuite décrit. La manipulation a été effectuée avec une station totale Sokkia de grande précision. Il en découle l'identification des offsets des inclinomètres par rapport aux repères R_S et R_M , et de la matrice de passage entre R_S et R_M . Par la suite, un filtre prenant en compte les offsets est présenté. Des résultats de traitements différés de données réelles sont étudiés et le comportement du filtre est comparé à un G.P.S. différentiel cinématique temps réel centimétrique. Enfin, les extensions et améliorations sont présentées.

² Par exemple, la fonction « *filtfilt()* » de la *toolbox signal* de Matlab

2 METHODOLOGIE DES MANIPULATIONS

2.1 Principe

Comme pour les essais 2D, le problème de la commande du robot a été complètement découplé de celui de la localisation. Ainsi, grâce à la caméra linéaire placée à son avant, MELODY peut suivre assez précisément des droites ou cercles d'équations connues. Ces chemins sont, comme en 2D, matérialisés au sol par une corde blanche tendue entre des bornes dont les positions ont été relevées par des géomètres.

Par ailleurs, un Pont d'Essai pour MELODY (PEM) modulable a été fabriqué. Lorsque MELODY le franchit, des variations d'attitude et d'altitude sont induites. Le PEM est réalisé avec trois éléments séparables (une côte, un plateau et une descente), comme indiqué sur la figure 6.2. Chaque élément est constitué d'un cadre métallique, sur lequel des planches de contre-plaqué sont vissées. Sur le plateau, réglable en hauteur et en inclinaison grâce à quatre manivelles, viennent se fixer les deux autres éléments. L'ensemble est peint en noir avec une ligne blanche au milieu, pour le suivi de ligne.

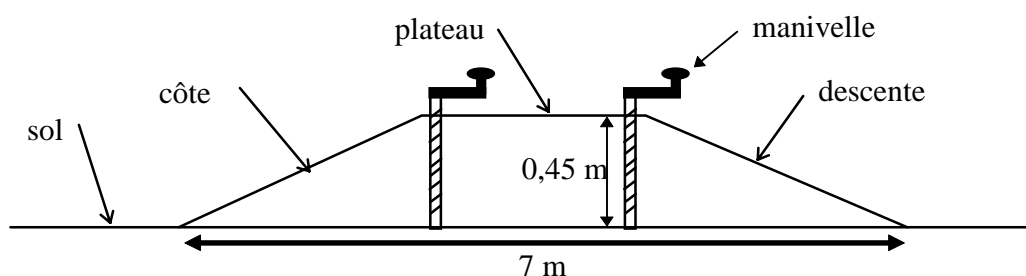


figure 6.2 : le PEM vu en coupe

En plus d'agir sur la hauteur de la trajectoire, ce dispositif permet de donner de la déclivité à MELODY. Par contre, les contraintes mécaniques ne permettent pas d'agir sur le dévers, qui reste le même sur le PEM que sur le sol sur lequel est posé le pont.

Sur le terrain d'essais, le PEM a été aligné sur une ligne droite d'équation connue, elle même matérialisée au sol par un câble blanc tendu entre deux bornes.

Le franchissement du PEM ne constitue pas une trajectoire réaliste, vu que les machines considérées (typiquement un finisseur) évoluent sur des surfaces somme toute assez plates, en tout cas sans variations rapides d'altitude, contrairement à celle engendrée par le PEM. Le franchissement du PEM a pour objectif d'exciter le système, comme peut le faire un échelon de consigne appliqué à un système automatique. On percevra ainsi des régimes transitoires qui n'auront pas forcément d'existence dans la pratique.

Comme en 2D, le principe des essais est d'acquérir les données des capteurs, puis de les traiter en temps différé. Un logiciel temps réel a été conçu pour réaliser cette fonction [Robin, 97]. Les données sont stockées dans des fichiers de type « texte » ayant tous la même référence de temps. On obtient à l'issue d'un essai trois fichiers : celui des mesures odométriques avec une période de 50 ms, celui des mesures inclinométriques avec une période de 50 ms et celui des mesures de SIREM avec des instants de mesure asynchrones. Les données des inclinomètres sont acquises par le biais d'un convertisseur analogique numérique. La fréquence d'échantillonnage étant de 20 Hz et la bande passante des inclinomètres « Sensorex³ » étant de 3 Hz, il est inutile de préfiltrer les mesures inclinométriques avec un filtre dit « d'anti-repliement » (condition de Shannon).

Voici comment se déroule un essai type. Avant qu'il ne franchisse le PEM, on fait suivre à MELODY la ligne blanche pendant quelques mètres, puis on l'immobilise ; de cette façon, on peut admettre que le robot est aligné avec la ligne blanche. Véhicule toujours à l'arrêt, on lance le système d'acquisition des données. Dès que la localisation statique déterministe est calculée et mémorisée dans un fichier, le véhicule peut démarrer. Après une phase d'accélération, le mouvement peut s'effectuer à vitesse constante (6 cm/s), ou à vitesse variable (vitesse maximum 15 cm/s).

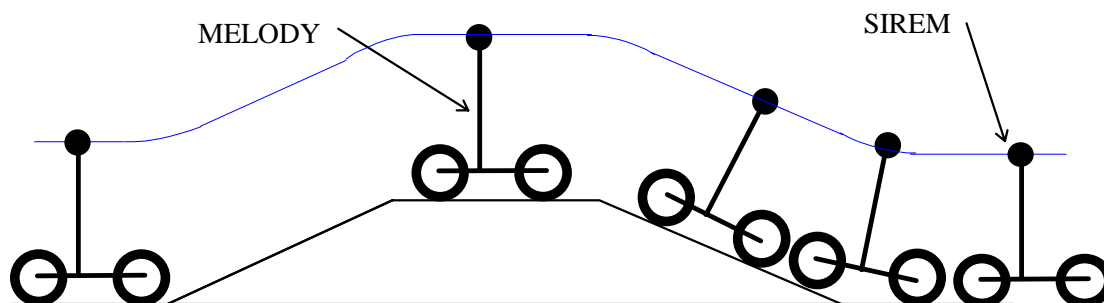


figure 6.3 : essai standard avec le PEM

2.2 Utilisation d'un G.P.S. différentiel centimétrique

Le chemin suivi par le point « S », centre de la caméra, n'est pas le translaté de la forme du PEM, comme indiqué sur la figure 6.3 : les variations brutales de pente sont « arrondies ». Par ailleurs, nous ne disposons pas d'assez de bornes sur le terrain pour connaître l'altitude en tout point du PEM. Il nous est donc quasiment impossible de connaître le chemin réellement

³ Ce sont les inclinomètres de la station SESSYL du L.C.P.C.. Leurs gammes de mesures sont de +/- 14 degrés pour celui de la déclivité, et de +/- 5 degrés pour celui du dévers orthogonal.

suivi par SIREM. Afin d'avoir malgré tout un outil de comparaison externe, nous proposons d'utiliser un G.P.S. (*Global Positioning System*) RTK (*Real-Time Kinematic*), c'est-à-dire un G.P.S. différentiel temps réel de précision centimétrique, utilisant les mesures de phase⁴ des signaux hyperfréquence (de longueur d'onde 19 cm).

L'antenne du récepteur mobile a été disposée au dessus de SIREM à une hauteur approximative de 20 cm (cf. figure 6.4). Le montage mécanique est tel que l'antenne se situe sur l'axe « z » du repère R_S ⁵.

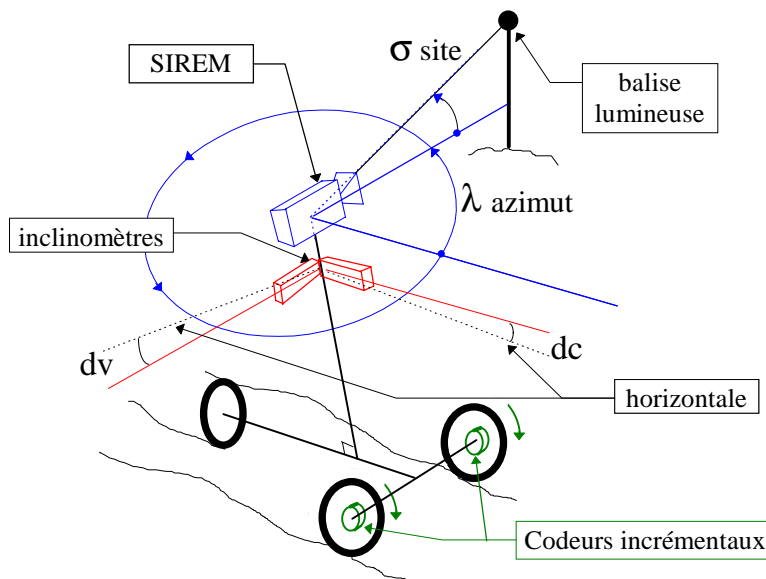


figure 6.4 : disposition de l'antenne G.P.S. sur le robot MELODY

La faculté de récupérer et mémoriser les positions calculées (en temps réel) par le G.P.S. a été ajoutée au système d'acquisition temps réel [Robin, 97]. Le fait que ce soit le même ordinateur qui mémorise toutes les données permet de caler les horloges des différents systèmes : les données G.P.S. peuvent ainsi être ramenées dans la base de temps de SIREM.

Afin de comparer les localisations du filtre et du G.P.S., il est indispensable de connaître les relations de passage entre le repère de l'ellipsoïde « WGS84 », dans lequel sont fournis les points G.P.S. (en coordonnées géographiques, latitude et longitude), et le repère local du terrain de l'Ecole Centrale de Nantes, qui est le référentiel R_0 dans lequel sont calculés les 6 paramètres (x , y , z , ψ , dc , dv). Le changement de repère a été réalisé par des ingénieurs du L.C.P.C. [Lemaire, 97]. Il leur a fallu trouver un point géodésique *I.G.N.* connu (bd Jules Verne à Nantes) à proximité de l'E.C.N., à la verticale duquel a été placé le récepteur de base

⁴ Matériel prêté par le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (L.C.P.C.) de Nantes. Le mobile et la station de base sont identiques (modèle « 7400 de Trimble »).

⁵ L'étalonnage géométrique du système multisensoriel montrera que cette hypothèse est correctement vérifiée, puisque l'on verra que la distance de l'antenne à l'axe « z » est inférieure au millimètre.

du G.P.S. Pendant 30 minutes, le récepteur mobile a été disposé sur le point à relever sur le terrain. Les 1800 mesures enregistrées ont été ensuite moyennées pour déterminer les coordonnées géographiques du point de l'E.C.N. (cf. [Lemaire, 97, Robin, 97]). Comme les coordonnées de ce point sont connues dans R_0 , la transformation à appliquer aux mesures G.P.S. a pu être calculée. Lors des essais avec MELODY, c'est à la verticale de ce point qu'est disposée la station de base du G.P.S. Ce récepteur utilise la position déterminée précédemment pour envoyer les corrections au récepteur mobile.

2.3 A quoi comparer les estimations du filtre ?

Les erreurs de manipulation (suivi de ligne, position des bornes et des balises), les erreurs du G.P.S. et les erreurs du filtre sont toutes du même ordre de grandeur. En outre, à cause du dévers et de la hauteur de la caméra, la projection plane de SIREM ne suit pas la ligne blanche⁶ (cf. manipulations 2D du chapitre 3). Il découle de ces remarques que, ni la ligne blanche d'équation connue, ni le G.P.S. ne constituent à eux seuls une bonne référence de comparaison, comme pourrait l'être la station SESSYL du L.C.P.C.

Si l'on ne conserve que ceux de qualité centimétrique, les points G.P.S. peuvent constituer, après lissage, une bonne référence de comparaison. En effet, les essais du G.P.S. *Trimble 7400* sur la station SESSYL ont montré que la précision en « z » de ce matériel après lissage, peut être estimée à +/- 2 cm à 95 % [Bétaille, 96]. Les biais basse fréquence peuvent provenir des changements de constellation satellitaire, par exemple.

Par ailleurs, il est plus facile d'analyser les sorties d'un filtre lorsque l'on visualise les écarts de ses sorties par rapport à une référence. On pourrait donc calculer les écarts entre les points G.P.S. et les estimations des filtres, mais il n'est pas simple de calculer la distance à une courbe (elle-même entachée d'erreur), d'autant plus que les sorties du filtre sont obtenues à 20 Hz alors que celles du G.P.S. sont disponibles à 1 Hz.

Compte tenu de ces remarques, nous proposons de calculer, comme en 2D, l'écart latéral d'un filtre par rapport à la corde blanche connue, et de lui superposer l'écart latéral des points G.P.S., indicateur du dévers de l'engin. C'est ce que montre la figure 6.5 qui reporte l'écart latéral du G.P.S. et la mesure de l'inclinomètre de dévers lors du franchissement du PEM.

⁶ On rappelle que, par exemple, un degré de dévers provoque 3 cm d'écart latéral.

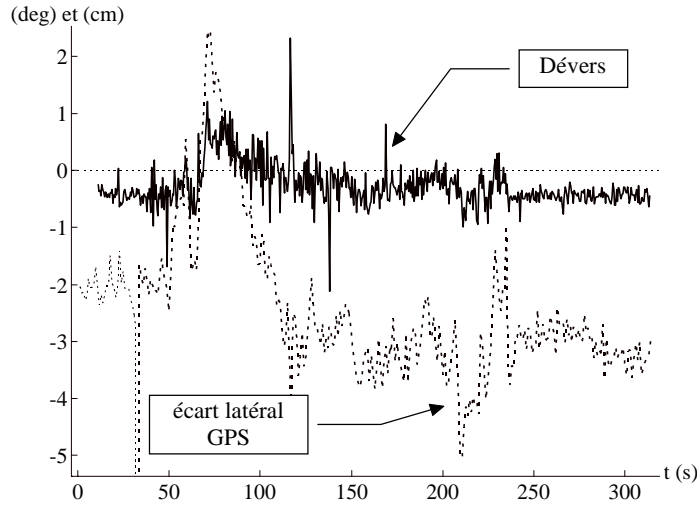


figure 6.5 : écart latéral du G.P.S. et mesure de l'inclinomètre de dévers

Sur la figure 6.5, les formes des courbes de l'écart latéral et du dévers sont nettement corrélées. Le pic de +2.5 cm correspond à un dévers positif dû à une ornière creusée dans le sol par les différents passages de MELODY (les essais ont été effectués en février sur une pelouse détrempée). Pour la suite de la trajectoire, l'écart latéral négatif est engendré par un dévers lui même négatif. L'écart latéral est donc dû en grande partie au dévers.

Comme les variations d'altitude sont faibles (inférieures au mètre), les tracés de l'altitude G.P.S. lissée et de l'altitude estimée par le filtre permettent une bonne visualisation : il est inutile d'effectuer un calcul d'écart. La figure 6.6 montre les données brutes du G.P.S., contenant des points dont la précision n'est pas centimétrique, les positions centimétriques et l'altitude lissée. Avant lissage, les oscillations peuvent atteindre 10 cm.

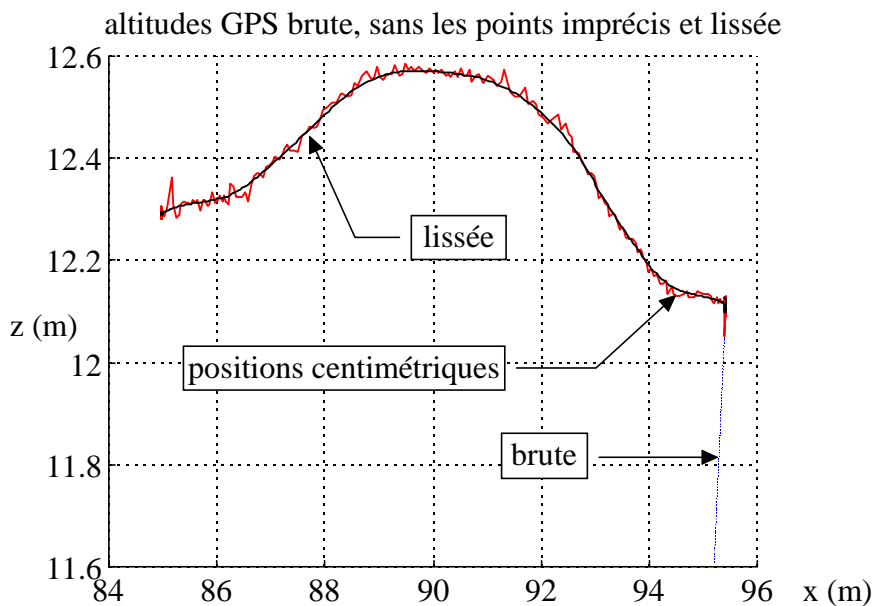


figure 6.6 : altitude de référence obtenue par lissage du G.P.S.

En conclusion, comme elle ne considère que les paramètres de position, la manière de procéder que nous proposons pour analyser les sorties d'un filtre 3D ne permet pas de visualiser des erreurs sur les paramètres d'attitude. Mais, comme la déclivité et le dévers sont supposés être directement mesurés par les inclinomètres, seule la direction devrait être visualisée. Néanmoins, un écart latéral de faible amplitude indique une bonne estimation de la direction. Aussi, afin de diminuer le nombre de courbes, nous omettons le tracé de l'erreur de direction par rapport à la ligne blanche.

3 ETALONNAGE GEOMETRIQUE DU SYSTEME MULTISENSORIEL

3.1 Problématique et objectifs

Pour mettre en œuvre SIREM, les inclinomètres, les codeurs des roues et le G.P.S., leurs positions relatives doivent être connues avec précision, puisque l'ensemble du système multisensoriel a pour objectif d'atteindre des précisions de l'ordre du centimètre en position et de l'ordre du dixième de degré pour les angles d'attitude. Si certains paramètres sont facilement mesurables avec des moyens classiques, d'autres ne le sont que difficilement, comme les positions relatives du centre de l'axe immatériel des roues motrices du robot, du centre optique de la caméra et des axes des repères liés à MELODY et SIREM.

Par ailleurs, les inclinomètres sont supposés être placés de telle sorte qu'ils mesurent la déclivité et le dévers orthogonal du repère lié à SIREM. Malgré un montage mécanique soigné, il n'est pas possible de garantir que ces derniers soient rigoureusement colinéaires aux axes « x » et « y » du repère SIREM. Il existe donc des offsets par rapport à R_S , à déterminer. En outre, pour la localisation à l'estime, il est important de connaître les offsets des inclinomètres par rapport au repère R_M .

La notation « xT_y » représente la matrice homogène du repère « y » dans le repère « x », et les notations utilisées sont :

- « S » correspond à SIREM
- « M » à MELODY
- « B » au bâtiment
- « G » au centre de phase de l'antenne G.P.S.

Le problème revient donc à déterminer, en plus des offsets des inclinomètres par rapport à R_S et à R_M , la matrice homogène « ${}^M T_S$ » et la position « ${}^S P_G$ » de l'antenne G.P.S. dans le repère R_S .

3.2 Mesures et méthode de calcul

On suppose que la distance focale et le pixel servant de référence à la mesure de l'angle de site sont connus : ces paramètres ont été identifiés par le fabricant du capteur. Le repère R_S est un repère immatériel. Il n'est donc pas possible de le matérialiser pour effectuer des mesures. Or, parmi les translations et rotations que l'on cherche à déterminer, certaines sont relatives à ce repère. Nous proposons donc de déterminer sa position et son attitude grâce à des mesures d'angles d'azimut et de site, acquises à l'arrêt. On obtient ainsi la matrice homogène « ${}^0 T_S$ » dans le repère R_0 , repère dans lequel les coordonnées des balises sont données (selon le cas, R_0 peut être R_B ou R_M).

Par ailleurs, grâce à une station de mesure optique⁷ de grande précision, il est possible de :

- déterminer les coordonnées des balises dans R_B ou R_M ;
- calculer la position de l'antenne G.P.S. dans R_B ou R_M .

On détermine la position (en coordonnées homogènes) de l'antenne G.P.S. dans R_S par la relation (R_0 peut être ici indifféremment R_B ou R_M) :

$${}^S P_G = ({}^0 T_S)^{-1} \cdot {}^0 P_G \quad (6.1)$$

L'identification des offsets des inclinomètres par rapport à R_S (notés « dc_{SI} » et « dv_{SI} ») est réalisée de la façon suivante. Ils sont donnés par les différences de dévers et déclivité relevées entre les mesures des inclinomètres et celles déterminées grâce au capteur SIREM seul. En effet, connaissant « ${}^0 T_S$ » à partir des mesures angulaires de SIREM, on en déduit directement « dc » et « dv ».

Les offsets des inclinomètres par rapport à R_M (notés « dc_{IM} » et « dv_{IM} ») sont égaux aux mesures des inclinomètres, lorsque le robot MELODY est placé sur un sol parfaitement horizontal. La manipulation d'étalonnage a été réalisée à l'intérieur d'un bâtiment dont on suppose le sol parfaitement horizontal. En fait, comme on le verra plus tard, des erreurs

⁷ Il s'agit d'une station « totale » de marque SOKKIA et propriété du L.C.P.C. qui, grâce à un faisceau laser, mesure très précisément, dans son repère propre, les trois coordonnées sphériques d'une cible. A ce matériel est associé un logiciel qui permet de définir des repères et de calculer les transformations entre les repères.

d'identification sur les offsets « dc_{IM} » et « dv_{IM} » ont peu d'effet sur le processus de localisation avec SIREM, ce qui est très important car ces offsets sont variables (ils dépendent de la pression des pneus). Par contre, si on désirait faire de l'estime pure (odométrie 3D avec deux inclinomètres), un bon étalonnage de ces paramètres serait crucial (et difficile à réaliser).

3.3 Détermination de R_S dans R_0

Un essai à l'arrêt génère un fichier texte contenant 4 colonnes. A chaque fois qu'une balise est détectée, le système d'acquisition y mémorise l'instant de la mesure, l'angle de site, l'angle d'azimut et le numéro de la balise. Le problème consiste donc à déterminer six paramètres exprimant la position et l'attitude du repère R_S dans R_0 à partir de ce fichier. C'est un problème non linéaire dont la solution analytique (qui existe dans le cas de trois balises) est particulièrement complexe [Khalil, Murareci, 93] et très sensible au bruit.

Comme les mesures sont naturellement entachées de bruit, le problème consiste aussi à prendre en compte toutes les mesures redondantes afin d'en extraire la « meilleure » estimation de la matrice de passage entre R_S et R_0 , notée « 0T_S ».

Une première solution, dite déterministe, consiste à utiliser la méthode statique de Le Corre présentée dans le chapitre 1, qui, après mise en forme, utilise une méthode itérative de type Newton-Raphson. Cette méthode présente l'inconvénient de ne considérer que trois mesures de SIREM. Ainsi, utilisée telle que, elle ne permet pas de prendre en compte l'information statistique de toutes les mesures.

Nous proposons une méthode stochastique, basée sur l'utilisation d'un filtre de Kalman étendu. Cette approche nous offre une "pseudo-optimalité" statistique avec un coût de calcul proportionnel au nombre de mesures. Outre ces avantages, la méthode utilise les équations d'observation du filtre « EKF6a », ce qui ne nécessite pas de nouveau développement mathématique.

Le vecteur d'état choisi est toujours celui qui correspond à la paramétrisation déjà retenue pour « EKF6a » :

$$X = [x \ y \ z \ \psi \ dc \ dv]^t \quad (6.2)$$

Lors de l'étalonnage, le repère R_S est fixe. Par conséquent, le modèle d'évolution le plus approprié est un modèle constant :

$$X_{k+1} = X_k + \alpha \quad (6.3)$$

L'évolution est rendue possible grâce au bruit de modèle.

Finalement, en regroupant cette relation avec les équations d'observation de « EKF6a » (cf. équation (5.29)), on obtient la forme d'état :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \alpha_k \\ \begin{pmatrix} \lambda_k \\ \sigma_k \end{pmatrix} = \mathbf{G}_B(\mathbf{X}_k) + \beta_k \end{cases} \quad (6.4)$$

La méthode d'identification proposée ici consiste à calculer la moyenne des états estimés par un filtre de Kalman étendu appliqué au modèle précédent, une fois le régime permanent atteint. En effet, même si le filtre est initialisé par une méthode déterministe fournissant une localisation statique proche de la solution, il existe un régime transitoire à ne pas considérer.

Le filtre, quant à lui, a un bruit de modèle Q_α additif constant. L'évolution de la variance lors d'une étape de prédiction du filtrage est donc donnée par l'expression :

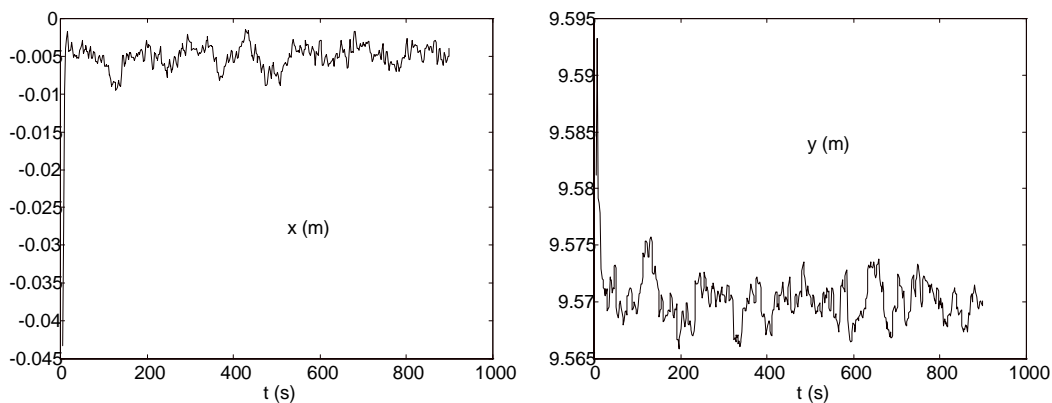
$$P_{k+1/k} = P_{k/k} + Q_\alpha \quad (6.5)$$

$$Q_\alpha = \text{diag}(1 \cdot 10^{-5}, 1 \cdot 10^{-5}, 1 \cdot 10^{-6}, 1 \cdot 10^{-6}, 1 \cdot 10^{-6}, 1 \cdot 10^{-6}) \text{ (en m}^2 \text{ et rad}^2\text{)} \quad (6.6)$$

Les valeurs numériques de la variance du bruit de modèle réalisent un bon compromis entre de fortes oscillations de l'état pour une variance Q_α élevée et une convergence lente dans le cas inverse. Les valeurs de l'équation (6.6) ont été obtenues après différents essais.

Les sorties d'un filtre correspondant à un essai réel sont reportées sur la figure 6.7, ci-dessous.

Du fait du bruit additif constant, cette méthode d'identification oscille autour de la solution (figure 6.7), ce qui implique le calcul de la moyenne. Ainsi, du fait que l'état est assez libre d'évoluer, chaque nouvelle mesure de SIREM modifie sensiblement l'estimation de l'état. Enfin, une fois l'état « X » déterminé, la matrice homogène recherchée est donnée par les équations (4.34).



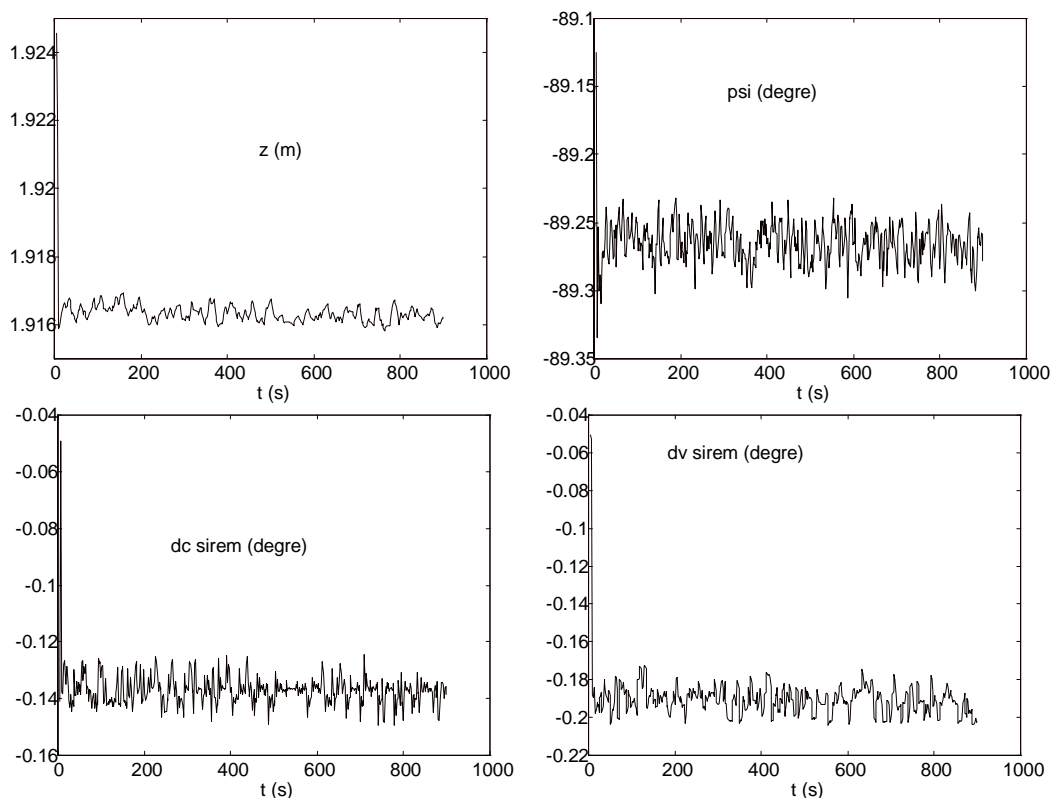


figure 6.7 : états estimés par un EKF à modèle d'évolution constant dans le repère R_B

3.4 Résultats numériques

En appliquant le mode opératoire et la méthode décrits précédemment, on obtient les résultats suivants. Les angles sont donnés en degré avec une précision estimée de quelques centièmes de degré et les distances en mètres avec une précision du millimètre. La précision retenue est compatible avec les objectifs visés et la confiance que l'on a dans les résultats expérimentaux.

$${}^S P_G = [0.003 ; 0.001 ; 0.193 ; 1]^T$$

$$M_{T_S} = \begin{bmatrix} 0.99999256192207 & 0.00303145653636 & 0.00238461145925 & -0.287 \\ -0.00302346681349 & 0.99998982795431 & -0.00334703396026 & -0.006 \\ -0.00239473359085 & 0.00333979927115 & 0.99999155546027 & 1.741 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- offset entre l'inclinomètre de la déclivité et R_S : $dc_{SI} = -0.143$ deg
- offset entre l'inclinomètre de dévers et R_S : $dv_{SI} = 0.132$ deg
- offset entre l'inclinomètre de la déclivité et R_M : $dc_{IM} = 0.006$ deg
- offset entre l'inclinomètre de dévers et R_M : $dv_{IM} = -0.322$ deg

4 EVALUATION DE LA PRECISION DE SIREM SEUL A L'ARRET

Quand le véhicule est à l'arrêt, il est possible de déterminer sa position et son attitude avec le capteur SIREM *seul* ; on peut ainsi apprécier la précision de ce dernier.

Cette précision dépend des facteurs suivants : les bruits de mesure, la modélisation du capteur, l'étalonnage des paramètres intervenant dans le modèle (focale et pixel milieu) et de la configuration géométrique (configuration des trois balises, distances aux balises). Pour pouvoir quantifier précisément cette précision, il est nécessaire d'utiliser un moyen de comparaison fiable. Un tel étalon de mesure existe au L.C.P.C. : il s'agit de la station de mesure SESSYL. Néanmoins, comme le capteur SIREM est fixé sur le robot MELODY, la manipulation sur SESSYL demande un travail de préparation important (sans compter le balisage du terrain). De plus, on sait que le G.P.S. R.T.K. Trimble est précis à quelques centimètres ; il peut donc servir d'élément de comparaison, puisque l'on a déterminé la translation de passage qui existe entre le centre de son antenne et le point « S ».

A partir des mesures brutes de SIREM, on utilise le filtre qui a servi à l'étalonnage pour déterminer la posture de R_S . La figure 6.8 reporte les positions déterminées par le G.P.S. et SIREM seul, lors d'un essai statique.

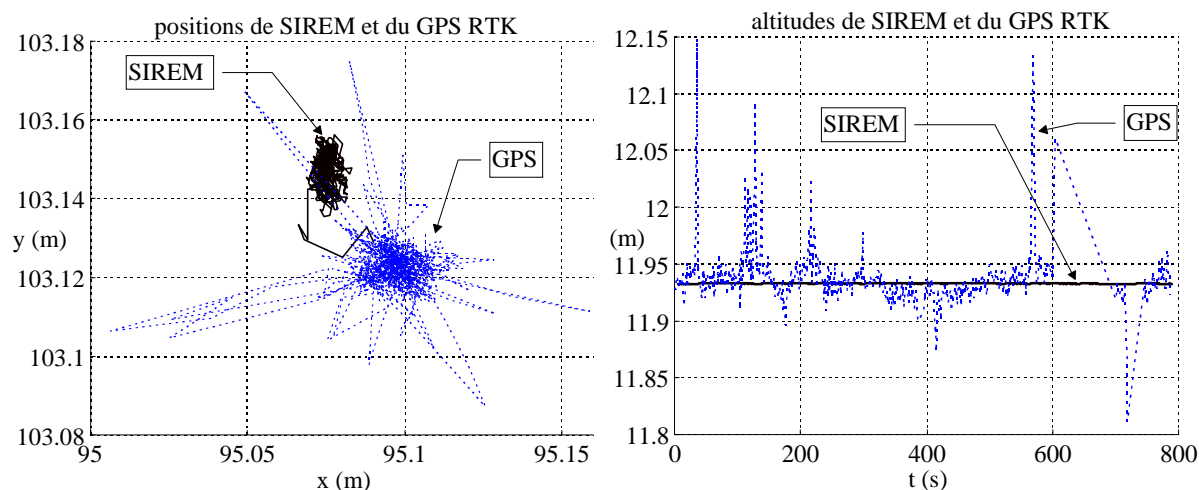


figure 6.8 : position et altitude estimées à partir de SIREM seul

Il est à noter que le fonctionnement du G.P.S. lors de cet essai n'est pas très bon, bien que tous les points considérés sur la figure 6.8 soient des points fournis par le G.P.S. avec le facteur de qualité le plus élevé.

Le nuage de points obtenu grâce aux mesures de SIREM en (x, y) est inclus dans une ellipse de 1x2 centimètres d'axes principaux. Pour le G.P.S., hormis les points singuliers, le nuage a une taille légèrement supérieure. La distance séparant les centres des deux nuages est de 2,5 cm.

Les oscillations en « z » de SIREM sont de l'ordre du millimètre, ce qui n'est pas perceptible sur la figure 6.8 à cause des oscillations de plusieurs centimètres du G.P.S. L'altitude moyenne donnée par le G.P.S. est 11,94 m, soit un millimètre de différence avec SIREM.

On constate donc une bonne concordance entre les positions du G.P.S. et celles obtenues grâce à SIREM. Ces résultats permettent de quantifier grossièrement la précision de SIREM seul, même si ce travail demanderait plusieurs itérations de cette manipulation à différentes positions par rapport aux balises.

Finalement, il semble, sur cet essai en tous cas, que le capteur SIREM est assez bien modélisé et que les paramètres du modèle (distance focale et pixel définissant un angle de site nul) sont assez bien déterminés. En particulier, la précision en « z » nous semble très convenable.

5 ETUDE DES SIGNAUX DES INCLINOMETRES SUR MELODY

Un inclinomètre est sensible à la gravité terrestre et à toute accélération extérieure qui lui est appliquée (accélérations de l'engin, vibrations et chocs). Comme ces phénomènes sont additifs, le signal d'un inclinomètre est la réponse à cet ensemble de sollicitations, et il n'est donc pas possible de distinguer *a priori* la partie due aux accélérations de celle due à la gravité.

Néanmoins, nous avons déjà émis l'hypothèse que les accélérations de l'engin étaient négligeables, compte tenu des dynamiques faibles des machines de chantier de type « finisseur ». Ainsi, il reste à distinguer la composante due aux chocs et vibrations, qui a un comportement haute fréquence (> 1 Hz). Nous pensons que cette distinction peut être réalisée par un simple filtrage passe-bas ce qui, une fois de plus, est justifié par les variations lentes d'attitude des machines considérées.

Dans ce paragraphe, on étudie le comportement d'inclinomètres embarqués sur MELODY, lorsque celui-ci franchit le PEM à vitesse constante ou variable.

5.1 Origines des bruits

Les oscillations qui apparaissent dans les mesures des inclinomètres ont plusieurs origines :

- *bruit dû au moteur de SIREM.* En effet, le réducteur du moteur de SIREM engendre des oscillations de 0,2 degré. Ce bruit est visible sur la figure 6.9 pendant la phase d'arrêt. Nous pouvons l'imputer à SIREM de façon assez certaine puisqu'il contient une harmonique correspondant exactement à la fréquence de rotation de la caméra.
- *bruit dû au suivi de ligne.* Lors du suivi de la ligne blanche, MELODY effectue quelques oscillations provenant de masquages de la ligne par de l'herbe, par exemple.
- *bruit dû à la surface de roulement.* Le terrain, en dehors du PEM, est de l'herbe ce qui provoque inévitablement des oscillations. Le PEM, quant à lui, provoque quelques oscillations au moment des changements de surface ou lorsqu'il se déforme sous le poids de MELODY.
- *bruit dû à la conversion analogique numérique.* Grâce à la résolution que nous avons choisie, ce bruit est négligeable par rapport aux autres.

La figure 6.9 indique les ordres de grandeur de ces différents bruits. On constate que, lorsque le robot se déplace, le bruit dû au moteur de SIREM devient négligeable. Les oscillations pour $t = 23$ secondes correspondent au déblocage des freins de MELODY.

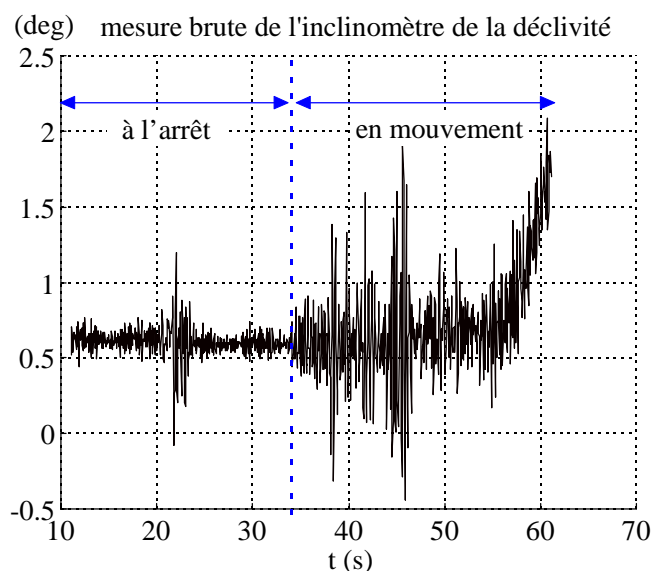


figure 6.9 : mesure brute de l'inclinomètre de la déclivité

Il est à noter que notre véhicule n'est pas équipé de moteur thermique, source évidente d'oscillations. Il nous est donc malheureusement impossible de quantifier l'erreur engendrée

par ce genre de motorisation (erreur qui est de plus très dépendante de la fonction de transfert de l'ensemble mécanique). Néanmoins, nous pensons que ce bruit peut être considéré comme faisant partie des hautes fréquences et, par là même, être supprimé comme les autres.

Enfin, il faut remarquer que les contacts de l'outil avec le sol peuvent provoquer des vibrations. Dans le cas d'un finisseur, la table « glisse » sans choc ; l'effet de ses contacts avec le sol n'a pas d'incidence sur les inclinomètres.

5.2 Franchissement du PEM à vitesse constante

Les signaux des inclinomètres, correspondant à un franchissement du PEM à vitesse constante (6 cm/s), sont indiqués sur la figure 6.10. Sur cette même figure sont superposées les valeurs lissées représentant les valeurs moyennes.

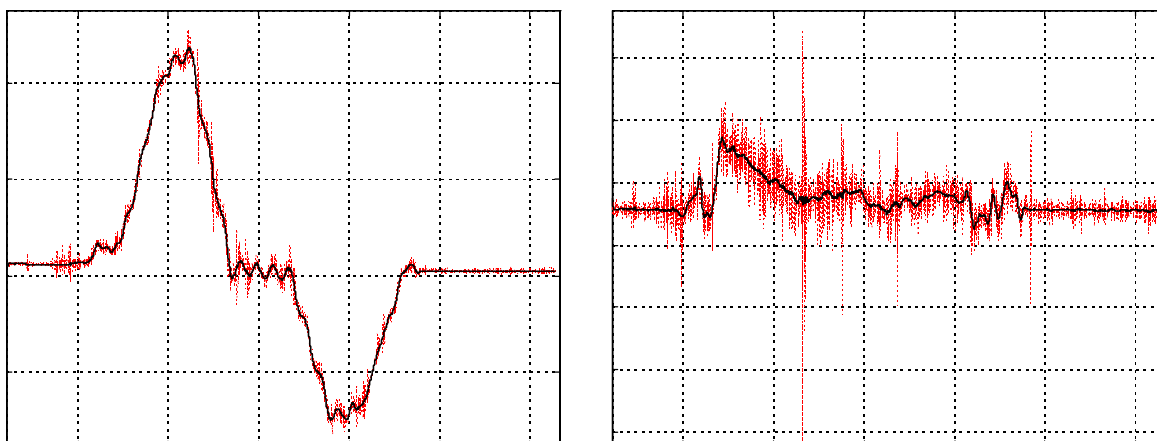


figure 6.10 : mesures brutes (pointillés) et lissées des inclinomètres lors du franchissement du PEM

On constate un bruit moyen dont l'amplitude, crête à crête, est inférieure à un degré. Par moment, des pics jusqu'à 5 degrés peuvent apparaître.

Si l'on s'intéresse à la valeur lissée de la déclivité, on constate, par moments, des oscillations d'amplitude 0,8 degré crête à crête (par exemple, vers $t = 150$ s). Ces phénomènes ont deux origines. La première est la montée des roues sur le bord du PEM, de hauteur 4 cm. La deuxième est liée à la conception du PEM. En effet, le PEM est constitué d'une armature métallique sur laquelle sont fixées des planches de contre-plaqué de 15 mm d'épaisseur. La masse de MELODY provoque un fléchissement des planches entre les armatures (cf. figure 6.11).

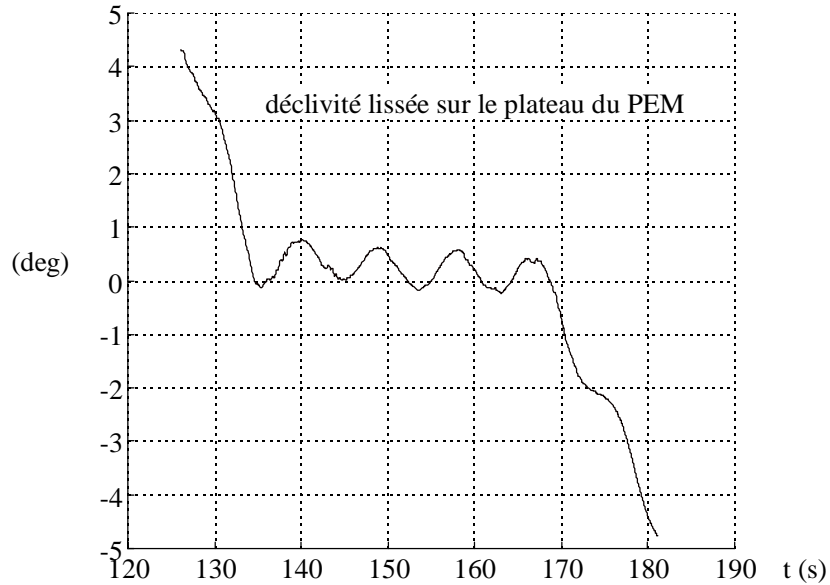


figure 6.11 : oscillations sur le plateau du PEM, dues aux armatures

On peut tracer la déclivité en fonction de l'abscisse « x » qui, sur cette trajectoire, correspond sensiblement à l'abscisse curviligne (cf. figure 6.12).

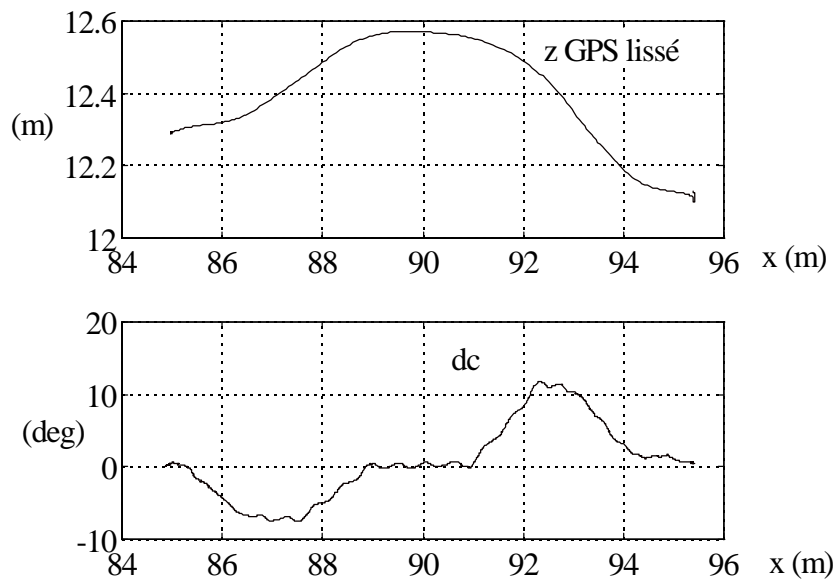


figure 6.12 : déclivité et altitude en fonction de l'abscisse

Comme le plateau du PEM a été placé à l'horizontale, et comme les altitudes, au début et la fin, sont différentes, les maxima de déclivité dans la montée et la descente sont différents (respectivement 12 et -8 degrés). Il est à noter que les 12 degrés coïncident avec la pente maximum que peut monter MELODY. De plus, on rappelle que l'angle de site maximum mesurable par SIREM est de 10 degrés (si on visualise les angles de site de SIREM mesurés sur cette trajectoire, on constate qu'ils n'excèdent pas 8 degrés). En d'autres termes, la trajectoire générée par le PEM s'approche des limites du système.

5.3 Franchissement du PEM à vitesse variable

On fait franchir à MELODY le PEM avec le profil de vitesse suivant (vitesses obtenues à partir des mesures odométriques brutes - $V_{min} = 4 \text{ cm/s}$, $V_{max} = 16 \text{ cm/s}$, période = 20 s) :

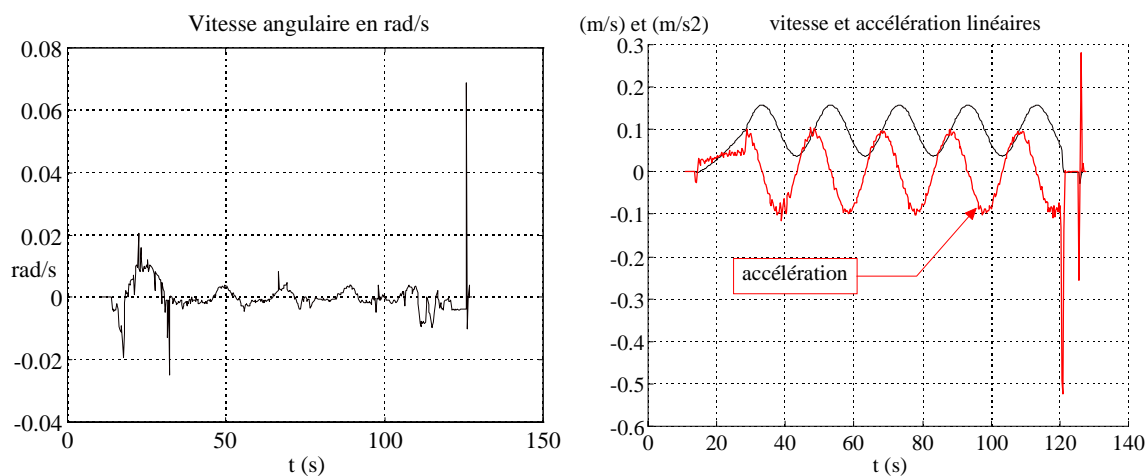


figure 6.13 : vitesses et accélération linéaire en fonction du temps

On constate qu'il n'y a pas ou peu de vitesse angulaire (ligne droite) ; le bruit est dû au suivi de ligne. L'accélération de la figure 6.13 est obtenue par différence centrée de la vitesse linéaire. Comme l'accélération linéaire affecte davantage la mesure de la déclivité, nous nous attacherons uniquement à cette mesure. Nous proposons de comparer cet essai avec le précédent à vitesse constante, et de superposer l'accélération. Comme il n'est pas possible de comparer les essais en fonction du temps (les vitesses sont différentes), nous proposons d'utiliser comme abscisse, le « x estimé » par un EKF. Même si, en affectant les mesures des inclinomètres, les accélérations modifient le comportement du « x estimé », il est possible de s'intéresser au moins aux amplitudes. C'est dans cette optique qu'il faut analyser la figure 6.14.

On constate donc que l'accélération peut biaiser les mesures inclinométriques de 0,5 degré, dans le pire des cas, et ce d'autant plus que les angles sont élevés : les écarts sont les plus importants pour $x = 92,5 \text{ m}$ et $x = 87 \text{ m}$. Pour des angles petits, l'erreur constatée est de 0,15 degré.

Les résultats reportés ici ne contredisent pas l'utilisation d'inclinomètres pour la localisation de finisseurs. Ils indiquent simplement, ce que l'on savait *a priori*, qu'en cas de vitesse variable, autrement dit en présence d'accélération, leur utilisation n'est pas aussi aisée que celle que nous proposons.

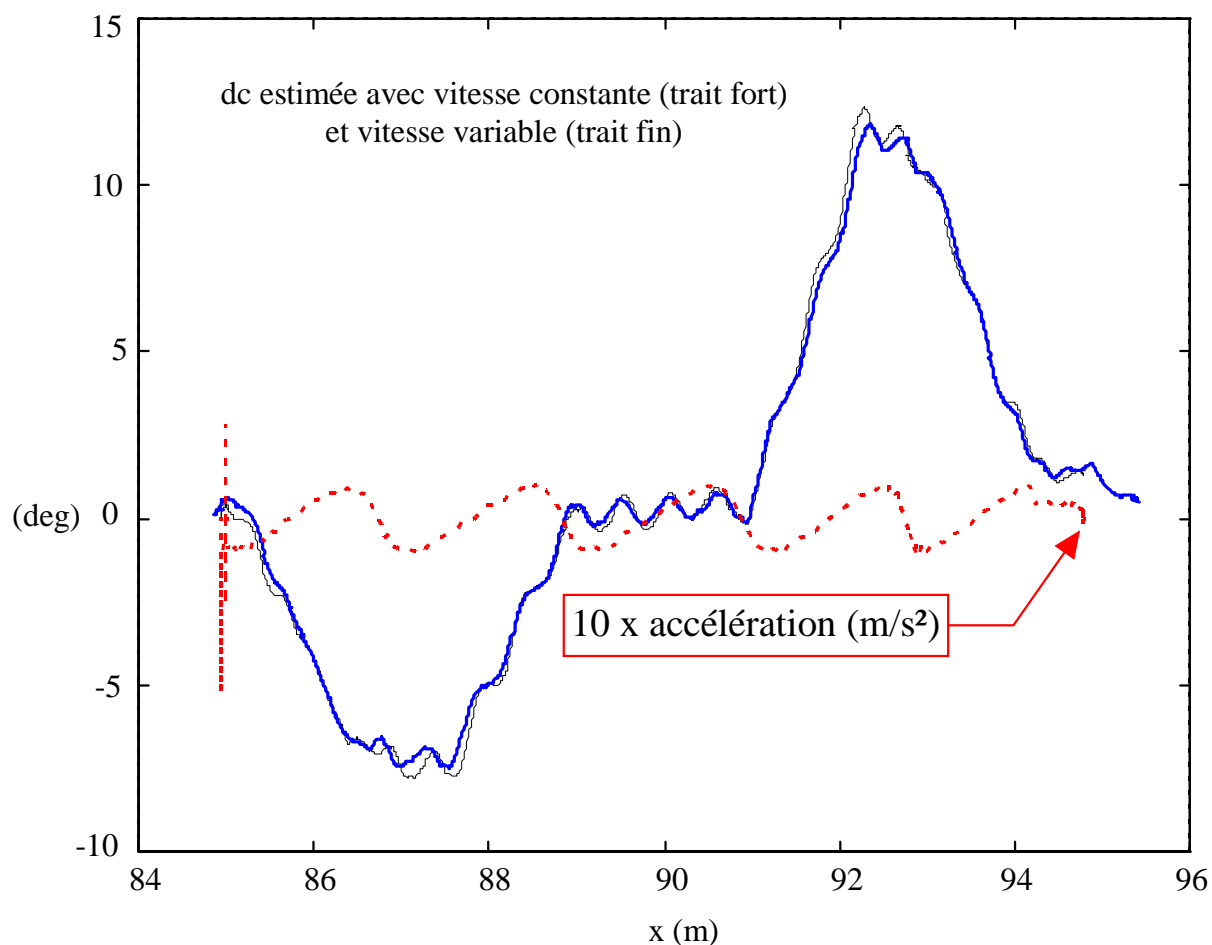


figure 6.14 : comparaison entre un essai à vitesse constante et un essai à vitesse variable

5.4 Conclusion quant à l'utilisation d'inclinomètres sur un véhicule

De cette étude, il ressort que les inclinomètres sont utilisables pour déterminer la déclivité et le dévers orthogonal d'un engin dont les dynamiques correspondent à celle d'un finisseur. Dans ce cas, les accélérations ont un effet négligeable, même lors du franchissement du PEM. Une étude à vitesse variable a permis de se rendre compte que la limite d'utilisation est supérieure à celle que les applications considérées vont atteindre.

En outre, un filtrage de type passe-bas semble être un moyen simple et efficace pour filtrer les signaux bruts des inclinomètres.

Par contre, il ne nous a pas été possible de déterminer la sensibilité de ce genre de capteur aux vibrations mécaniques induites par un moteur thermique ou par les vibrations de la table du finisseur par exemple.

6 CONCEPTION ET ESSAI D'UN FILTRE A 4 ELEMENTS PRENANT EN COMPTE LES OFFSETS DES INCLINOMETRES PAR RAPPORT AUX REPERES R_S ET R_M

6.1 Approche

Dans ce paragraphe, on ne considère que les offsets des inclinomètres par rapport à R_S et par rapport à R_M pour concevoir un nouveau filtre. On rappelle que ces offsets ont été déterminés au paragraphe 3. La translation entre les points M et S ne sera volontairement pas prise en compte ici, par souci de simplification.

Cette approche peut se justifier, pour l'instant intuitivement, par le fait que SIREM est un capteur goniométrique ; par conséquent, son hybridation avec d'autres capteurs sera plus sensible à des rotations non modélisées qu'à des translations non modélisées.

Pris dans son ensemble, le problème n'est pas simple. Distinguons deux sous problèmes : celui lié aux offsets par rapport à R_M et celui des offsets par rapport à R_S . Ces problèmes correspondent, pour l'un, à la phase de prédiction (odométrie 3D avec deux inclinomètres) et, pour l'autre, à l'étape d'estimation (recalage avec SIREM).

Les inclinomètres ont été disposés de telle sorte que celui de la déclivité soit parallèle à l'axe « x_S » du repère SIREM et celui du dévers parallèle à l'axe « y_S ». Comme on l'a déjà vu, cette hypothèse mécanique est évidemment mal vérifiée puisque le repère SIREM est mal connu. Dans l'absolu, il existe trois paramètres de rotation à déterminer. Néanmoins, l'erreur de positionnement angulaire (offset) qui a le plus d'effet sur un inclinomètre est celle qui se trouve dans son plan de sensibilité. Comme les autres sont faibles, elles seront négligées. Ainsi, en suivant ce raisonnement, les inclinomètres mesurent la déclivité et le dévers orthogonal du repère SIREM, aux offsets près. En d'autres termes, connaissant les offsets « dc_{SI} » et « dv_{SI} » et les mesures « α » et « β » des inclinomètres, la déclivité « dc_S » et le dévers orthogonal « dv_S » de R_S sont donnés par les relations :

$$dc_S = \alpha + dc_{SI} \quad (6.7)$$

$$dv_S = \beta + dv_{SI} \quad (6.8)$$

En outre, comme il a été vu précédemment, les mesures « α » et « β » utilisées dans ces équations, ont subi au préalable un filtrage passe-bas.

Avant d'avoir pensé à utiliser les offsets des inclinomètres avec R_M , nous avons considéré le problème dû aux rotations entre SIREM et l'odomètre. Notre première idée a été de chercher les localisations d'un nouveau repère R_T ayant pour origine S et la même attitude que R_M . Grâce à l'étalonnage, la matrice d'attitude ${}^M A_S = {}^T A_S$ de R_S dans R_T est connue, ce qui permet, avant chaque recalage avec SIREM, de ramener les angles « λ » et « σ » dans R_T . Comme la matrice de passage est constante, les statistiques des bruits de mesure de SIREM peuvent être déterminées une fois pour toute dans R_T ¹. Enfin, puisque l'on néglige la translation entre S et M , le modèle d'évolution de R_T est identique à celui de R_M , c'est-à-dire à celui de « EKF4a » (cf. chapitre 5).

L'implantation de ce filtre n'a pas donné entière satisfaction ; son comportement indiquait des problèmes d'étalonnage. En effet, quelques centièmes de degrés d'erreur sur « dc » et « dv » peuvent provoquer des oscillations de quelques millimètres voire centimètres, si les balises sont éloignées. Il s'avère, en reconsidérant la manipulation d'étalonnage, que des erreurs de mesure ont pu être commises sur les rotations de passage de R_M à R_S dans un ordre de grandeur non négligeable (quelques centièmes de degré). Notamment, il a été supposé, pour définir l'axe « z » de R_M , que MELODY reposait sur un sol parfaitement horizontal. Cette hypothèse, pratiquement invérifiable pour les petits angles considérés, est certainement la cause majeure des erreurs de l'étalonnage.

Par conséquent, nous proposons une autre approche dans laquelle le repère R_T n'a plus de raison d'être. Dans ce cas, les 4 paramètres (x , y , z , ψ) du filtre sont ceux du repère R_S et la déclivité et le dévers orthogonal de SIREM sont donnés par les équations (6.7) et (6.8).

A partir de la manipulation d'étalonnage, l'angle de rotation des axes « x_S » et « y_S » de SIREM autour de l'axe « z » de R_M , angle noté par la suite « ψ_0 », peut être déterminé avec une très bonne précision, en tous cas bien meilleure que celle des deux autres rotations. Comme l'angle d'azimut de SIREM est mesuré par un codeur optique relativement à un axe choisi arbitrairement, on propose de réétalonner SIREM de telle sorte que les projections de « x_S » et « x_M » sur le plan (o , x , y) de R_0 soient confondues. Autrement dit, on soustrait aux angles d'azimut l'angle « ψ_0 ». Cette méthode n'est valable que pour des angles de rotation « dc » et « dv » entre R_M et R_S petits, ce qui suppose que l'axe de rotation de la caméra soit le plus orthogonal possible à l'axe passant par le milieu de l'axe des roues.

¹ En fait, comme la matrice est proche de l'unité, les variances dans R_T restent sensiblement les mêmes, et donc cette étape n'est pas indispensable

Cependant, il n'est pas suffisant de ne considérer que « ψ_0 » car il faut aussi prendre en compte les offsets « dc_{IM} » et « dv_{IM} » des inclinomètres par rapport au repère R_M . Ces offsets interviennent dans l'étape de prédiction, car le déplacement odométrique 3D (qui définit le déplacement du point S et la variation de direction) se fait localement dans le repère R_M . Dans les équations odométriques, ce sont donc la déclivité et le dévers orthogonal du repère R_M qu'il faut utiliser. Or, on a :

$$dc_M = \alpha - dc_{IM} \quad (6.9)$$

$$dv_M = \beta - dv_{IM} \quad (6.10)$$

Dans ce cas, le modèle odométrique du filtre « EKF4a » de l'équation (5.67) devient :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta_i \cos(\alpha_i - dc_{IM}) \cos(\psi_i) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta_i \cos(\alpha_i - dc_{IM}) \sin(\psi_i) \\ z_{i+1} = z_i + \Delta_i \sin(\alpha_i - dc_{IM}) \\ \psi_{i+1} = \psi_i + \omega_i \sqrt{\cos(\alpha_i - dc_{IM})^2 - \sin(\beta_i - dv_{IM})^2} \end{cases} \quad (6.11)$$

On peut remarquer dans l'équation (6.11) que « dv_{IM} » n'intervient que pour l'évolution de la direction. Dans le cas d'un sol peu incliné (α et β inférieurs à 10 degrés), sa valeur est négligeable car, en faisant un développement limité, il apparaît une correction au deuxième ordre (à cause du carré) négligeable devant la valeur proche de l'unité du cosinus. Par conséquent, seul « dc_{IM} » est à considérer.

Par ailleurs, il est important de relativiser les effets des différents offsets. Par exemple, à une vitesse de 10 cm/s et entre deux relevés de SIREM espacés de 2 secondes, une erreur sur « dc_{IM} » de 0,1 degré engendre une erreur en « z » de 0,35 mm, ce qui est négligeable². A l'inverse, une erreur sur « dc_{SI} » de 0,1 degré correspond à une erreur de 7 cm en « z » pour une balise distante de 40 m. Par conséquent, les offsets « dc_{SI} » et « dv_{SI} » doivent être parfaitement étalonnés contrairement à « dc_{IM} » et « dv_{IM} » dont les effets sont peu sensibles. On constate donc que comme les offsets « dc_{IM} » et « dv_{IM} » n'ont pas beaucoup d'effet sur le processus de localisation en présence de SIREM, le fait que leurs valeurs soient variables (à cause des pneus ou des variations de charge sur l'engin) a peu d'influence sur la qualité des localisations.

Le filtre obtenu selon le raisonnement exposé dans ce paragraphe est identique à « EKF4a » excepté qu'il tient compte des offsets, en considérant les équations (6.7), (6.8), et (6.11). Il sera appelé « EKF4b ».

² Par contre, si l'on souhaitait se localiser à l'estime sans SIREM, une erreur sur « dc_{IM} » aurait un effet à long terme non négligeable.

6.2 Essais du filtre sur données réelles avec lissage des inclinomètres

Des essais ont été réalisés avec le robot MELODY, sur le terrain balisé de l'Ecole Centrale de Nantes. Les résultats décrits dans ce paragraphe ont été obtenus en traitement différé. Le PEM a été disposé de telle sorte qu'il soit colinéaire à l'axe des abscisses. Ainsi, tracer les courbes en fonction de l'abscisse (estimée), est équivalent (au signe près) à tracer les courbes en fonction de l'abscisse curviligne.

6.2.1 Réglage du filtre

La méthodologie pour le réglage des paramètres du filtre « EKF4b » est la même que pour le filtre 2D, c'est-à-dire par essais successifs. Comme les variances de l'odomètre et de l'angle d'azimut sont déjà connues dans le filtre 2D, il ne reste qu'à déterminer celles des inclinomètres, de l'angle de site et du bruit de modèle.

La variance estimée du bruit de mesure de l'angle de site est obtenue à partir de l'erreur de mesure d'un pixel. Les mesures des inclinomètres qui servent dans le filtre de Kalman sont issues d'un filtrage passe-bas que l'on suppose réglé de telle sorte que le bruit résiduel en sortie ait une amplitude inférieure à 0,1 degré. Par conséquent, bien que les deux inclinomètres soient différents, on pose que leur variance est identique et connue. Ainsi, il ne reste plus que le bruit de modèle à déterminer. Sa variance a une influence immédiate sur le comportement du filtre, notamment sur la composante en « z » : elle permet un réglage plus ou moins passe-bas du filtre. En outre, c'est elle qui pondère l'effet des recalages de SIREM sur le modèle odométrique. Grossièrement, un bruit de modèle petit indique une grande confiance dans le modèle odométrique 3D et, dans ce cas, les recalages de SIREM sont moins marqués. Dans le cas inverse, on donne plus d'importance aux mesures de SIREM. Ce paramètre est donc le cœur du réglage de l'hybridation de SIREM avec l'odométrie 3D.

Les variances obtenues sont les mêmes que pour les simulations, exceptée la variance du bruit de modèle qui est augmentée pour prendre en compte les erreurs liées au fait que le modèle n'inclut pas la translation entre S et M.

$$\text{bruit de modèle : } Q_{\alpha} = 10e^{-6} \text{diag}(1\text{m}^2; 1\text{m}^2; (0,707 \text{ m})^2; (0,032 \text{ rad})^2) \quad (6.12)$$

$$\text{bruit d'entrée : } Q_{\gamma} = \text{diag}((0,0004 \text{ m})^2; (0,0006 \text{ rad})^2; (0,0017 \text{ rad})^2; (0,0017 \text{ rad})^2) \quad (6.13)$$

$$\text{bruit de SIREM : } Q_{\nu} = \text{diag}((0,0017 \text{ rad})^2; (5,7 \cdot 10^{-6} \text{ rad})^2) \quad (6.14)$$

6.2.2 Essai à l'arrêt

Le comportement du filtre «EKF4b» à l'arrêt est analysé dans ce paragraphe. Contrairement au paragraphe 4 où le capteur SIREM était considéré seul («EKF6a»), on s'intéresse ici au comportement global du filtre avec tous ses capteurs. Notamment, les codeurs mais surtout les inclinomètres apportent des bruits supplémentaires. Des paramètres géométriques mal identifiés (plus précisément les offsets entre R_S et les inclinomètres) provoquent des oscillations sur l'altitude estimée.

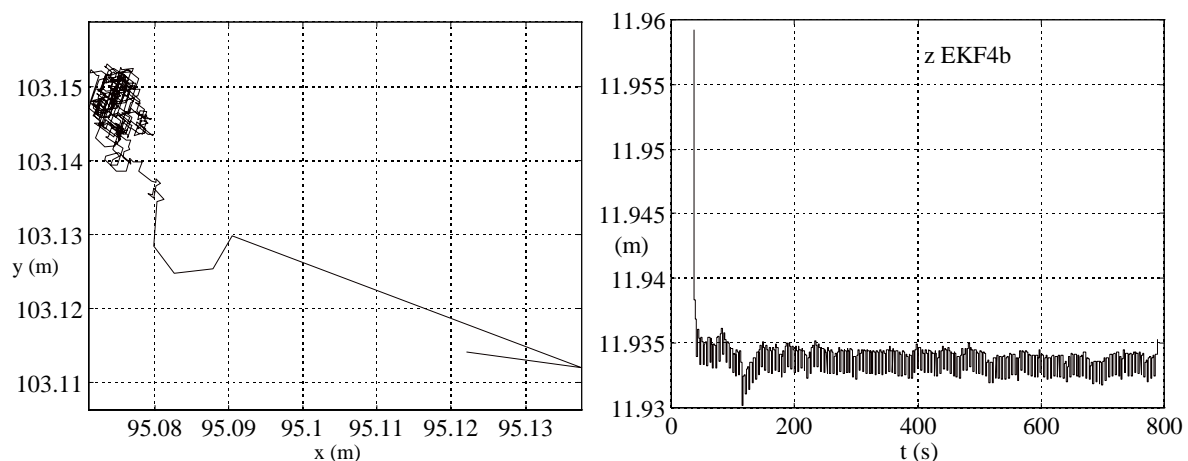


figure 6.15 : position et altitude estimées par «EKF4b» à l'arrêt

On constate que le comportement de «EKF4b» est satisfaisant à l'arrêt puisque le nuage de points en (x, y) est inclus dans un cercle de 1 centimètre de diamètre, après correction de la position initiale, comme lorsque SIREM est utilisé seul. Les oscillations en «z» sont, elles aussi, convenables (3 mm), ce qui traduit une bonne identification des offsets.

6.2.3 Analyse détaillée d'un essai sur le PEM

Comme indiqué précédemment, le franchissement du PEM est perçu comme un moyen d'exciter le système de localisation, mais il ne génère pas forcément un comportement réaliste de finisseur. Ainsi, les régimes transitoires sont à analyser avec précaution.

Les figures de ce paragraphe traduisent le comportement de «EKF4b» sur des données réelles. Après une phase d'accélération, la vitesse est constante et égale à 6 cm/s.

L'erreur initiale de la méthode statique est rapidement corrigée. L'écart latéral semble indiquer que le comportement 2D n'est pas ou peu affecté par la variation d'altitude, ce qui est satisfaisant. Néanmoins, comme nous ne connaissons pas le décalage longitudinal qui peut exister entre les positions estimées par le filtre et le G.P.S., nous ne pouvons quantifier le retard en «x» que peut avoir le filtre.

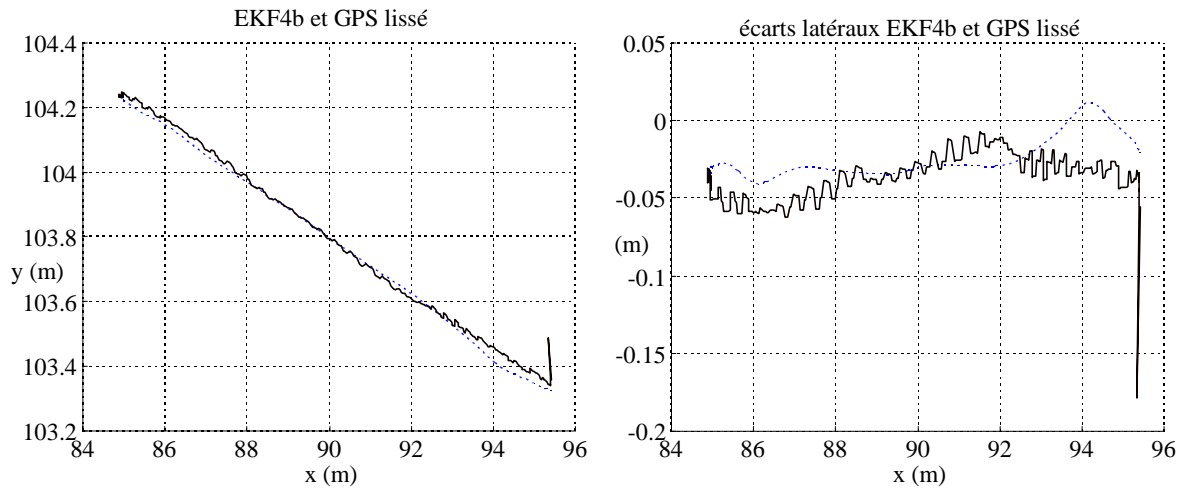


figure 6.16 : comportement 2D de « EKF4b » comparé au G.P.S. lissé (pointillés)

L'écart latéral, comme celui du G.P.S., subit l'effet du dévers ; il est inférieure à 10 cm. Cependant, l'écart du G.P.S., pour $x = 94$ m, n'est pas présent sur l'erreur latérale de « EKF4b ». Nous l'expliquons par le fait qu'un déplacement transversal de la caméra dû au dévers et au bras de levier (selon l'axe (M, y) du repère R_M) n'est absolument pas modélisé.

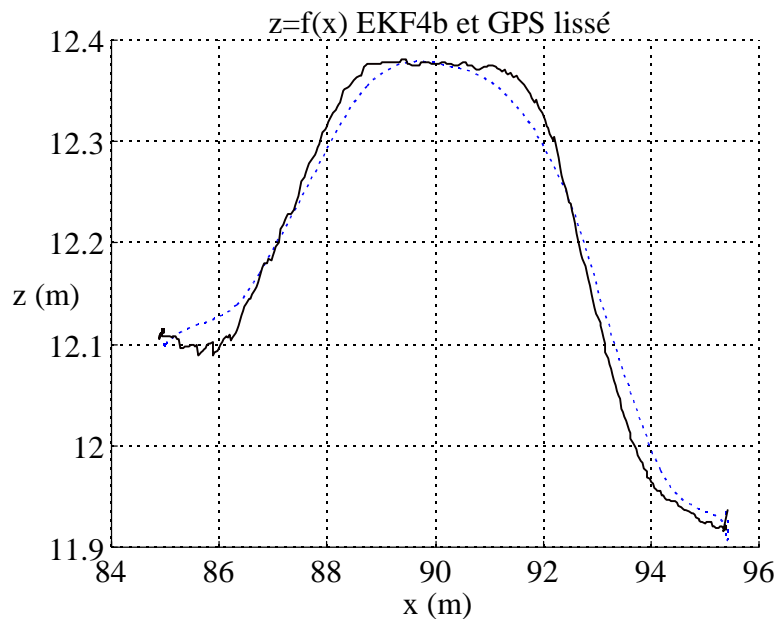
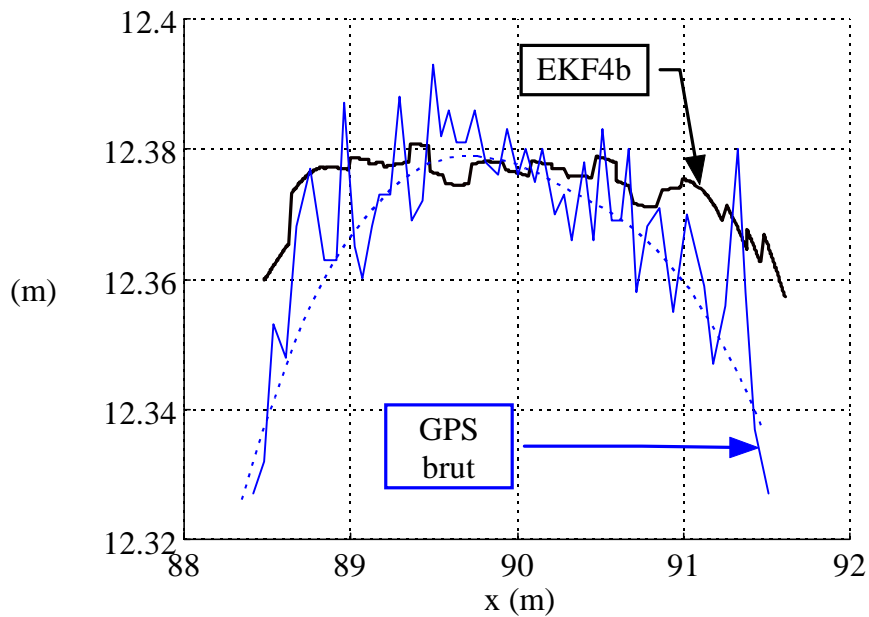


figure 6.17 : z estimé de « EKF4b » comparé au G.P.S. lissé (pointillés)

Le comportement 3D de « EKF4b » de la figure 6.17 est satisfaisant. On constate en premier lieu la bonne concordance des positions statiques du filtre et du G.P.S. (au début et à la fin de la trajectoire). Lorsque le mobile est entièrement monté sur le plateau sensiblement horizontal du PEM, les deux systèmes sont concordants (cf. figure 6.18). On constate même des oscillations plus faibles pour « EKF4b » (inférieures au demi centimètre alors que celles du G.P.S. peuvent dépasser deux centimètres).



**figure 6.18 : z estimé de « EKF4b » comparé au G.P.S. brut et lissé (pointillés)
zoom sur le plateau**

Par contre, la courbe de la figure 6.17 traduit un comportement assez « passe bas » de « EKF4b » puisque l'on voit clairement qu'à chaque changement de pente, son estimation du « z » prend du retard par rapport au « z G.P.S. ». Ce comportement est très certainement le résultat de la non modélisation de la translation qui existe entre S et M. On assiste typiquement à des régimes transitoires. En effet, à chaque point anguleux, le bras de levier non modélisé qui existe entre la caméra et l'axe des roues avance ou retarde le modèle odométrique par rapport à la caméra. Par exemple, lorsque le mobile monte sur le PEM, les mesures des roues modélisent un déplacement de la caméra vers l'avant alors qu'il peut arriver que la caméra recule à cause du changement de déclivité.

Le comportement du filtre tel qu'il est présenté ici est le résultat d'un compromis. On peut, si on le souhaite, augmenter la matrice du bruit de modèle, ce qui a tendance à donner plus de poids aux mesures de SIREM par rapport au modèle odométrique 3D. Dans ce cas, les erreurs de modèle sont plus vite corrigées. On reporte sur la figure 6.19 le résultat d'un essai pour lequel la matrice « Q_α » a été multipliée par 10.

Comme indiqué, le comportement de « EKF4a » est plus dynamique que précédemment, mais au dépend d'oscillations plus importantes (1,5 cm en z). Néanmoins, on constate une bonne adéquation avec la position G.P.S. car les phénomènes de traînage ont disparu.

Comme les régimes transitoires de la figure 6.17 nous semblent acceptables compte tenu de la dynamique des finisseurs, on propose de conserver le paramétrage correspondant à cette figure.

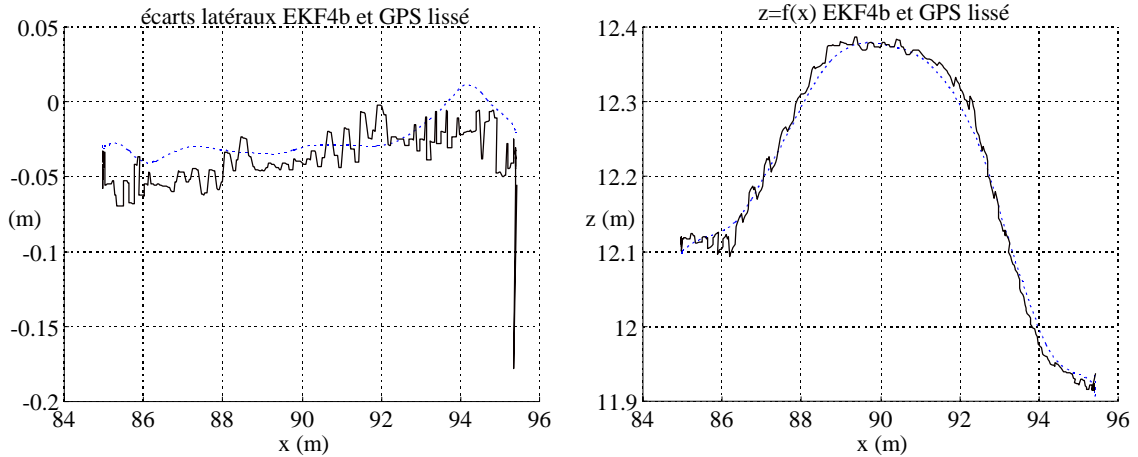


figure 6.19 : z estimé de EKF4b comparé au G.P.S. lissé (pointillés) avec un bruit de modèle plus important

6.2.4 Etude de la répétabilité de plusieurs essais sur le PEM

Le robot MELODY franchit 3 fois le PEM (deux fois dans un sens et une fois dans l'autre) à vitesse constante de 6 cm/s.

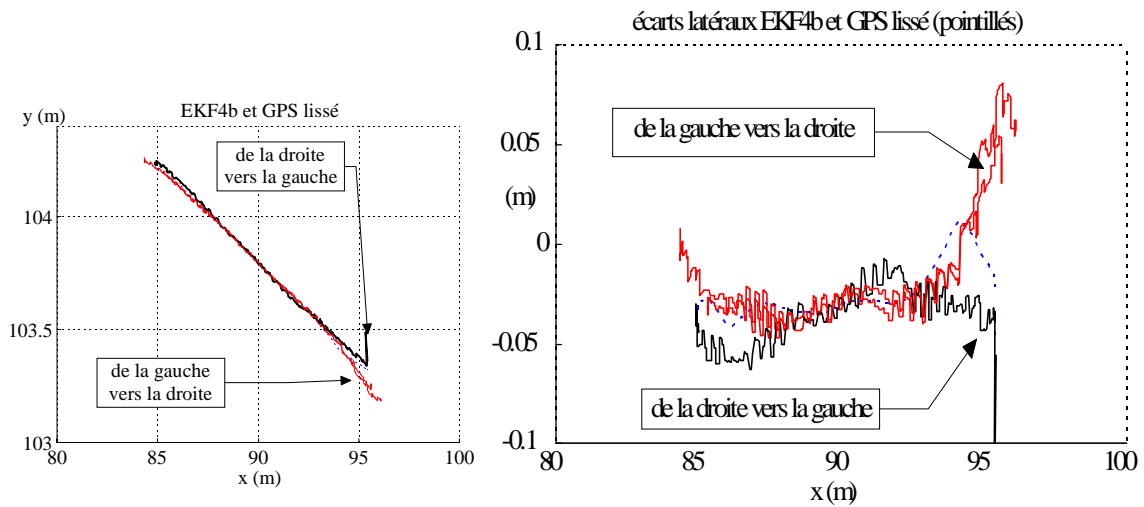


figure 6.20 : comportement 2D de « EKF4b » sur 3 essais différents

On constate sur la figure 6.21 que, pour les deux essais de la gauche vers la droite, la répétabilité est très bonne. Par contre, le sens de déplacement influe sur le comportement du filtre. Même s'il est difficile d'expliquer clairement ce phénomène, il faut considérer d'abord que la transition pour $x = 94$ est la plus sévère de toutes (le robot passe d'une déclivité presque nulle à une déclivité de 12°). Ensuite, pour le déplacement de la droite vers la gauche, ce transitoire se passe pendant la phase d'accélération, donc à vitesse faible, alors que pour les deux autres il se situe dans la phase de pleine vitesse. Aussi, comme le modèle odométrique

est assez privilégié par rapport aux mesures de SIREM, ce dernier met plus de temps pour corriger les erreurs d'estimation.

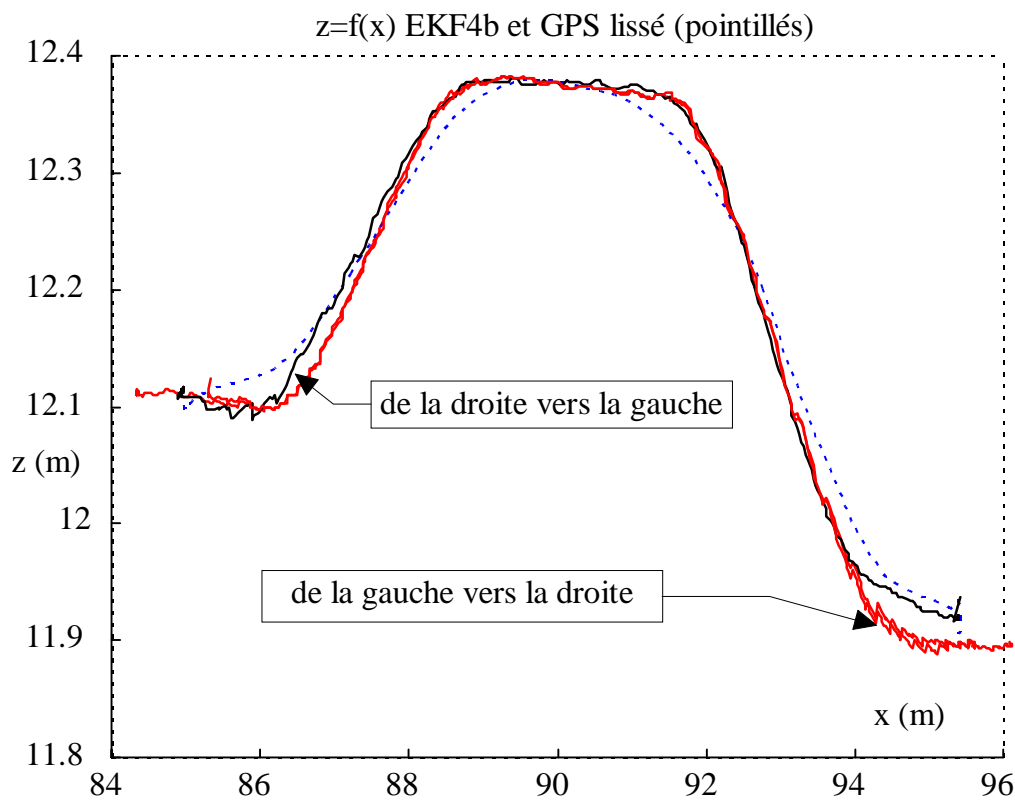


figure 6.21 : z estimé sur 3 essais différents

Attention, pour $x = 95,5$ m, l'altitude estimée lors des essais de la gauche vers la droite correspond à un mobile en déplacement, alors que pour l'autre essai, le véhicule est immobile. Ainsi, en considérant cette partie de la trajectoire, on ne peut pas dire s'il existe ou non une erreur statique. Par contre en examinant l'autre côté pour $x = 85$ m, on peut affirmer que l'altitude estimée ne dépend pas de l'orientation du capteur puisque deux positions immobiles se superposent.

On conclut donc, grâce à ces essais, que le réglage du filtre tel qu'il est proposé ici ne permet pas de répondre à des variations rapides d'altitude. Ce comportement « passe bas » nous semble convenable malgré tout pour un finisseur.

6.2.5 Essai à vitesse variable sur le PEM

On considère le même essai à vitesse variable que celui qui a servi à l'analyse des signaux des inclinomètres (paragraphe 5.2) : après une rampe, le profil de vitesse en fonction du temps suit une sinusoïde de valeur minimum 4 cm/s et de valeur maximum 16 cm/s, avec une période de 20 secondes.

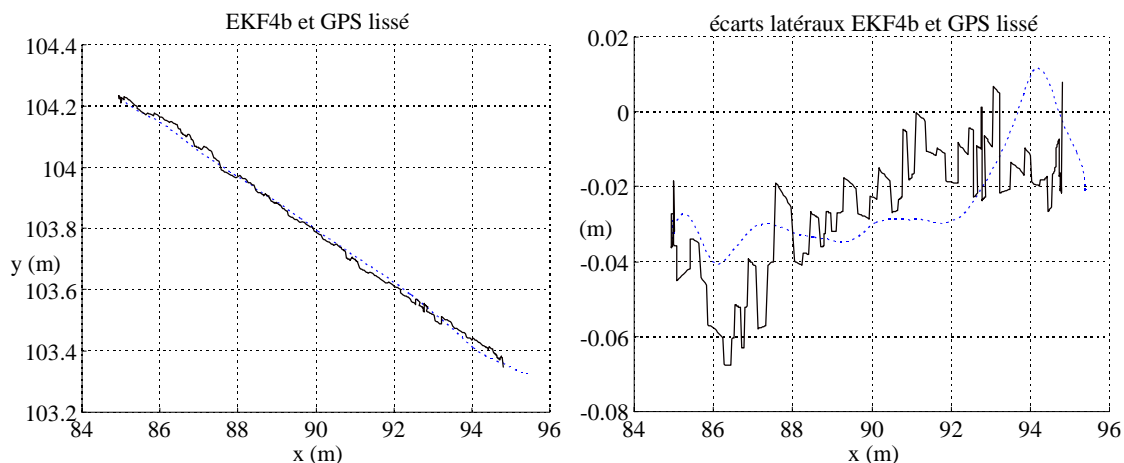


figure 6.22 : comportement 2D à vitesse variable de « EKF4b »

Les oscillations ne sont pas plus importantes que dans le cas d’une vitesse constante, comme indiqué par l’erreur latérale de la figure 6.22. Elles ont toujours pour amplitude 2 à 3 cm. Ceci indique un certain découplage entre le comportement de la localisation 2D et celui des inclinomètres.

Comme on l’a vu dans l’étude des inclinomètres, la déclivité et le dévers orthogonal estimés subissent ici l’effet des accélérations, c’est-à-dire que leurs estimations sont biaisées jusqu’à 0,5 degré, ce qui ne correspond déjà plus à notre cahier des charges. Intéressons nous maintenant à la répercussion de ces erreurs sur le profil en « z » (figure 6.23).

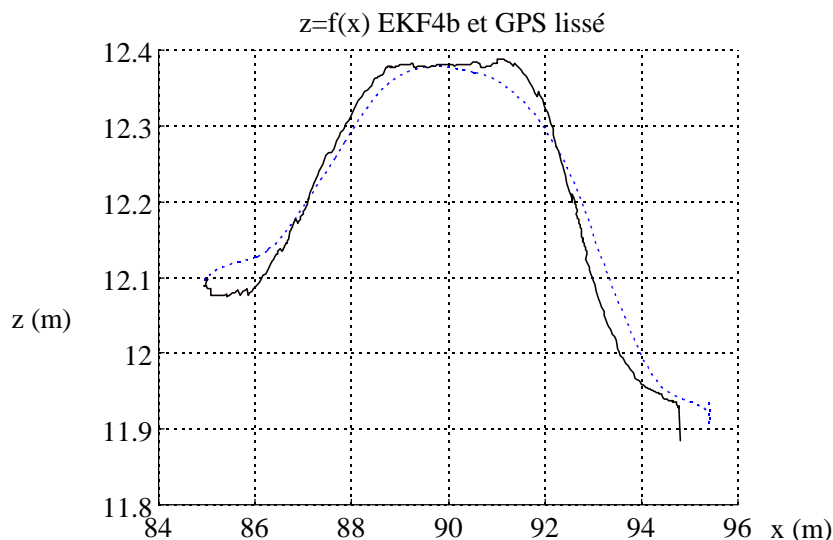


figure 6.23 : profil en « z » en fonction de l’abscisse estimée

L’estimation de l’altitude est visiblement dégradée lorsque la vitesse varie assez fortement. Cependant, les erreurs ajoutées restent convenables. Si l’on se réfère à l’explication de la figure 6.14, on constate que les erreurs en « z » sont les plus fortes lorsque les mesures des inclinomètres sont le plus affectées par les accélérations, c’est-à-dire lorsque les angles

sont les plus élevés. En effet, quand les angles d'attitude sont faibles, par exemple sur le plateau horizontal du PEM, l'estimation de l'altitude est convenable malgré les accélérations.

Par ailleurs, il faut remarquer que le filtre utilisé est le même que celui réglé pour vitesse constante qui, rappelons le, attache beaucoup d'importance au modèle odométrique 3D, pour filtrer convenablement les oscillations des mesures de SIREM. En conservant le même réglage de filtre, on biaise le processus d'estimation, puisqu'ici le filtre donne trop d'importance au modèle odométrique 3D. Si l'on voulait améliorer les performances en « z » sur ce genre de trajectoire, il faudrait typiquement augmenter le bruit de modèle, ce qui engendrerait plus d'oscillations, comme on l'a déjà vu.

En conclusion de ce paragraphe, ce qui nous semble le plus intéressant est la bonne convergence du filtre qui, malgré des perturbations que l'on qualifie ici de fortes, se comporte plutôt bien et **ne diverge pas**.

6.2.6 Essai sur un chemin qui se reboucle sur lui même

Un chemin bouclé a été parcouru à vitesse constante de 6 cm/s. Son axe en plan relativement aux balises est indiqué sur la figure 6.24.

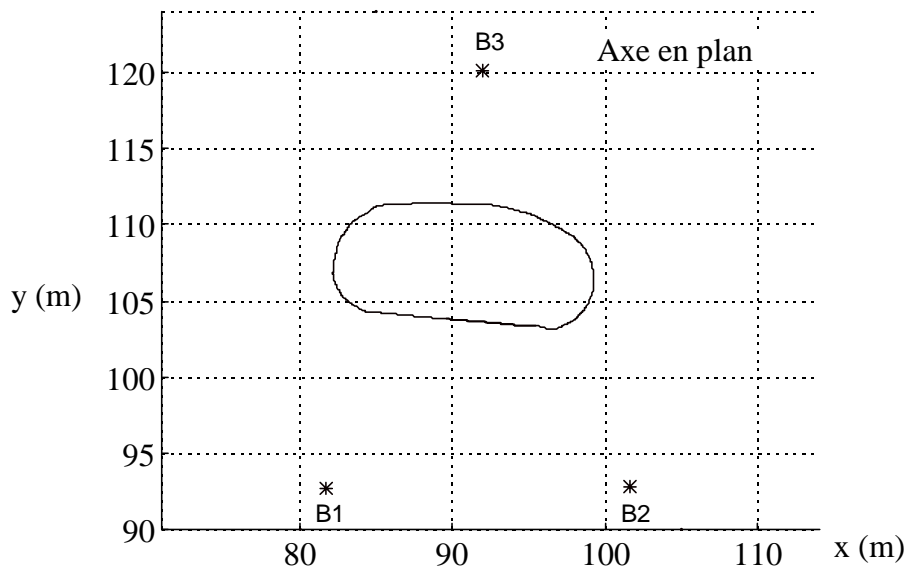


figure 6.24 : vue en plan du chemin

Sur la partie linéaire est disposé le PEM. Le reste du chemin a été matérialisé par une corde blanche reposant sur le sol. Le chemin est parcouru entièrement et le PEM est franchi deux fois.

La figure 6.25 donne une vue 3D du chemin estimé par le G.P.S. et par « EKF4b ».

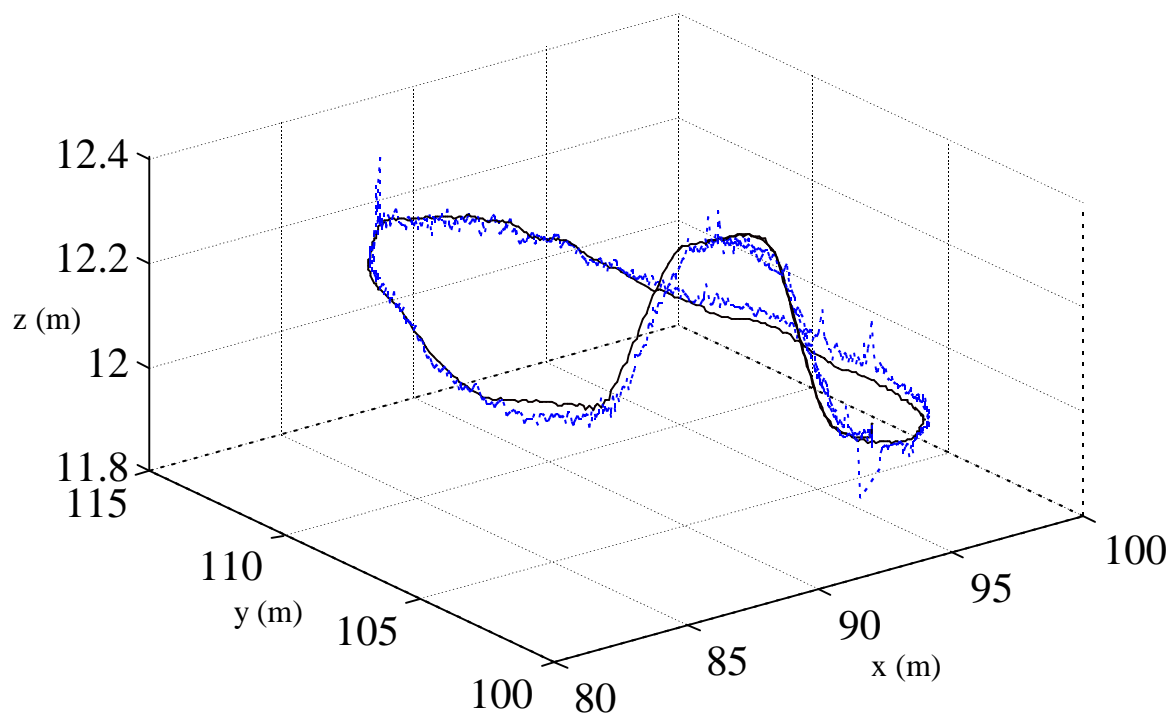


figure 6.25 : vue 3D des positions estimées par « EKF4b » et le G.P.S. brut (pointillés)

Sur cette vue 3D, la variation d'altitude en dehors du PEM est nettement visible. Alors que le PEM engendre une variation de déclivité et peu de variation de dévers, le reste de la trajectoire provoque des variations simultanées de ces deux angles. Du fait de la forme de la trajectoire, il est possible de tracer « z » en fonction de « x », comme le propose la figure 6.26 (on y indique de plus le sens de déplacement). Cette vue permet de mieux apprécier le comportement du filtre.

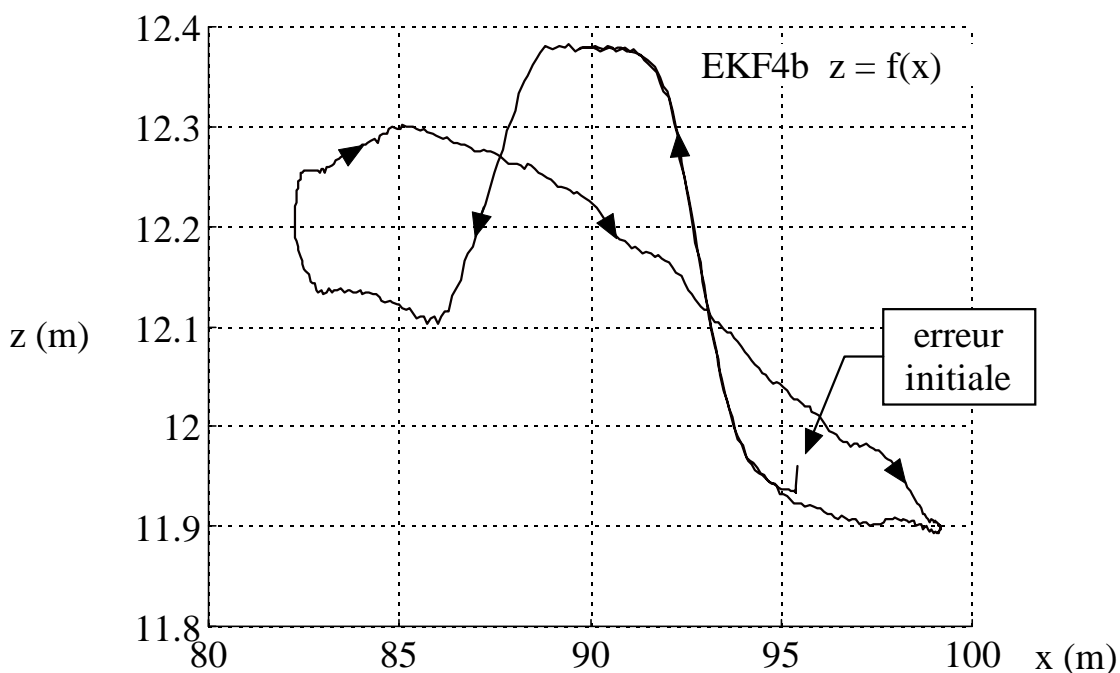


figure 6.26 : altitude de « EKF4b » en fonction de l'abscisse « x »

L'erreur initiale résultant de la localisation statique est rapidement corrigée, et on constate encore une très bonne répétabilité du franchissement du PEM, puisque le recouvrement des deux courbes est très bon. Même si l'effet des recalages de SIREM est nettement visible, le comportement de « EKF4b » est assez lisse.

La superposition des points G.P.S. avec les estimations de « EKF4b » est présentée sur la figure 6.27.

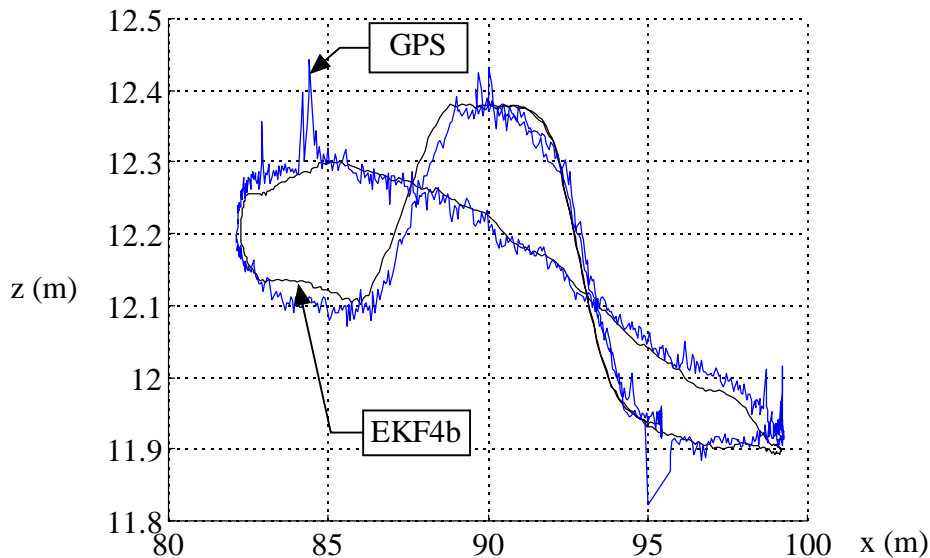


figure 6.27 : altitudes de « EKF4b » et du G.P.S. brut en fonction de l'abscisse « x »

La hauteur estimée par le G.P.S. est nettement plus bruitée que celle de « EKF4b », puisque les oscillations peuvent atteindre 15 cm³. Par ailleurs, les deux systèmes fournissent des estimées très concordantes : l'écart maximum d'altitude relevé sur cette trajectoire entre le G.P.S. lissé et « EKF4b » est de 3 cm. Ce résultat est très satisfaisant, car il indique un bon fonctionnement du filtre sur une trajectoire assez longue où les positions et attitudes sont assez variées. Par ailleurs, la moyenne des points G.P.S. est tantôt supérieure, tantôt inférieure à celle du filtre.

6.2.7 Essai sur une ligne droite qui s'éloigne du triangle des balises

On considère maintenant une trajectoire qui sort du triangle formé par les trois balises, comme indiqué sur l'axe en plan de la figure 6.28. La vitesse du mobile est constante et toujours égale à 6 cm/s.

³ Lors des essais réalisés sur le terrain de l'ECN, le fonctionnement du GPS RTK Trimble 7400 est moins bon que lors des essais reportés dans [Bétaille, 96]. Ceci est peut-être dû à des masquages de satellites par les arbres qui entourent le terrain, ou bien dû à des multi-trajets des ondes se réfléchissant sur le bâtiment proche du terrain, etc.

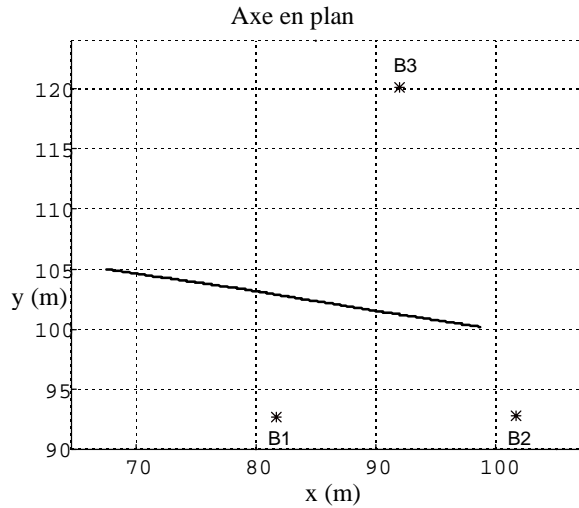


figure 6.28 : vue en plan du chemin et des balises

Les résultats obtenus par traitement différé des données correspondant à cet essai sont indiqués sur la figure 6.29.

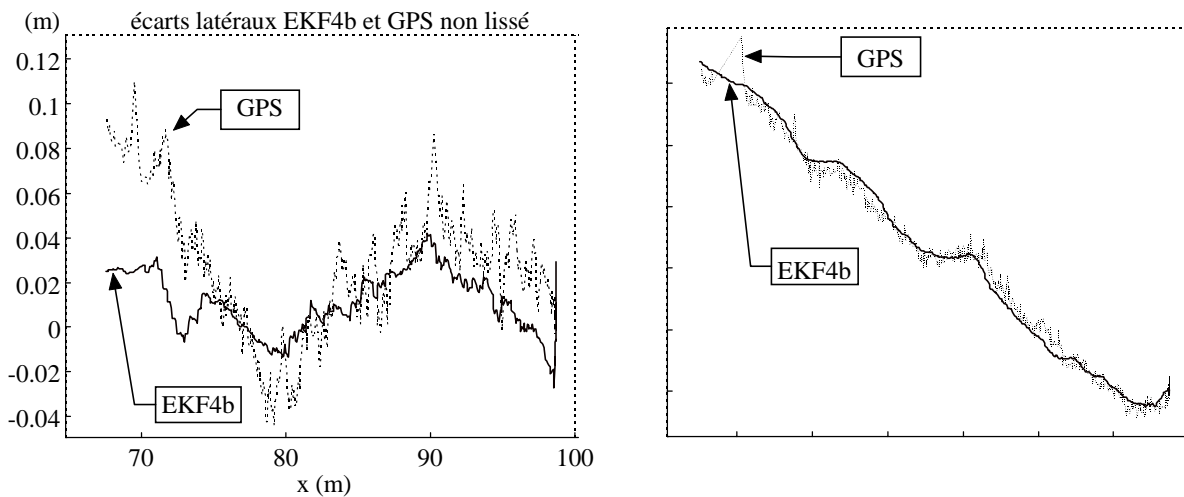


figure 6.29 : écarts latéraux et altitudes du G.P.S. (pointillés) et de « EKF4b »

Il apparaît que les altitudes estimées par le filtre et le G.P.S. sont très concordantes. « EKF4b » fournit encore une estimée de l'altitude plus lisse que le G.P.S., puisque, pour ce dernier, les oscillations sont de plusieurs centimètres. Les écarts entre les deux sorties sont de l'ordre de quelques centimètres, ce qui prouve, et ce d'autant plus que la distance SIREM - balises est grande, que le capteur SIREM est assez bien étalonné. On remarque aussi un dysfonctionnement momentané du G.P.S. pour $x = 70$ m.

Concernant les écarts latéraux de la figure 6.29, il apparaît aussi une bonne homogénéité entre les deux systèmes. Celle ci est d'autant meilleure que le robot se situe dans le triangle des balises. Quand le véhicule s'éloigne franchement de ce triangle ($x < 75$), un écart de quelques centimètres apparaît.

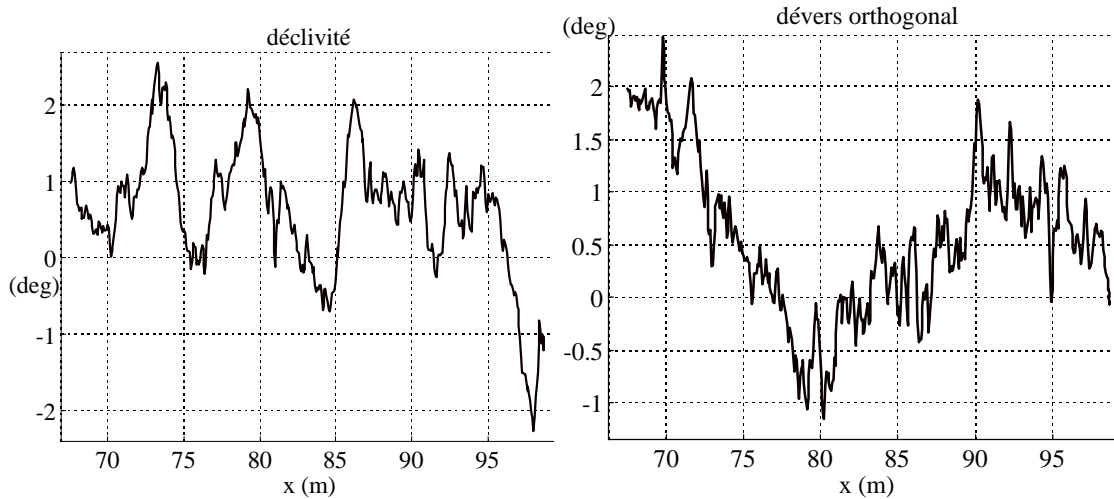


figure 6.30 : déclivité et dévers orthogonal en fonction de l'abscisse

Sur la figure 6.30, la déclivité et le dévers orthogonal correspondant à cette trajectoire sont tracés en fonction du « x » estimé (la déclivité et le dévers peuvent atteindre jusqu'à 2,5 degrés). Comme on l'a déjà vu, on constate une corrélation forte entre la forme du dévers et celle des écarts latéraux.

Du fait qu'en fin de trajectoire ($x < 75$ m), l'écart latéral du G.P.S. suit parfaitement la forme du dévers, nous estimons que, lorsque les distances SIREM - balise sont grandes, le G.P.S. fournit une meilleure position que « EKF4b » qui souffre, dans ce cas, de la mauvaise configuration géométrique du système.

On se propose de comparer, sur cette même trajectoire, l'écart latéral obtenu avec le filtre 2D (n'identifiant pas les rayons) avec ceux de « EKF4b » et du G.P.S. (cf. figure 6.31).

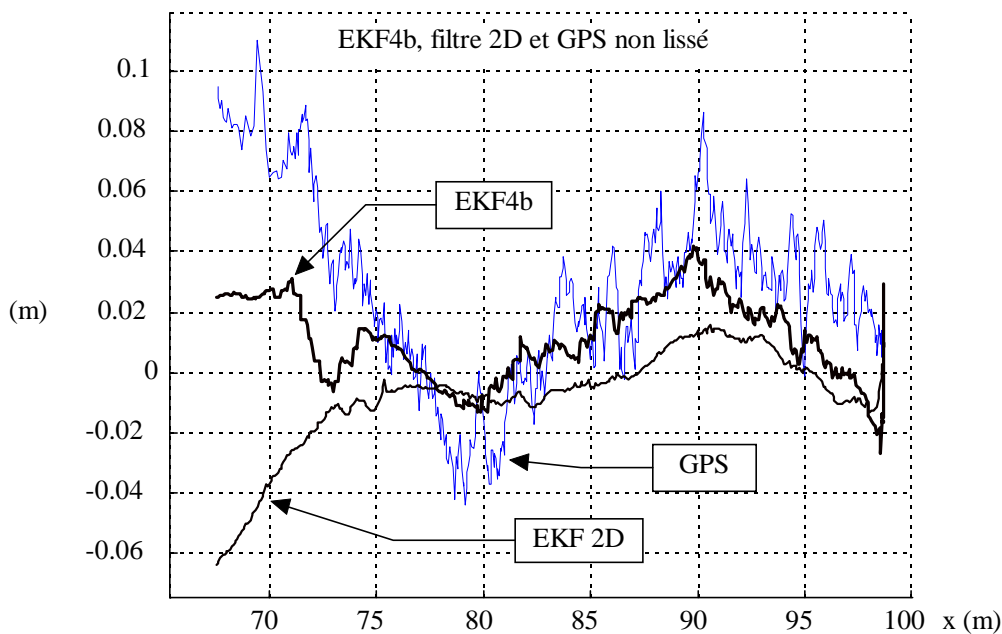


figure 6.31 : erreurs latérales de EKF4b, du filtre 2D et du G.P.S.

Les deux filtres présentent des écarts proches lorsque le véhicule se déplace dans le triangle des balises. Néanmoins, il semble que l'écart latéral du filtre 2D soit moins en adéquation avec celui du G.P.S., même s'il oscille moins que celui de « EKF4b ». En plus, pour $x < 75$ m, l'écart du filtre 2D évolue en sens inverse de la réalité. Ce phénomène peut s'expliquer, en premier lieu, par le fait qu'une des trois balises est trop loin pour être repérée : ainsi, pour $x < 71$ m les filtres ne disposent que de deux balises. En outre, le filtre 2D modélise un phénomène plan uniquement ; sur cette trajectoire, non plane puisque l'altitude, le dévers et la déclivité varient, des phénomènes non modélisés interviennent. Ces phénomènes sont d'autant plus sensibles que la distance capteur - balise est grande : en fin de trajectoire, comme les angles de site commencent à être importants, et comme la caméra est penchée, les angles d'azimut mesurés présentent un offset par rapport aux angles d'azimut de la modélisation 2D.

En conclusion de ce paragraphe, « EKF4b » fournit des localisations précises lorsque le véhicule se déplace dans le triangle formé par trois balises. On remarque aussi que la modélisation 3D du système améliore sensiblement les performances 2D, puisque « EKF4b » fournit une meilleure estimation 2D qu'un filtre 2D lorsque la trajectoire n'est pas parfaitement plane.

6.3 Dégradation du comportement avec un filtrage réaliste des données des inclinomètres

Dans le paragraphe 6.2, le filtre « EKF4b » comportait un lissage des mesures inclinométriques. On rappelle que ce type de traitement est réalisable en différé mais illusoire en temps réel : cette étude a été effectuée dans le but de constater « ce que l'on pouvait espérer de mieux avec EKF4b ». On s'intéresse maintenant à un filtrage passe-bas réaliste. Le compromis à réaliser doit tenir compte du bruit résiduel et du déphasage (ou retard). Les résultats de la figure 6.32 donnent un compromis pour lequel l'amplitude des oscillations est de 0,1 degré. Pour ce filtre (FIR -Finite Impulse Response- d'ordre 14) l'effet du déphasage peut atteindre 0,1 degré, lors d'une variation rapide. En temps réel, ce filtre pourrait être fait de façon analogique, avant la conversion numérique.

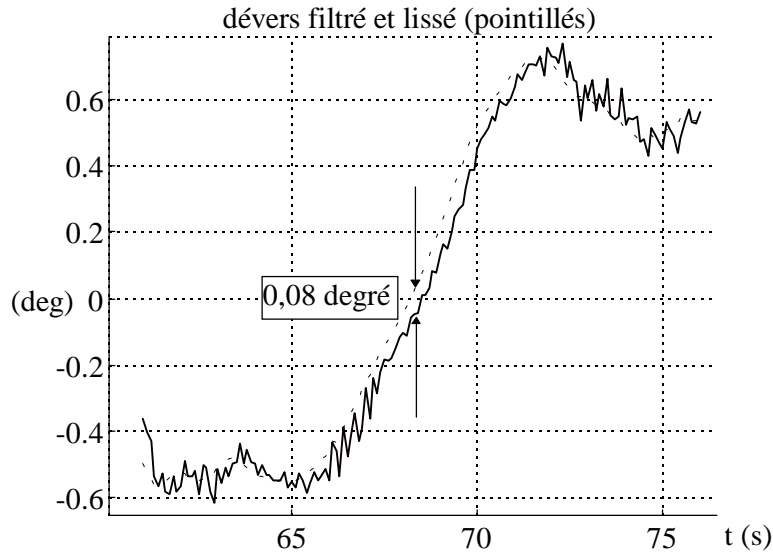


figure 6.32 : mise en évidence du déphasage apporté par un filtre réel

Analysons la dégradation apportée par le déphasage des mesures inclinométrique sur le comportement du filtre « EKF4b ». Tout déphasage des mesures inclinométriques provoque un retard qui peut engendrer un biais dans le filtre. On peut en percevoir l'effet grâce au raisonnement suivant. Les inclinomètres fournissent des mesures absolues relativement à la gravité terrestre. Le capteur SIREM lui aussi se réfère à l'environnement absolu et il est donc indispensable que les inclinomètres et SIREM soient cohérents. Ainsi, en cas de variation rapide de la déclivité, le déphasage fait que l'estimation de la déclivité issue de la mesure filtrée de l'inclinomètre n'est pas en accord avec la déclivité de SIREM : c'est alors l'estimation de l'altitude qui en subit les conséquences.

L'effet d'un filtrage réel est analysé sur un essai correspondant à un franchissement à vitesse constante du PEM (6 cm/s).

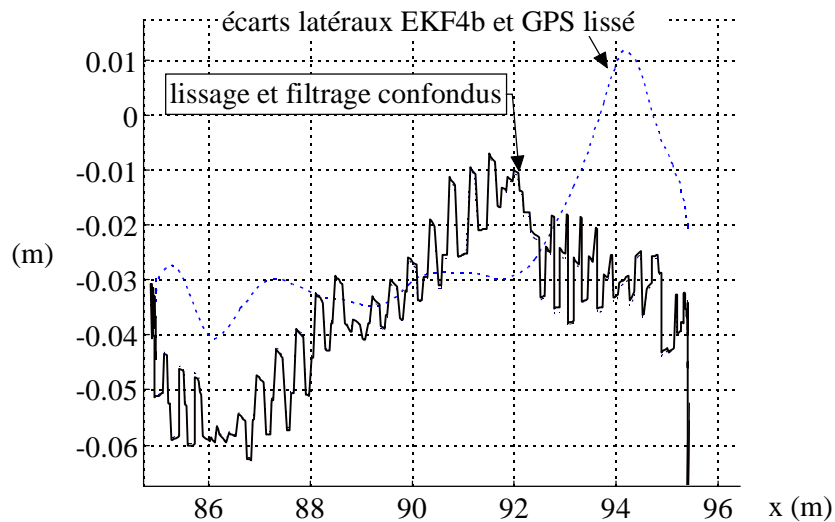


figure 6.33 : écarts latéraux de « EKF4b » avec lissage et avec filtrage réaliste

La figure 6.33 montre que le filtrage réaliste a peu d'impact sur les écarts latéraux, puisque les différences, inférieures au millimètre, ne sont pas perceptibles sur les tracés. On vérifie que le comportement 2D est assez découplé des mesures des inclinomètres.

L'estimation de l'altitude est par contre plus sensible au déphasage, comme indiqué sur la figure 6.34.

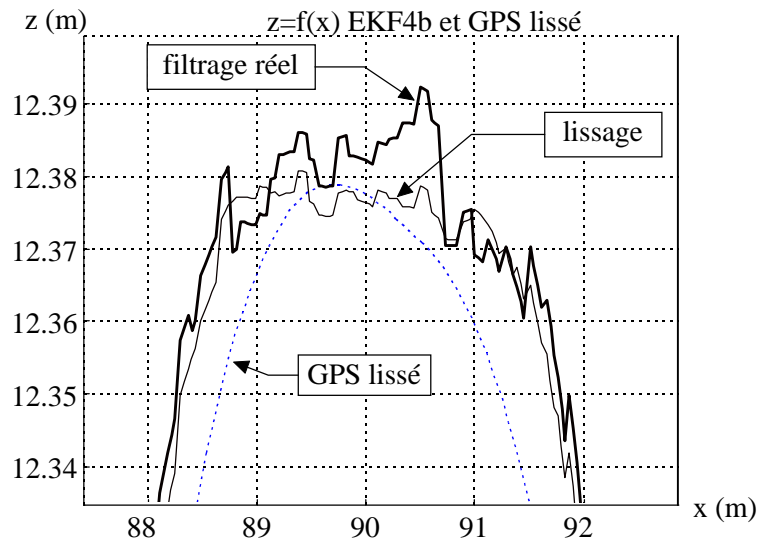


figure 6.34 : profils en z de EKF4b avec filtrage réaliste et filtrage sans déphasage

Avec un filtrage réaliste, les oscillations peuvent atteindre jusqu'à deux centimètres. Lors des phases de variation rapide de pente, on constate aussi un comportement dégradé. Il apparaît donc que l'estimation de l'altitude avec un filtrage passe-bas réaliste est dégradée d'un facteur de 2 par rapport au cas où les mesures des inclinomètres sont lissées. Ainsi, on estime que les oscillations en « z » sont de l'ordre de 2 centimètres crête à crête. Cette dégradation nous semble malgré tout acceptable puisque le filtre se comporte bien, sans diverger.

7 AMELIORATIONS A APPORTER AU FILTRE

7.1 Fonctionnalités du filtre 2D

Le filtre « EKF4b » peut intégrer les fonctionnalités de l'algorithme 2D. On peut le doter de la faculté d'identifier en ligne les rayons, mais compte tenu des hypothèses simplificatrices, cette amélioration n'est pas prioritaire. Nous pensons que l'identification des rayons peut être réalisée lors d'une phase de mise au point, ou bien de temps en temps, avec le filtre 2D.

Par ailleurs, on peut intégrer, comme en 2D, les tests de cohérence des mesures de balises, qui permettent d'identifier ou rejeter des mesures extéroceptives et qui permettent aussi de signaler un mauvais fonctionnement du filtre. On peut généraliser le test basé sur la distance de Mahalanobis, en prenant en compte, en plus de la mesure azimutale, l'angle de site. On peut ainsi espérer détecter un mauvais fonctionnement de l'estimation de l'altitude.

7.2 Prise en compte de la translation entre S et M

Le filtre « EKF4b » n'a pris en compte que les offsets des inclinomètres et les rotations de passage entre les repères R_S et R_M . Cependant, la hauteur et le retrait de SIREM par rapport au milieu de l'essieu des roues motrices a un effet sensible lors d'une variation de direction et/ou lors d'une variation d'altitude. On peut décomposer le problème en deux parties. Soit ${}^M P_S$, la position en coordonnées homogènes du point « S » dans R_M :

$${}^M P_S = [t_x, t_y, t_z, 1]^t \quad (6.15)$$

7.2.1 Retrait de SIREM par rapport à l'essieu des roues

Pour résoudre ce problème en 2D, un modèle odométrique spécifique, prenant en compte « t_x » et « t_y », a été développé (cf. paragraphe 2.1 du chapitre 3). Dans ce cas, il a été montré que la translation, dans le plan de roulement, a la forme :

$$d\vec{T} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \cos(\theta + \omega / 2) - \omega(t_x \sin\theta + t_y \cos\theta) \\ \Delta \sin(\theta + \omega / 2) + \omega(t_x \cos\theta - t_y \sin\theta) \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Comme on l'a déjà vu, cette expression peut se simplifier en négligeant le terme « $\omega/2$ », inutile dans notre cas.

Si l'on reprend la méthode exposée dans le paragraphe 2.5 du chapitre 5, et grâce à l'expression (6.16), on obtient un modèle odométrique 3D prenant en compte les paramètres « t_x » et « t_y ».

L'amélioration apportée ici est sensible en présence d'une vitesse angulaire, comme l'a montré l'essai 2D du paragraphe 5.3 du chapitre 3 : un biais sur la position estimée peut apparaître, de l'ordre du décalage (ici 30 cm).

7.2.2 Hauteur de SIREM par rapport à l'essieu des roues

Le bras de levier qui existe entre SIREM et l'axe des roues est important : il a été identifié comme étant égal à 1,74 m. Il agit dès lors que la déclivité (et donc l'altitude) ou le dévers varient. Grossièrement, une variation d'un degré de ces angles provoque en bout de mât un décalage de 3 centimètres.

En première approximation, ce décalage agit sur « x » et/ou « y » comme indiqué sur la figure 6.35 et son effet sur « z » est faible.

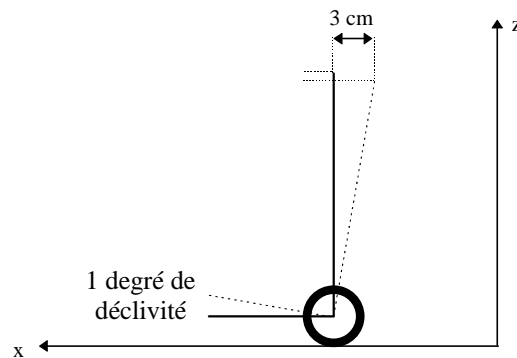


figure 6.35 : effet du bras de levier

Par conséquent, la prise en compte du bras de levier permettrait d'augmenter la précision en (x, y) mais agirait certainement peu sur celle de l'altitude. Or dans les essais reportés dans ce chapitre, la précision en (x, y) nous semble suffisante.

Par ailleurs, sur une machine de chantier de type finisseur, il faut relativiser l'impact du bras de levier : les variations d'attitude sont lentes et progressives. Dans ce cas, le capteur SIREM parvient à recalibrer la navigation à l'estime ; les résultats du filtre « EKF4b » sont probants à ce sujet car ils indiquent clairement qu'une absence de modélisation de ce phénomène ne fait pas diverger la méthode, même en cas de variations sévères (et irréalistes pour un finisseur) comme celles engendrées par le PEM.

En conclusion, il semble que modéliser le bras de levier apporterait peu d'amélioration sur l'estimation de l'altitude.

8 CONCLUSION

Ce chapitre a été dédié à l'implantation sur le robot MELODY, du filtre à quatre éléments présenté dans le chapitre 5. Le bon fonctionnement d'inclinomètres embarqués sur un véhicule en déplacement a été validé dans le contexte qui nous intéresse. La nécessité d'un filtrage passe bas a confirmé les analyses effectuées en simulation : en plus d'améliorer les estimations des angles de déclivité et de dévers orthogonal, la qualité du processus d'estimation de l'altitude est augmentée.

Le formalisme d'un filtre ne prenant en compte que les offsets des inclinomètres a été validé par des essais réels. Cette version du filtre est « minimale » dans le sens qu'elle utilise la version la plus simple du modèle odométrique 3D et qu'elle ne considère pas la translation entre R_S et R_M . Grâce à un étalonnage soigné, le fonctionnement du filtre en présence de dynamiques lentes est très satisfaisant : la précision du système, quoique difficile à estimer précisément, est de l'ordre de deux centimètres en altitude et de l'ordre de quelques centimètres en (x, y) . Aucune divergence du filtre n'a été constatée, même en cas de variation rapide de la déclivité : dans ce cas, le bras de levier dû à la hauteur de SIREM par rapport aux roues, engendre un régime transitoire dont l'effet est « assez rapidement » supprimé.

Il faut remarquer que les offsets des inclinomètres par rapport à SIREM doivent être étalonnés soigneusement car ils ont un effet très sensible. Par contre, les offsets des inclinomètres par rapport au repère de l'engin agissent assez peu. Ceci est très intéressant car ils sont difficiles à identifier et peuvent varier dans le temps, en fonction de la charge de l'engin ou de la pression des pneus.

Par ailleurs, l'algorithme 3D possède un formalisme récurrent à 4 éléments ce qui lui procure une grande simplicité et une grande rapidité d'exécution en temps réel. Même si son implantation en temps réel n'est actuellement pas réalisée, le filtre « EKF4b » pourra s'intégrer facilement sur le système informatique embarqué sur MELODY. En outre, comme le filtre 2D avec identification des rayons possède 5 éléments et fonctionne en temps réel à 20 Hz sur un processeur de type « Intel 486 DX 33 MHz », tout porte à croire que « EKF4b » pourra fonctionner lui aussi à 20 Hz sur le même processeur.

Enfin, l'étude réalisée en simulation lors du chapitre précédent a grandement facilité le développement d'un filtre réel. Il est à noter la très bonne concordance entre les résultats réels et ceux obtenus sur des données simulées bruitées : les formes et les amplitudes des signaux d'erreurs sont proches. Ainsi, l'utilisation de la maquette de simulation peut, peut-être, remplacer certaines manipulations assez lourdes à mettre en œuvre.

Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, nous avons abordé le problème de la localisation des engins d'extérieur à faibles dynamiques, mais qui exigent une grande précision dans l'exécution de leur tâche.

Ce travail, qui s'inscrit dans le cadre de l'activité robotique de chantier, vise essentiellement les engins de construction des routes, tels que les finisseurs. Cependant, les principes utilisés sont d'une portée plus large ; seul le recours aux inclinomètres est effectivement lié aux faibles dynamiques.

Dans une première partie de la thèse, nous nous sommes intéressés à l'utilisation simultanée de l'odométrie et de mesures goniométriques pour la localisation 2D en position et en cap.

L'étude systématique de l'observabilité comme moyen de prévoir les situations où le système de localisation risque d'être mis en difficulté, nous paraît une contribution de notre travail. Certains résultats qui en découlent n'étaient pas évidents *a priori* et n'avaient pas été mis au jour auparavant, bien que plusieurs systèmes de localisation présentant la même modélisation continue aient été utilisés de par le monde.

Dans une seconde partie, nous avons cherché à résoudre le problème de la localisation 3D en position et attitude (six degrés de liberté).

Là encore, nous nous sommes tournés vers l'utilisation conjointe de la localisation relative et de la goniométrie. Notre effort a d'abord porté sur la conception d'une solution de localisation relative adaptée au problème, c'est-à-dire tirant parti des faibles dynamiques, et permettant une bonne estime sur les paramètres fondamentaux d'altitude et d'attitude par rapport à l'horizontale. C'est dans ce but que nous avons opté pour l'adjonction d'inclinomètres à l'ensemble de capteurs déjà utilisé en 2D.

Nous avons alors introduit une nouvelle représentation de l'attitude, basée sur les angles de déclivité et de dévers orthogonal, définie de telle sorte que ces deux angles soient directement mesurés par les inclinomètres. Cette représentation, qui a en outre l'intérêt de ne pas présenter de singularités pour un véhicule terrestre, permet d'aboutir à des équations d'odométrie 3D particulièrement simples.

Par la suite, nous avons utilisé ces équations comme modèle d'état dans un filtre de Kalman étendu permettant d'estimer les trois paramètres de position et la direction de l'engin à localiser. Les paramètres d'attitude par rapport à l'horizontale sont considérés comme une entrée mesurée.

Un apport de ce travail est le fait que l'estimateur auquel on aboutit est, somme toute, assez simple et peu coûteux en calculs.

Enfin, tout au long de cette thèse, nous avons en permanence eu le souci de la validation expérimentale de ce qui avait été préalablement conçu puis simulé. Le premier avantage que nous en avons tiré a été de parfaire notre simulateur. Aujourd'hui, les simulations sont en excellent accord avec les résultats obtenus avec des données réelles, ce qui nous a permis une progression rapide dans les derniers développements, en « économisant » les essais réels, très lourds à mettre en oeuvre.

Nous pensons que cet aspect expérimental constitue également un apport de cette thèse. Nous avons d'ailleurs cherché à en rendre compte par la présentation de nombreux résultats. Malheureusement, ces résultats ne sont pas immédiatement interprétables en termes de précision. Il faudrait pour cela avoir recours à un banc de test adapté, tel que la station SESSYL du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées. Toutefois, SESSYL n'est pas directement adaptée aux systèmes de localisation incluant une localisation relative à l'aide de roues codeuses.

Néanmoins, nous avons pu mettre en évidence l'excellente répétabilité de notre système. Quant à sa précision, elle est clairement centimétrique puisqu'il donne des résultats très proches d'un G.P.S. différentiel cinématique temps réel, ayant lui-même une précision centimétrique.

Le défi que nous nous étions lancé, sans trop nous l'avouer, c'était le centimètre en altitude et le dixième de degré en attitude. Peut-on atteindre ces performances avec SIREM ? La validation n'a pas été poussée assez loin pour répondre. Si les sorties ne sont pas biaisées, un filtrage passe-bas plus marqué, compatible avec les dynamiques du finisseur, pourrait permettre d'atteindre ces performances. Mais, la question ne se pose peut-être pas en ces termes.

En effet, ce qui est à noter, c'est qu'il semble que l'on arrive aux limites physiques du capteur SIREM.

Comme nous l'avons déjà remarqué, la précision de l'angle de site est à peine suffisante (un pixel engendre au maximum 40'' d'arc d'erreur, ce qui correspond à une erreur de 8 mm en « z » pour une balise à 40 m). Par ailleurs, la modélisation que nous avons faite de SIREM suppose que la barrette CCD est parfaitement parallèle à l'axe de rotation. Mais, l'axe de rotation passe-t-il vraiment par le centre optique ? Est-il rigoureusement perpendiculaire à l'axe optique ? Comme on le voit, on se pose la question de savoir si le modèle de SIREM est suffisamment fin, et si les paramètres de ce modèle ont été suffisamment bien étalonnés. Notre réponse est affirmative. Il nous semble inutile de chercher une modélisation plus complexe de SIREM qui compliquerait par là même les équations des filtres (suffisamment complexes comme ça). En outre, il faudrait être capable d'identifier les paramètres de ces nouveaux modèles.

Le manque de précision en altitude peut peut-être s'expliquer aussi par la très grande sensibilité du filtre aux offsets des inclinomètres par rapport à SIREM. Malgré les efforts que nous avons consentis pour les identifier correctement avec une station de grande précision, nous ne pouvons garantir le résultat, puisque les axes de SIREM sont immatériels. Le problème de l'identification précise de ces offsets avec les axes du repère d'un capteur de type SIREM est un problème, nous semble-t-il, encore ouvert.

Ces éléments nous amènent à penser que l'avenir de la localisation précise en position et attitude d'engins à évolutions lentes avec un système optique est vraisemblablement dans une autre nature technologique. C'est aussi ce qui a été décidé dans l'élaboration du projet CIRC, avec le choix du système développé à l'Université d'East London, que nous avons décrit dans la bibliographie. Ce capteur est plus rapide que SIREM et sa résolution angulaire est bien meilleure. Cependant, il mesure les mêmes angles. Nos solutions lui sont donc directement applicables et peuvent améliorer ses performances.

Une autre perspective à ce travail serait d'étudier le problème de la commande d'un outil embarqué sur le véhicule à partir des localisations calculées par le filtre 3D, de telle sorte que cet outil décrive une certaine trajectoire prédéterminée dans l'espace, indépendamment des perturbations dues à la surface de roulement. Ce problème a une portée assez large dans le domaine des travaux publics. Il correspond en effet aux tâches des machines de profilage telles que les niveleuses et les finisseurs. Ce thème constituait l'un des objectifs initiaux de la coopération entre le L.C.P.C. et l'IRCyN mais nécessitait, pour pouvoir être mené jusqu'au niveau du prototype, de lever préalablement le verrou de la localisation précise en position et attitude. Comme on l'a vu, cette difficulté est maintenant près d'être résolue. Il est donc logique de préparer la phase suivante que constitue la commande de l'outil.

**Références bibliographiques
et bibliographie**

Références bibliographiques (par ordre alphabétique)

- [Arnex, 95]** Documentation constructeur du système AB..
"Electro-optic sensors and position determination". ARNEX, Stora Badhusgatan 16, S-411 21 Göteborg, Suède.
- [Barshan, Durrant-Whyte, 95]** B. Barshan et H.F. Durrant-Whyte.
"Inertial navigation systems for mobile robots". IEEE Transactions on Robotics and Automation. Vol. 11, n°3, juin 1995. pp. 328-342.
- [Bétaille, 96]** D. Bétaille.
"GPS cinématique temps réel Trimble 4000". Essais SESSYL de novembre 95. Rapport LCPC de Nantes. Mars 96.
- [Bétaille, Peyret, 97]** D. Bétaille et F. Peyret.
"A simulator for road construction equipment". 14 th. International Symposium on Automation and Robotics in Construction, Pittsburg (USA). 8-11 Juin 1997. pp. 451-458.
- [Boley, Steinmetz, Sutherland, 96]** D. Boley, E.S. Steinmetz et K.T. Sutherland.
"Robot localization from landmarks using recursive total least squares". IEEE International Conference on Robotics and Automation. Minneapolis. Avril 1996. pp. 1381-1386.
- [Boley, 96]** D. Boley.
Communication personnelle. University of Minnesota. Minneapolis. MN 55455. Mai 1996.
- [Boley, Sutherland, 96]** D. Boley and K.T. Sutherland.
"A Rapidly Converging Recursive Method for Mobile Robot Localization". University of Minnesota, Computer Science technical report TR-96-047, 1996.
- [Bonnifait, 94]** Ph. Bonnifait.
"Etude de la précision du système de localisation Sirem embarqué sur robot mobile". Rapport de DEA. Université de Nantes - Ecole Centrale de Nantes. LAN. Juillet 1994.
- [Bonnifait, Garcia, 96 a]** Ph. Bonnifait et G. Garcia.
"A multisensor localization algorithm and its real-time experimental validation". IEEE International Conference on Robotics and Automation. Minneapolis. Avril 1996. pp. 1395-1402.
- [Bonnifait, Garcia, 96 b]** Ph. Bonnifait et G. Garcia.
"On the use of nonlinear observability conditions in determining test situations for a mobile robot localizer". World Automation Congress. International Symposium on Robotics And Manufacturing. Volume 6. Montpellier. Mai 1996. pp. 19-24.
- [Bonnifait, Garcia, 96 c]** Ph. Bonnifait et G. Garcia.
"Continuous localization of outdoor mobile robots using odometry and relative azimuth angles of known landmarks". IEEE-SMC Computational Engineering in Systems Applications multiconference. Lille Juillet 1996. pp. 30 35.
- [Bonnifait, Peyret, Garcia, 97 a]** Ph. Bonnifait, F. Peyret, et G. Garcia.
"New data fusion techniques for high-precision localization of civil-engineering equipment", 14 th. International Symposium on Automation and Robotics in Construction, Pittsburg (USA). Juin 1997. pp. 11-20.

- [Bonnifait, Garcia, 97 b]** Ph. Bonnifait et G. Garcia.
"Dynamic determination of the 6 DOF of a mobile robot using odometry, inclinometers and a goniometric system", 5th. IFAC International Symposium on Robot Control (SYROCO'97). Nantes. Septembre 1997. pp. 173-178.
- [Boreinstein, Feng, 96a]** J. Boreinstein et L. Feng.
"Gyrodometry : a new method for combining data from gyros and odometry in mobile robots". IEEE International Conference on Robotics and Automation. Minneapolis. Avril 1996. pp. 423-428.
- [Boreinstein, Feng, 96b]** J. Boreinstein et L. Feng.
"Measurement and correction of systematic odometry errors in mobile robots". IEEE Transactions on Robotics and Automation. Vol. 12, N°6. Décembre 1996. pp. 869-880.
- [Botton, 96]** S. Botton.
"Le système GPS : une révolution en matière de positionnement". Revue Internationale de Géomatique. Vol. 6, n° 2-3. 1996. pp. 271-279.
- [Brassart, 95]** E. Brassart.
"Localisation absolue d'un robot mobile autonome par des balises actives et un système de vision monoculaire". Thèse de doctorat de l'Université de Technologie de Compiègne. Janvier 1995.
- [Chenavier, Crowley, 92]** F. Chenavier et J.L. Crowley.
"Position estimation for a mobile robot using vision and odometry". IEEE International Conference on Robotics and Automation. Nice. Mai 1992. pp. 2588-2593.
- [Cherki, 96]** B. Cherki.
"Commande des robots manipulateurs par retour d'état estimé". Thèse de doctorat Université de Nantes - Ecole Centrale de Nantes. Juin 1996.
- [Chui, Chen, 91]** C.K. Chui, G.Chen.
"Kalman filtering with real-time applications". second edition, Springer-Verlag, 1991.
- [Curran, Kyriakopoulos, 93]** A. Curran et K.J. Kyriakopoulos.
"Sensor-based self-localization for wheeled mobiles robots". IEEE International Conference on Robotics and Automation, Atlanta, Mai 1993. pp. 8-13.
- [Devise, Doncarli, 93]** O. Devise et C. Doncarli.
"Localisation dynamique d'un robot mobile: approche par fusion de données d'un problème de filtrage statistique". Traitement du signal - volume 10 n°4. 1993. pp. 311-318.
- [Devise, 93]** O. Devise.
"Contribution à la localisation dynamique d'un robot mobile". Thèse de doctorat Université de Nantes - Ecole Centrale de Nantes. LAN. 1993.
- [Diop, Fliess, 91a]** S. Diop et M. Fliess.
"On nonlinear observability". ECC'91 European Control Conference. Grenoble. Juillet 1991. pp. 152-157.
- [Diop, Fliess, 91b]** S. Diop et M. Fliess.
"Nonlinear observability, identifiability, and persistent trajectories". Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control. Brighton. Décembre 1991. pp. 714-719.
- [Dombre, Khalil, 88]** E. Dombre, W. Khalil.
"Modélisation et commande des robots". Traité des nouvelles Technologies, série robotique, Hermès, Paris, 1988.

- [Durieu, Aldon, Meizel, 96]** C. Durieu, M.J. Aldon et D. Meizel.
"La fusion de données multisensorielles pour la localisation en robotique mobile". Revue de traitement du signal. Volume 13, n°2. 1996. pp. 143-166.
- [Durieu, Opderbecke, 93]** C. Durieu et J. Opderbecke.
"Une approche statistique pour la localisation d'un robot mobile avec un odomètre et un télémètre panoramique". Journée d'études - localisation en robotique mobile. Supélec. Avril 1993. pp. 43-50.
- [Durrant-Whyte, Bell, Avery, 95]** H.F. Durrant-Whyte, E. Bell et P. Avery.
"The design of a radar-based navigation system for large outdoor vehicles". IEEE International Conference on Robotics and Automation. Nagoya. Avril 1995. pp. 764-769.
- [Fargeon, Quin et al, 93]** C. Fargeon et J.-Ph. Quin.
"Robotique mobile". Ouvrage collectif. Teknea. Toulouse. 1993.
- [Ferrand, 92]** A. Ferrand.
"Localisation relative des robots mobiles. Conception et mise en œuvre d'un odomètre indépendant de la structure de locomotion du robot". Revue d'Automatique et de Productique Appliquées. Volume 5, N°3 1992 pp. 89-100.
- [Fillatreau, 94]** Ph. Fillatreau.
"Localisation et modélisation tridimensionnelles pour un robot mobile autonome tout terrain". Thèse de doctorat. LAAS. Université Paul Sabatier de Toulouse. Janvier 1994.
- [Fuke, Krotkov, 96]** Y. Fuke et E. Krotkov.
"Dead-reckoning for a lunar rover on uneven terrain". IEEE International Conference on Robotics and Automation. Minneapolis. Avril 1996. pp. 441-416.
- [Garcia, Bonnifait, Le Corre, 95]** G. Garcia, Ph. Bonnifait et J.-F Le Corre.
"A multisensor fusion localization algorithm with self-calibration of error-corrupted mobile robot parameters", International Conference on Advanced Robotics, Barcelone, Septembre 1995. pp. 391-397.
- [Geier, Cabak, Sieh, 88]** G. Geier, A. Cabak et L. Sieh.
"Design of an integrated navigation system for robotic vehicle application". Journal of the Institute of Navigation. Vol. 34, n°. 4. 1987-88. pp. 325-336.
- [Gorham, 94]** B.J. Gorham.
"Laser guidance system for tunnelling machines". 11 th. International Symposium on Automation and Robotics in Construction. Mai 1994.
- [Guillo, 94]** E. Guillo.
"Modélisation et étalonnage de la Station d'EtudeS des Systèmes de Localisation", Rapport de stage ingénieur. Ecole Centrale de Nantes. Novembre 94.
- [Grandjean et al., 88]** P. Grandjean, P. Moutarlier et A. Robert de Vincent.
"Calibration odomètre - platine vision pour un robot mobile", Rapport LAAS n° 89419. Décembre 1988.
- [Hanebeneck, Schmidt, 96]** U.D. Hanebeneck, G. Schmidt.
"Set theoretical localization of fast mobile robots using an angle measurement technique". IEEE International Conference on Robotics and Automation. Minneapolis. Avril 1996. pp. 1387-1394.
- [Hashimoto et al., 92]** M. Hashimoto, F. Oba, K. Imamaki et Nishida.
"Mobile robot localization using dead reckoning and laser/corner cube based location systems". IMACS/SICE International Symposium on Robotics and Manufacturing Systems'92 Kobe, Japon, Septembre 92, pp. 1645-1650.

- [Hermann, Krener, 77]** R. Hermann et A.J. Krener.
"Nonlinear controllability and observability", IEEE Transactions On Automatic Control. Vol. AC-22, n° 5, Octobre 1977. pp. 728-740.
- [Hernandez, 94]** J. Hernandez.
"Sur la synthèse de lois de commande non linéaires avec observateurs: application à la robotique et à l'électrotechnique". Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, centre d'Orsay. LSS. Novembre 1994.
- [Herring, 96]** T. Herring.
"La localisation par satellite", Pour la Science, n°222, avril 96. pp. 60-65.
- [Horn, Schmidt, 95b]** J. Horn et G. Schmidt.
"Continuous localization of a mobile robot based on 3D-laser-range-data, predicted sensor images, and dead-reckoning", Robotic and Autonomous Systems n°2-3, Mai 1995. pp. 99-118.
- [Khalil, Murareci, 93]** W. Khalil et D. Murareci.
"Résolution polynomiale exacte des équations du SIREM". Rapport interne LAN - ECN N°93.22 1993.
- [Kim, Cho, 94]** J. H. Kim et H. S. Cho.
"Experimental investigation for the estimation of a mobile robot's position by linear scanning of a landmark". Robotics and Autonomous Systems. Vol. 13 (1994). pp. 39-51.
- [Kim, Lee, Kim, 96]** K.R. Kim, J.C. Lee et J. H. Kim.
"Dead-reckoning for a two-wheeled mobile robot on curved surfaces". IEEE International Conference on Robotics and Automation. Minneapolis. Avril 1996. pp. 1732-1737.
- [Larminat, 93]** Ph. de Larminat.
"Automatique - commande des systèmes linéaires". Traité des nouvelles technologies, série automatique, Hermès 1993.
- [Le Bris, 95]** L. Le Bris.
"Localisation d'un robot mobile par fusion de données proprioceptives et extéroceptives". Université de Montpellier II. Thèse de doctorat. LIRMM. Juillet 95
- [Le Corre, Garcia, 91a]** J.-F. Le Corre et G. Garcia.
"Determination of the six degrees of freedom of a moving civil-engineering vehicle". The 8th International Symposium on Automation and Robotics in Construction. Stuttgart. juin 1991. pp. 541-550.
- [Le Corre, Garcia, 91b]** J.-F. Le Corre et G. Garcia.
"Dynamic localisation of a vehicle using passive beacons". Revues d'Automatique et de Productique Appliquées. Volume 4, n°1 Juillet 1991. pp. 67-73.
- [Le Corre, Garcia, 92]** J.-F. Le Corre et G. Garcia.
"Real time determination of the location and speed of mobile robots running on non-planar surfaces". IEEE International Conference on Robotics and Automation. Nice. Mai 1992 pp. 2594-2599.
- [Le Corre, 93]** J.F. Le Corre.
"Cours de robotique mobile". Polycopié de cours de l'Ecole Centrale de Nantes. 1993-1994.
- [Lemaire, 97]** C. Lemaire.
"Expérimentation fusion mesures GPS". Rapport LCPC n° CL97007. Janvier 1997.

- [Leonard, Durrant-Whyte, 91]** J.J. Leonard et H.F. Durrant-Whyte.
"Mobile robot localization by tracking geometric beacons". IEEE transactions on Robotics and Automation. Vol. 7, n°3, Juin 1991.
- [Lévêque et al., 97]** O. Lévêque, L. Jaulin, D. Meizel et E. Walter.
"Vehicle localisation from inaccurate telemetric data: a set-inversion approach". 5 th. IFAC International Symposium on Robot Control (SYROCO'97). Nantes. Septembre 1997. pp. 179 - 185.
- [Lormeau, 90]** E. Lormeau.
"Projet SIREM : Système Intelligent de repérage d'engins mobiles". Rapport de Stage ingénieur. Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes. LAN. 1990.
- [Lormeau, 91]** E. Lormeau.
"Localisation dynamique 3D d'un robot mobile". Rapport de DEA. Université de Nantes - Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes. 1991.
- [Mäkelä et al 95]** H. Mäkelä, H. Lehtinen, K. Rintanen et K. Koskinen.
"Navigation system for LHD machines". 2nd IFAC Conference on Intelligent Autonomous Vehicles, Espoo, Finland, Juin 95. pp. 314 - 319.
- [Malinovsky, Rufov, Kovalec, 91]** Y. Malinovsky, V. Rufov et V. Kovalec.
"A system for determining the location of construction equipment on the working site". 8 th. International Symposium on Automation and Robotics in Construction. Vol. 2. 3-5, Stuttgart. Juin 1991. pp. 757-765.
- [Maybeck, 79a]** P.S. Maybeck.
"The Kalman filter : an introduction to concepts". Academic Press. Stochastic models estimation and control. Vol. 1, pp. 3-16.
- [Maybeck, 79b]** P.S. Maybeck.
"Stochastic models, estimation, and control". Mathematics in Science and Engineering. Vol. 141. Academic Press.
- [McMillan, 87]** J.C. McMillan.
"An integrated system for land navigation". Journal of the Institute of Navigation. Vol. 34. n°1. 1987. pp. 43-63.
- [Micromaine, 89]** Documentation constructeur.
"Trajectométrie en 3 dimensions ASTEREL AST 222 AZST 224". Micromaine A.S.I. ZAC du moulin aux moines, 72650 La Milesse.
- [Ming Wang, 88]** C. Ming Wang.
"Location estimation and uncertainty analysis for mobile robots". IEEE International Conference on Robotics and Automation, Philadelphie, Avril 1988, pp. 1230-1235.
- [Monod, Faure, 95]** M.O. Monod et P. Faure.
"Radar à modulation de fréquence". Rapport du CEMAGREF. Division Electronique et Intelligence Artificielle. Groupement d'Antony. 9 Novembre 1995.
- [Morel, 95]** D. Morel.
"Implantation de techniques de localisation d'un robot mobile". Mémoire de stage d'ingénieur du Conservatoire National des Arts et Métiers. LAN. Novembre 1995.
- [Nishizawa, Ohya, Yuta, 95]** T. Nishizawa, A. Ohya et S. Yuta.
"An implementation of on-board position estimation for mobile robot", IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nagoya, Avril 1995.

- [Opderbecke, 94]** J. Opderbecke.
"Localisation d'un robot mobile par fusion de données multisensorielles dans un environnement structuré". Thèse de doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan (LESIR). 1994.
- [Peyret, 89]** F. Peyret.
"La localisation absolue des engins routiers. Introduction au projet SIREM". Rapport de recherche interne du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Nantes, janvier 1989
- [Peyret, 95]** F. Peyret.
"Sessyl: the study of positioning systems for road construction robots". 12 th. International Symposium on Automation and Robotics in Construction, Varsovie. Juin 1995. pp. 55-62.
- [Peyret, Bétaille, Hintzy, 97]** F. Peyret, D. Bétaille et G. Hintzy.
"High-precision application of GPS in the field of real-time equipment positioning". 14 th. International Symposium on Automation and Robotics in Construction, Pittsburg (USA). Juin 8-11 1997. pp. 2-10.
- [Plestan, 95]** F. Plestan.
"Linéarisation par injection d'entrée-sortie généralisée et synthèse d'observateurs". Thèse de doctorat Université de Nantes - Ecole Centrale de Nantes. Octobre 1995.
- [Preciado et al., 91]** A. Preciado, D. Meizel, A. Segovia, et M. Rombaut.
"Fusion of multi-sensor data : a geometric approach". IEEE International Conference on Robotics and Automation. Sacramento 1991. pp. 2806-2811.
- [Radix, 80]** J.C. Radix.
"Systèmes inertiels à composants liés - strap down". Cepaduès éditions 1984.
- [Radix, 84]** J.C. Radix.
"Filtrage et lissage statistiques optimaux linéaires". Cepaduès éditions 1984.
- [Rintanen et al. , 94]** K. Rintanen, I. Kauppi, K. Koskinen et A. Koskinen.
"Inertial navigation for mobile robots by redundant low-cost gyrometers". Tampere international Conference on Machine Automation. Tampere, Février 1994. pp 225-241.
- [Rintanen et al, 95]** K. Rintanen, H. Mäkelä, K. Koskinen, J. Puputti, M. Sampo et M. Ojala.
"Development of an autonomous navigation system for an outdoor vehicle". 2nd IFAC Conference on Intelligent Autonomous Vehicles, Espoo, Finland, Juin 95.
- [Robin, 97]** J. Robin.
"Implantation de techniques de localisation et de commande d'un robot mobile". Mémoire de stage d'ingénieur du Conservatoire National des Arts et Métiers. IRCyN. Novembre 97.
- [Rombaut, 95]** M. Rombaut.
"Génération temps réel de données numériques/symboliques par fusion temporelle multi-capteurs". Traitement du Signal 1995. Vol. 12 n°4. pp. 317-326.
- [Rombaut, Meizel, 94]** M. Rombaut et D. Meizel.
"Dynamic data temporal multisensor fusion in the prometheus Prolab 2 demonstrator". IEEE International Conference on Robotics and Automation, San-Diego, Californie 1994. pp. 3576 - 3583.
- [Sabater, Thomas, 91]** A. Sabater et F. Thomas.
"Set membership approach to the propagation of uncertain geometric information". IEEE International Conference on Robotics and Automation, Sacramento, Californie 1991. pp. 2718-2723.

- [Scheding et al., 97]** S. Scheding, G. Dissanayake, E. Nebot et H. Durrant-Whyte.
"Slip Modelling and Aided Inertial Navigation of an LHD". IEEE International Conference on Robotics and Automation, Albuquerque, Avril 1997. pp. 1904-1909.
- [Skewis, Lumelsky, 94]** T. Skewis et V. Lumelsky.
"Experiments with a mobile robot operating in a cluttered unknown environment". Journal of Robotic Systems 1994. Vol. 11, n°4. pp. 281-300.
- [Smith, Self, Cheeseman, 88]** R. Smith, M. Self et P. Cheeseman.
"Estimating Uncertainty Spatial Relationships in Robotics". 1988 Elsevier Science Publishers, Uncertainty in Artificial Intelligence, Vol 2. pp. 435-461.
- [Talluri, Aggarwal, 92]** R. Talluri et J.K. Aggarwal.
"Position estimation for an autonomous mobile robot in an outdoor environment". IEEE Transactions on Robotics and Automation. Vol 8, oct 1992. pp. 573 - 584.
- [Tsumura, Okubo, Komatsu, 93]** T. Tsumura, H. Okubo et N. Komatsu.
"A 3D position and attitude measurement system using laser scanners and corner cubes". IEEE/RSJ International Symposium on Intelligent Robots and Systems. Yokohama, 1993. pp. 604-611.
- [Vaganay, 93]** J. Vaganay.
"Conception d'un système multisensoriel de localisation dynamique 3D pour robot mobile". Université de Montpellier II. Thèse de doctorat. LIRMM. Juillet 93.

Bibliographie (par ordre alphabétique)

- [Becker et al, 95]** C. Becker, J. Salas, K. Tokusei et J.C. Latombe.
"Reliable navigation using landmarks". IEEE International Conference on Robotics and Automation. Nagoya. Avril 1995. pp. 401-406.
- [Beguenane, 91]** R. Beguenane.
"Fusion d'informations multisensorielles : application à la localisation d'un robot mobile à partir de données odométriques et goniométriques". Rapport de DEA du CNAM. LESiR. 1991.
- [Beom, Cho, 95]** H.R. Beom et H.S. Cho.
"Mobile robot localization using a single rotating sonar and two passive cylindrical beacons". Robotica 1995. Vol. 13. pp. 243-245.
- [Bideaux, Baptiste, Pellet, 94]** E. Bideaux, P. Baptiste et C. Pellet.
"Localisation par réseaux neuromimétiques". APII 1994, Vol. 28, n°5. pp. 445-453.
- [Bornard et al, 93]** G. Bornard, F. Celle-Couenne et G. Gilles.
"Observabilité et observateurs", chap 5, Systèmes Non linéaires, tome 1. Ouvrage collectif réalisé dans le cadre du groupe Non Linéaire DRET/AF CET, coordonné par A.J. Fossard et D. Normand-Cyrot, Masson 1993.
- [Brown, Hwang, 85]** R. G. Brown et P. Y.C. Hwang.
"Introducing to random signals and applied Kalman filtering". Second edition. Wiley 1985.
- [Carton, 93]** P. Carton.
"La localisation du robot autonome CARL". Journée d'études - localisation en robotique mobile. Supélec. Avril 93.
- [Castagliola, 91]** Ph. Castagliola.
"Un système incrémental de fusion multi-capteurs pour un robot mobile". Thèse de doctorat de l'Université de Technologie Compiègne. Septembre 91.
- [Charbit, 90]** Charbit.
"Eléments de théorie du signal : les signaux aléatoires". Collection pédagogique de Télécom. Ellipses 1990.
- [Chen, Lee, Debra, 94]** J.-H. Chen, S.C. Lee et D. B. Debra.
"Gyroscope free strapdown inertial measurement unit by six linear accelerometers". Journal of guidance, control and dynamics. Vol. 17, n°2, Mars -Avril 1994. pp. 286-290.
- [De Coulon, 84]** De Coulon.
"Théorie et traitement des signaux". Traité d'électricité. Dunod 1984.
- [Devise, Doncarli, 92]** O. Devise et C. Doncarli.
"Motion estimation of the mobile robot with uncalibrated bearings only measurements". International Symposium on Robotics, Mechatronics and Manufacturing Systems IMACS/SICE'92 Kobe, Japan, Septembre 16-20, 1992, pp. 1687-1692
- [Doncarli, Le Corre, Devise, 91]** C. Doncarli, J.F. Le Corre et O. Devise.
"Dynamic location of a mobile robot by extended Kalman filter". IEEE/RSJ International Symposium on Intelligent Robots and Systems 1991.

- [Durieu, Opderbecke, Allègre, 93]** C. Durieu, J. Opderbecke et G. Allègre.
"A data fusion application for location of a mobile robot using an odometer and a panoramic laser telemeter", Intelligent Autonomous Systems 3, Pittsburgh, Février 1993. pp. 519 - 529.
- [Durrant-Whyte, 88]** H.F. Durrant-Whyte.
"Sensor models and multisensor integration", The International Journal of Robotics Research, Vol. 7, N°6 Décembre 1988. pp. 97-113.
- [Elloy, 93]** J.P. Elloy.
"Temps réel". Cours de D.E.A. Automatique et Informatique Appliquée. Ecole Centrale de Nantes, Université de Nantes. 1993.
- [Fortunato, 90]** S. Fortunato.
"Algorithme de localisation d'un robot mobile dans un environnement balisé par fusion de données". Rapport de DEA de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan. LESiR. 1990.
- [Freedman, Smyton, 93]** D.D. Freedman et P. A. Smyton.
"Overview of data fusion activities". American Control Conference. San Francisco. Juin 1993. pp. 854-858.
- [Fujikawa, Zimbelman, 95]** S.J. Fujikawa et D.F. Zimbelman.
"Spacecraft attitude determination by Kalman filtering of Global Positioning System signals". Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol. 18, n°6, novembre-décembre 95. pp. 1365-1371.
- [Hablani, 95]** H.B. Hablani.
"Roll/pitch determination with scanning horizon sensors oblateness and attitude corrections". Journal of guidance, control and dynamics. Vol. 18, n°6, novembre-décembre 95. pp. 1355-1364.
- [Hackett, Shah, 91]** Hackett et Shah.
"Multisensor fusion : a perspective". Proceedings of the IEEE. International Conference on Robotics and Automation. 1991.
- [Hamel, Halbwachs, Meizel, 93]** T. Hamel, E. Halbwachs et D. Meizel.
"La géométrie offre-t-elle une alternative possible au filtrage de Kalman?". Journée d'études en localisation - robotique mobile. Supélec. Avril 93.
- [Holenstein, Badreddin, 93]** A.A. Holenstein et Bradreddin.
"Mobile-robot position update using ultrasonic range measurements", International Journal of Robotics and Automation. Vol. 9, n°2. pp. 72-80.
- [Houzell, Giraudon, 94]** S. Houzell et G. Giraudon.
"Contribution to multisensor fusion formalization", Elsevier, Robotics and Autonomous Systems, Vol 13 n°2, July 1994, pp. 69-85.
- [Horn, Schmidt, 95a]** J. Horn et G. Schmidt.
"Continuous localization for long-range indoor navigation of mobile robots", IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nagoya, Avril 1995. pp. 387-394.
- [Horst, 93]** J.A. Horst.
"Error propagation in the determination of position and heading of a vehicle on a flat surface". Elsevier. Automation in construction. 1993. pp. 139-154.
- [Isidori, 80]** A. Isidori.
"Observabilité et observateurs des systèmes non linéaires". Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse de systèmes et le traitement du signal. Editions du CNRS.

- [Kauppi, Seppä, Koskinen, 92]** Kauppi, H. Seppä et K. Koskinen.
"Sonic Localization system using pseudo random noise and cross-correlation technique". 2nd International Conference on Automation, Robotics and Computer Vision. Singapore. Septembre 1992. pp. 1131-1134.
- [Khan, Hashimoto, Harashima, 95]** D. Khan, H. Hashimoto et F. Harashima.
"Position estimation for mobile robot using sensor fusion". IEEE International conference on intelligent robots and system. Pittsburgh 1995. pp. 271-276.
- [Kleeman, 95]** L. Kleeman.
"A three dimensional localiser for autonomous robot vehicles". Robotica 1995. Vol. 13. pp. 87-94.
- [Koh, Kim, Cho, 94]** K.C. Koh, J.S. Kim et H.S. Cho.
"A position estimation system for mobile robots using a monocular image of a 3-D landmark". Robotica 1994. Vol. 12. pp. 431-441.
- [Kuritsky, Goldstein, 83]** M.M. Kuritsky et M.S. Goldstein.
"Inertial Navigation". IEEE Transactions on Robotics and Automation. 1983, Vol. 71, n°10, pp. 1156-1176.
- [Landis Markley, 94]** F. Landis Markley.
"New quaternion attitude estimation method". Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol. 17, n°2, Mars -Avril 1994. pp. 407-409.
- [Larminat, 71]** Ph. de Larminat.
"Sur l'identification par filtrage non linéaire". Thèse de doctorat d'état de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique. Mai 1971.
- [Leonard, Durrant-Whyte, Cox, 90]** J.J. Leonard, H.F. Durrant-Whyte et Cox.
"Dynamic map building for autonomous mobile robot". The International Journal of Robotics Research. Vol 11, 1990.
- [Libeaut, 92]** L. Libeaut.
"Introduction à la fusion de données. Application à la localisation dynamique d'un robot mobile". Rapport de DEA. Université de Nantes - Ecole Centrale de Nantes 1992.
- [Llibre, 92]** M. Llibre.
"Localisation d'un véhicule d'exploration planétaire". Journée d'études - localisation en robotique mobile. Supélec. Avril 93.
- [Moraal, 95]** P.E. Moraal.
"Nonlinear observer design : theory and applications to automotive control". Ph. D. Thesis. Michigan University 1995.
- [Musoff, Murphy, 95]** H. Musoff et J. Murphy.
"Study of strapdown navigation attitude algorithms". Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol. 18, n°2. Mars-Avril 1995. pp. 287-290.
- [Nebylov, 94]** A.V. Nebylov.
"Robust algorithm for integration of a discrete positional sensor and a continuous acceleration sensor". Automation and Remote Control, Vol. 55, n° 5, 1994. pp. 662-668.
- [Piasecki, 94]** M. Piasecki.
"Mobile robot localization by fuzzy logic fusion of multisensor data". Robotics and Autonomous Systems 12 (1994). pp. 155-162.

- [Picinbono, 94]** B. Picinbono.
"Signaux aléatoires". Tome 1. Dunod 1994.
- [Rohmer, 93]** S. Rohmer.
"Modélisation d'environnement par nombres multivaleurs. Application à la recherche de trajectoires robustes pour robot non holonome". Thèse de doctorat de l'université de Nancy 1. 1993.
- [Smith, Cheeseman, 86]** R. Smith et P. Cheeseman.
"On the representation and estimation of spatial uncertainty". Robotics Research Vol 5, Winter 1986. pp. 56-68.
- [Tashiro, Ota, Lin, Arai, 95]** K. Tashiro, J. Ota, Y. C. Lin et T. Arai.
"Design of the optimal arrangement of artificial landmarks". IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nagoya, Avril 1995. pp. 407-413.
- [Talluri, Aggarwal, 96]** R. Talluri et J.K. Aggarwal.
"Mobile robot self-location using model-image feature correspondence". IEEE Transactions on Robotics and Automation vol 12, n°1, Février 1996.
- [Tounsi, 95]** M. Tounsi.
"Contribution à l'étude des robots mobiles". Thèse de doctorat Université de Nantes - Ecole Centrale de Nantes. LAN. Octobre 1995.
- [Torrieri, 84]** D. J. Torrieri.
"Statistical theory of passive location systems". IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Vol. AES-20, n°2, 1984. pp. 183-198.
- [Vaganay, Aldon, Fournier, 93]** J. Vaganay, M.J. Aldon et A. Fournier.
"Mobile robot attitude estimation by fusion of inertial data", IEEE International Conference on Robotics and Automation. Atlanta, Mai 1993. pp. 277-282.
- [Xu, Chi, 93]** H. Xu et X. Chi.
"Calibration and parameter identification for laser scanning sensor". IEEE International Conference on Robotics and Automation. Atlanta, Mai 1993. pp. 665-670.
- [Yagi, Kawato, Tsuji, 94]** Y. Yagi, S. Kawato, S. Tsuji.
"Real-time omnidirectional image sensor (COPIS) for vision-guided navigation". IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 10, n°1, Février 94. pp. 11-21.

ANNEXES

ANNEXE A

DU FILTRE DE KALMAN LINÉAIRE VARIANT AU FILTRE DE KALMAN ÉTENDU (EKF) AVEC COMMANDE BRUITÉE ET TRANSMISSION DIRECTE DE L'ENTRÉE SUR LA SORTIE

1 Système linéaire variant	253
2 Système linéaire variant à bruits corrélés.....	256
3 Système linéaire variant à entrée mesurée sans transmission directe	257
4 Système linéaire variant à entrée mesurée avec transmission directe	259
5 Système non linéaire à entrée déterministe	261
6 Système non linéaire à entrée mesurée	264
7 Système non linéaire à entrée mesurée avec transmission directe	266

ANNEXE B

DEUXIÈME FORMULATION DU FILTRE 2D

ANNEXE C

COMMUTATIONS ENTRE LES FILTRES 2D AVEC ET SANS IDENTIFICATION DES RAYONS

1 Arrêt de l'identification des rayons.....	269
2 Passage à l'identification des rayons.....	270
3 Utilisation de deux seuils	271

ANNEXE D

EXPRESSION DES MATRICES JACOBIENNES DES FILTRES 3D À 6 ET 4 ÉLÉMENTS

1 Matrices jacobiennes du filtre « EKF6a »	273
2 Matrices jacobiennes du filtre « EKF4a »	282

ANNEXE A

Du filtre de Kalman linéaire variant au filtre de Kalman étendu (EKF) avec commande bruitée et transmission directe de l'entrée sur la sortie

Dans cette annexe on présente différents filtres de Kalman pour aboutir aux équations d'un EKF dont

- l'équation d'évolution et l'équation d'observation sont non linéaires,
- le vecteur d'entrée est bruité,
- il y a une transmission directe de l'entrée sur la sortie.

Les références bibliographiques qui ont permis d'établir les équations sont [Maybeck, 79a] [Maybeck, 79b] [Radix, 84] [Chui, Chen, 91].

1 SYSTEME LINEAIRE VARIANT

On considère un système linéaire, pas forcément stationnaire, ayant une entrée (ou commande) « Ud_k » déterministe, c'est-à-dire connue ou mesurée sans bruit. Si le vecteur d'état est X , le système peut être représenté dans l'espace d'état par les équations matricielles récursives suivantes :

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_k X_k + B_k Ud_k + \zeta_k \\ Z_k = C_k X_k + D_k Ud_k + \eta_k \end{cases} \quad (A.1)$$

Où X_k , A_k , B_k , Ud_k , ζ_k , Z_k , C_k , D_k et η_k ont pour dimensions respectives $n \times 1$, $n \times n$, $n \times m$, $m \times 1$, $n \times 1$, $p \times 1$, $p \times n$, $p \times m$ et $p \times 1$.

Les bruits ζ_k (bruit d'état) et η_k (bruit de mesure) sont supposés blancs, centrés et de matrices de covariance respectives Q et R connues et constantes pour alléger les équations.

$$E(\zeta_k) = 0, \text{ var}(\zeta) = Q \quad (A.2)$$

où « E » représente l'espérance mathématique.

$$E(\eta_k) = 0, \text{var}(\eta) = R \quad (\text{A.3})$$

On suppose de plus qu'ils sont :

- indépendants de l'état, c'est-à-dire que :

$$E(X_k \cdot \eta_k^t) = 0 \text{ et } E(X_k \cdot \zeta_k^t) = 0 \quad (\text{A.4})$$

- indépendants entre eux (ou non corrélés, ce qui revient au même si les bruits sont gaussiens) :

$$E(\zeta_k \cdot \eta_k^t) = 0 \quad (\text{A.5})$$

Il est à noter dans le système (A.1) un terme D_k dit de « transmission directe » de l'entrée sur la sortie.

Sous l'hypothèse gaussienne, différentes approches aboutissent aux équations du filtre de Kalman (minimum de variance de l'erreur d'estimation, maximum *a posteriori*, moindres carrés...). Le problème consiste à trouver la meilleure estimation de l'état X_k étant données les observations Z_k depuis l'instant initial jusqu'à l'instant "l". L'estimation de l'état X_k sera notée $\hat{X}_{k/l}$ c'est-à-dire l'estimée de X_k sachant tout ce qui s'est passé jusqu'à l'instant l. La matrice de covariance de cet estimateur sera notée:

$$P_{k/l} = E \left\{ \left(\hat{X}_{k/l} - X_k \right) \left(\hat{X}_{k/l} - X_k \right)^t \right\} \quad (\text{A.6})$$

Selon les valeurs de k et de l, on distingue généralement trois catégories de problèmes:

- lissage $l > k$
- filtrage $l = k$
- prédiction $l < k$.

Dans les applications temps réel, il s'agit le plus souvent de problèmes de prédiction et de filtrage.

Si l'on connaît l'état initial et sa variance, on en déduit par récurrence l'état et sa variance à chaque pas d'échantillonnage en appliquant l'algorithme suivant [Chui, Chen, 91] :

pour $k=1,2,\dots$

$$P_{0/0} = \text{Var}(X_0) \quad (\text{A.7})$$

$$\hat{X}_{k+1/k} = A_k \hat{X}_{k/k} + B_k U_d k \quad (\text{A.8})$$

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^t + Q \quad (\text{A.9})$$

$$K_k = P_{k+1/k} C_k^t (C_k P_{k+1/k} C_k^t + R)^{-1} \quad (\text{A.10})$$

$$\hat{X}_{k+1/k+1} = \hat{X}_{k+1/k} + K_k (Z_k - D_k U_d k - C_k \hat{X}_{k+1/k}) \quad (\text{A.11})$$

$$P_{k+1/k+1} = (I - K_k C_k) P_{k+1/k} \quad (\text{A.12})$$

Commentaires :

a) Le formalisme de Kalman discret implique donc le calcul de deux étapes pendant la même période d'échantillonnage : une étape de prédiction et une étape de filtrage (ou de recalage ou encore de correction). C'est le fonctionnement en tant que filtre qui nous intéresse le plus. En effet, étant donné \hat{X}_k une estimation de l'état à l'instant k , on calcule une étape de prédiction et une étape de filtrage pour obtenir un état filtré $\hat{X}_{k+1/k+1} = \hat{X}_{k+1}$ à l'instant $k+1$.

b) La composante $A_k \hat{X}_{k/k} + B_k U_d k$ constitue la meilleure estimation *a priori* de $\hat{X}_{k+1/k}$, c'est-à-dire ne tenant pas compte des mesures Z_k [Radix, 84]. Ce résultat est conforme au bon sens : en l'absence de renseignements complémentaires (à savoir les mesures Z_k), il est naturel de faire obéir \hat{X} à la partie certaine du modèle d'évolution.

c) Le terme correctif $K_k (Z_k - D_k U_d k - C_k \hat{X}_{k+1/k})$ traduit l'influence de l'écart entre la mesure Z_k et la « mesure attendue » $D_k U_d k + C_k \hat{X}_{k+1/k}$ sur l'état. A partir de la différence ainsi obtenue, une correction linéaire est élaborée, fonction de la matrice de gain optimal K_k .

d) L'expression du gain optimal K_k peut également faire l'objet de considérations simples : si l'on a une grande confiance dans les estimations précédentes et si l'on considère la mesure actuelle comme douteuse, K_k doit être faible ; inversement, si les estimations précédentes sont sujettes à caution et si la mesure actuelle est considérée comme correcte, K_k doit être élevé.

Ainsi :

« {Grande confiance dans les estimations précédentes et peu dans la mesure}

→ P et R⁻¹ petites → K_k petit »

« {Grande confiance dans la mesure et peu dans les estimations précédentes}

→ P et R⁻¹ grande → K_k grand »

d) L'état initial X₀ n'a qu'une courte incidence sur le processus d'estimation.

2 SYSTEME LINEAIRE VARIANT A BRUITS CORRELES

Etudions maintenant le cas où les bruits de modèle et de mesure sont corrélés. On considère le même système linéaire mais en oubliant les entrées pour simplifier :

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_k X_k + \zeta_k \\ Z_k = C_k X_k + \eta_k \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Les bruits respectent les hypothèses (A.2), (A.3) et (A.4) (indépendants de l'état), mais (A.5) n'est plus vérifiée, c'est-à-dire qu'ils sont corrélés entre eux :

$$E(\zeta_k \eta_l^t) = \begin{cases} S & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

S est une matrice d'intercorrélation qui, en générale, n'est pas carrée (n x p) et *a fortiori* pas symétrique.

Il existe deux filtres de Kalman pour traiter ce cas, selon que le bruit de mesure à l'instant « k » est corrélé avec le bruit de modèle à l'instant « k » ou à l'instant « k-1 » [Maybeck, 79b pp. 246 -247] :

- si ζ_k est corrélé avec η_{k-1} alors l'étape de recalage reste inchangée.
- si ζ_k est corrélé avec η_k alors l'étape de prédiction reste inchangée.

Le cas qui nous intéresse correspond à la deuxième éventualité (ζ_k corrélé avec η_k). Ainsi, si l'on connaît l'instant initial et sa variance, on en déduit par récurrence l'état et sa variance en appliquant l'algorithme suivant [Maybeck, 79b p. 247] :

pour $k=1,2,\dots$

$$P_{0/0} = \text{Var}(X_0) \quad (\text{A.15})$$

$$\hat{X}_{k+1/k} = A_k \hat{X}_{k/k} \quad (\text{A.16})$$

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^t + Q \quad (\text{A.17})$$

$$K_k = \left(P_{k+1/k} C_k^t + S \right) \left(C_k P_{k+1/k} C_k^t + R + C_k S + S^t C_k^t \right)^{-1} \quad (\text{A.18})$$

$$\hat{X}_{k+1/k+1} = \hat{X}_{k+1/k} + K_k \left(Z_k - C_k \hat{X}_{k+1/k} \right) \quad (\text{A.19})$$

$$P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k} - K_k \left(C_k P_{k+1/k} + S^t \right) \quad (\text{A.20})$$

Remarques :

- a) L'étape de prédiction est identique avec celle d'un filtre à bruits décorrélés (cf. paragraphe 1). Seule l'étape de filtrage change : le gain de Kalman K_k et l'évolution de la variance dépendent de la corrélation S . L'expression du recalage de X reste semblable au cas non corrélé.
- b) Quand les bruits sont décorrélés, $S = 0$. On vérifie que, dans ce cas, on obtient bien les équations du paragraphe 1.

3 SYSTEME LINEAIRE VARIANT A ENTREE MESUREE SANS TRANSMISSION DIRECTE

On considère le même système linéaire que dans le paragraphe 1, mais maintenant l'entrée du système n'est pas connue précisément mais mesurée. Soit « U_k^* » cette mesure. On suppose qu'elle est affectée d'un bruit additif centré indépendant.

$$E(\gamma_k) = 0, \text{var}(\gamma_k) = Q_\gamma \quad (\text{A.21})$$

En supposant qu'il n'y ait pas transmission directe de l'entrée sur la sortie, le système est décrit par les équations :

$$\begin{cases} X_{k+1} &= A_k X_k + B_k U_k^* & + \alpha_k \\ U_k^* &= U_k & + \gamma_k \\ Z_k &= C_k X_k & + \beta_k \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Où U_k est l'entrée déterministe inconnue appliquée au système. Les trois bruits sont indépendants et on a :

$$E(\alpha_k) = 0, \text{var}(\alpha_k) = Q_\alpha \quad (\text{A.23})$$

$$E(\beta_k) = 0, \text{var}(\beta_k) = Q_\beta \quad (\text{A.24})$$

En regroupant les deux premières équations, on obtient :

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k + B_k \gamma_k + \alpha_k \\ Z_k = C_k X_k + \beta_k \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

On pose :

$$\begin{cases} \zeta_k = B_k \gamma_k + \alpha_k \\ \eta_k = \beta_k \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

Le système devient alors :

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k + \zeta_k \\ Z_k = C_k X_k + \eta_k \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Il est analogue au système du paragraphe 1, car on a :

$$E(\zeta_k) = E(B_k \gamma_k) + E(\alpha_k) = 0, \text{var}(\zeta) = Q = B_k Q_\gamma B_k^t + Q_\alpha \quad (\text{A.28})$$

$$E(\eta_k) = 0, \text{var}(\eta) = R = Q_\beta \quad (\text{A.29})$$

On vérifie l'indépendance ces bruits entre eux :

$$E(\zeta_k \cdot \eta_k^t) = 0 \quad (\text{A.30})$$

Avant de pouvoir appliquer les équations du paragraphe 1, il reste à considérer le fait que nous ne disposons que d'une mesure bruitée de la commande. Comment calculer l'état prédit ?

La phase de prédiction correspond à une estimation à variance *a priori* minimale. En prenant l'espérance mathématique et en mettant à profit l'hypothèse d'indépendance de γ_k , alors :

$$\begin{aligned} E(A_k \hat{X}_{k/k} + B_k U_k^*) &= E(A_k \hat{X}_{k/k} + B_k U_k + B_k \gamma_k) \\ &= E(A_k \hat{X}_{k/k} + B_k U_k) + E(B_k \gamma_k) \\ &= E(A_k \hat{X}_{k/k} + B_k U_k) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

On écrit donc :

$$\hat{X}_{k+1/k} = A_k \hat{X}_{k/k} + B_k U_k^* \quad (\text{A.32})$$

Cette manière de calculer la prédiction de l'état est la plus naturelle.

L'étape de recalage ne change pas par rapport au paragraphe 1.

L'algorithme est :

pour $k=1,2,\dots$

$$P_{0/0} = \text{Var}(X_0) \quad (\text{A.33})$$

$$\hat{X}_{k+1/k} = A_k \hat{X}_{k/k} + B_k U_k^* \quad (\text{A.34})$$

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^t + B_k Q_\gamma B_k^t + Q_\alpha \quad (\text{A.35})$$

$$K_k = P_{k+1/k} C_k^t (C_k P_{k+1/k} C_k^t + Q_\beta)^{-1} \quad (\text{A.36})$$

$$\hat{X}_{k+1/k+1} = \hat{X}_{k+1/k} + K_k (Z_k - C_k \hat{X}_{k+1/k}) \quad (\text{A.37})$$

$$P_{k+1/k+1} = (I - K_k C_k) P_{k+1/k} \quad (\text{A.38})$$

4 SYSTEME LINEAIRE VARIANT A ENTREE MESUREE AVEC TRANSMISSION DIRECTE

On considère le même système linéaire que dans le paragraphe 3, mais avec une transmission directe de l'entrée (bruitée) sur la sortie.

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k^* + \alpha_k \\ U_k^* = U_k + \gamma_k \\ Z_k = C_k X_k + D_k U_k^* + \beta_k \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

En regroupant les équations, on obtient :

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k + B_k \gamma_k + \alpha_k \\ Z_k = C_k X_k + D_k U_k + D_k \gamma_k + \beta_k \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

Le bruit γ_k apparaît dans l'équation d'état et de sortie. On est donc confronté à un problème analogue au paragraphe 2 avec des bruits corrélés.

On pose :

$$\begin{cases} \zeta_k = B_k \gamma_k + \alpha_k \\ \eta_k = D_k \gamma_k + \beta_k \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

$$E(\zeta_k) = E(B_k \gamma_k) + E(\alpha_k) = 0, \text{ var}(\zeta) = Q = B_k Q_\gamma B_k^t + Q_\alpha \quad (\text{A.42})$$

$$E(\eta_k) = E(D_k \gamma_k) + E(\beta_k) = 0, \text{ var}(\eta) = R = D_k Q_\gamma D_k^t + Q_\beta, \quad (\text{A.43})$$

Corrélation des bruits entre eux :

$$E(\zeta_k \cdot \eta_k^t) = S_k = E\{(B_k \gamma_k + \alpha_k)(D_k \gamma_k + \beta_k)^t\} \quad (\text{A.44})$$

$$= E\{B_k \gamma_k (D_k \gamma_k)^t\} = E\{B_k \gamma_k \gamma_k^t D_k^t\} = B_k E\{\gamma_k \gamma_k^t\} D_k^t = B_k Q_\gamma D_k^t \quad (\text{A.45})$$

Le système devient alors :

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k + \zeta_k \\ Z_k = C_k X_k + D_k U_k + \eta_k \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

Comme pour le cas du paragraphe 3, lors du calcul de la prédiction, on utilise la mesure de l'entrée pour calculer l'état prédit.

En suivant le même raisonnement physique la meilleure prédiction de la mesure que l'on puisse trouver est celle qui utilise la mesure de l'entrée. Son expression est :

$$D_k U_k^* + C_k \hat{X}_{k+1/k} \quad (\text{A.47})$$

Dans l'algorithme du paragraphe 2, on effectue les remplacements :

$$S \rightarrow S_k = B_k Q_\gamma D_k^t \quad (S \text{ n'est plus constant puisqu'il dépend de } B_k \text{ et } D_k).$$

$$Q \rightarrow B_k Q_\gamma B_k^t + Q_\alpha$$

$$R \rightarrow D_k Q_\gamma D_k^t + Q_\beta$$

En ajoutant le terme d'entrée, on obtient :

pour $k=1,2,\dots$

$$P_{0/0} = \text{Var}(X_0) \quad (\text{A.48})$$

$$\hat{X}_{k+1/k} = A_k \hat{X}_{k/k} + B_k U_k^* \quad (\text{A.49})$$

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^t + B_k Q_\gamma B_k^t + Q_\alpha \quad (\text{A.50})$$

$$S_k = B_k Q_\gamma D_k^t \quad (\text{A.51})$$

$$K_k = \left(P_{k+1/k} C_k^t + S_k \right) \left(C_k P_{k+1/k} C_k^t + D_k Q_\gamma D_k^t + Q_\beta + C_k S_k + S_k^t C_k^t \right)^{-1} \quad (\text{A.52})$$

$$\hat{X}_{k+1/k+1} = \hat{X}_{k+1/k} + K_k \left(Z_k - D_k U_k^* - C_k \hat{X}_{k+1/k} \right) \quad (\text{A.53})$$

$$P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k} - K_k \left(C_k P_{k+1/k} + S_k^t \right) \quad (\text{A.54})$$

Cette expression finale de l'algorithme fait apparaître les bruits α , β et γ qui agissent sur le système.

5 SYSTEME NON LINEAIRE A ENTREE DETERMINISTE

5.1 Modèle d'état

On considère maintenant un système non linéaire représenté par les équations suivantes :

$$\begin{cases} X_{k+1} = f(X_k, U_k) + \alpha_k \\ Y_k = g(X_k, U_k) + \beta_k \end{cases} \quad (\text{A.55})$$

X_k (nx1) est le vecteur d'état à estimer.

U_k (mx1) est l'entrée déterministe appliquée au système.

Y_k (px1) correspond au vecteur de sortie du système.

Les fonctions vectorielles non linéaires « f » et « g » définissent l'évolution du système et la relation entre l'état et les mesures.

$$f: \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^n \quad (\text{A.56})$$

$$g: \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^p \quad (\text{A.57})$$

Les bruits α_k , et β_k sont respectivement appelés bruit de modèle et bruit de mesure. Ils sont supposés blancs, centrés, décorrélés entre eux et indépendants de l'état.

Le formalisme de Kalman étendu à l'ordre un représente une solution assez simple au problème d'estimation non linéaire. Le principe consiste à revenir, après une linéarisation au premier ordre, au filtrage linéaire décrit dans le paragraphe précédent.

La linéarisation peut se faire autour d'une trajectoire de référence prédéfinie (on parle dans ce cas de Filtre de Kalman Linéarisé) ou bien autour des valeurs prédites ou estimées précédemment (Filtre de Kalman Etendu ou en anglais Extended Kalman Filter (EKF¹)). La deuxième solution est la plus largement utilisée car elle est utilisable quand la trajectoire est inconnue.

5.2 Linéarisation du problème (formulation étendue)

Considérons le développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction vectorielle f, autour de la valeur estimée connue $\hat{X}_{k/k}$.

¹ Les premières applications ont concerné la mission Apollo et datent de 1961-1962.

$$f(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k) = f(\hat{\mathbf{X}}_{k/k}, \mathbf{U}_k) + \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}(\hat{\mathbf{X}}_{k/k}, \mathbf{U}_k) \right] (\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_{k/k}) + o_2(\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_{k/k}) \quad (\text{A.58})$$

La linéarisation est bonne si \mathbf{X}_k est proche de $\hat{\mathbf{X}}_{k/k}$, c'est-à-dire si l'erreur d'estimation est petite. On n'a pas besoin de dériver « f » par rapport à « U », car « U » est déterministe.

On applique le même raisonnement pour l'équation d'observation, mais cette fois la linéarisation est obtenue autour de la prédiction connue $\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k}$.

$$g(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k) = g(\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k}, \mathbf{U}_k) + \left[\frac{\partial g}{\partial \mathbf{X}}(\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k}, \mathbf{U}_k) \right] (\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k}) + o_2(\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k}) \quad (\text{A.59})$$

On remplace les fonctions f et g par les linéarisations ci-dessus dans le modèle non linéaire (A.55).

En posant :

$$\mathbf{A}_k = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}(\hat{\mathbf{X}}_{k/k}, \mathbf{U}_k) \right] \text{ et } \mathbf{C}_k = \left[\frac{\partial g}{\partial \mathbf{X}}(\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k}, \mathbf{U}_k) \right] \quad (\text{A.60})$$

$$\mathbf{U}d_k = f(\hat{\mathbf{X}}_{k/k}, \mathbf{U}_k) - \mathbf{A}_k \cdot \hat{\mathbf{X}}_{k/k} \quad (\text{A.61})$$

$$\zeta_k = \alpha_k \quad (\text{A.62})$$

$$\eta_k = \beta_k \quad (\text{A.63})$$

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{Y}_k - g(\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k}, \mathbf{U}_k) + \mathbf{C}_k \cdot \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} \quad (\text{A.64})$$

On obtient le système suivant, semblable au modèle d'état (A.1) ($\mathbf{B}_k = \mathbf{I}$ et $\mathbf{D}_k = 0$) :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{X}_k + \mathbf{U}d_k + \zeta_k \\ \mathbf{Z}_k = \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{X}_k + \eta_k \end{cases} \quad (\text{A.65})$$

On peut maintenant appliquer les résultats du paragraphe 1.

5.3 Etape de prédiction

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} &= \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{X}}_{k/k} + \mathbf{U}d_k \\ &\approx \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{X}}_{k/k} + f(\hat{\mathbf{X}}_{k/k}, \mathbf{U}_k) - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{X}}_{k/k} \\ &\approx f(\hat{\mathbf{X}}_{k/k}, \mathbf{U}_k) \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

$$\text{Var}(\zeta_k) = \mathbf{Q}_{\alpha_k} \quad (\text{A.67})$$

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k/k} \mathbf{A}_k^t + \mathbf{Q}_k \quad (\text{A.68})$$

5.4 Etape de filtrage

D'après l'équation (A.64), Z_k et Y_k sont égaux à un terme déterministe près. Donc :

$$\text{Var}(Z_k) = \text{Var}(Y_k) = R_k \quad (\text{A.69})$$

$$K_k = P_{k+1/k} C_k^t (C_k P_{k+1/k} C_k^t + R_k)^{-1} \quad (\text{A.70})$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1/k+1} &= \hat{X}_{k+1/k} + K_k (Z_k - C_k \hat{X}_{k+1/k}) \\ &= \hat{X}_{k+1/k} + K_k (Y_k - g(\hat{X}_{k+1/k}, U_k) + C_k \hat{X}_{k+1/k} - C_k \hat{X}_{k+1/k}) \\ &= \hat{X}_{k+1/k} + K_k (Y_k - g(\hat{X}_{k+1/k}, U_k)) \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

$$P_{k+1/k+1} = (I - K_k C_k) P_{k+1/k} \quad (\text{A.72})$$

Commentaires :

- La convergence de l'EKF n'est pas garantie. Elle dépend directement de la qualité des linéarisations, c'est-à-dire que l'erreur d'estimation doit rester « faible ».
- L'optimalité statistique elle non plus n'est pas garantie.

5.5 Algorithme

pour $k=1,2,\dots$

$$P_{0/0} = \text{Var}(X_0) \quad (\text{A.73})$$

$$A_k = \left[\frac{\partial f}{\partial X}(\hat{X}_{k/k}, U_k) \right] \quad (\text{A.74})$$

$$\hat{X}_{k+1/k} = f(\hat{X}_{k/k}, U_k) \quad (\text{A.75})$$

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^t + Q \quad (\text{A.76})$$

$$C_k = \left[\frac{\partial g}{\partial X}(\hat{X}_{k+1/k}, U_k) \right] \quad (\text{A.77})$$

$$K_k = P_{k+1/k} C_k^t (C_k P_{k+1/k} C_k^t + R)^{-1} \quad (\text{A.78})$$

$$\hat{X}_{k+1/k+1} = \hat{X}_{k+1/k} + K_k (Y_k - g(\hat{X}_{k+1/k}, U_k)) \quad (\text{A.79})$$

$$P_{k+1/k+1} = (I - K_k C_k) P_{k+1/k} \quad (\text{A.80})$$

6 SYSTEME NON LINEAIRE A ENTREE MESUREE

6.1 Modèle d'état

On considère maintenant un système non linéaire représenté par les équations suivantes (pas de transmission directe de l'entrée sur la sortie) :

$$\begin{cases} X_{k+1} = f(X_k, U_k^*) + \alpha_k \\ U_k^* = U_k + \gamma_k \\ Y_k = g(X_k) + \beta_k \end{cases} \quad (\text{A.81})$$

X_k , Y_k ont les mêmes définitions que précédemment. Par contre, l'entrée du système U_k n'est pas connue précisément mais mesurée avec un bruit, comme exprimé par la deuxième équation. Soit U_k^* ($m \times 1$) cette mesure (bruitée) du vecteur de commande déterministe U_k ($m \times 1$) appliquée au système.

Les bruits α_k , β_k et γ_k sont respectivement appelés bruit de modèle, bruit de commande et bruit de mesure. Ils sont supposés blancs, centrés, décorrélés entre eux et indépendants de l'état.

Considérons le développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction vectorielle « f », autour de la valeur estimée connue $\hat{X}_{k/k}$ pour X, et autour de la commande déterministe connue U_k pour U_k^* .

$$f(X_k, U_k^*) = f(\hat{X}_{k/k}, U_k) + \left[\frac{\partial f}{\partial X}(\hat{X}_{k/k}, U_k) \right] (X_k - \hat{X}_{k/k}) + \left[\frac{\partial f}{\partial U}(\hat{X}_{k/k}, U_k) \right] \cdot \gamma_k + o_2(X_k - \hat{X}_{k/k}, \gamma_k) \quad (\text{A.82})$$

La linéarisation de « g » est identique à l'équation (A.59). En posant :

$$A_k = \left[\frac{\partial f}{\partial X}(\hat{X}_{k/k}, U_k) \right] \quad B_k = \left[\frac{\partial f}{\partial U}(\hat{X}_{k/k}, U_k) \right] \quad C_k = \left[\frac{\partial g}{\partial X}(\hat{X}_{k+1/k}) \right] \quad (\text{A.83})$$

$$Ud_k = f(\hat{X}_{k/k}, U_k) - A_k \cdot \hat{X}_{k/k} \quad (\text{A.84})$$

$$\zeta_k = \alpha_k + B_k \cdot \gamma_k \quad (\text{A.85})$$

$$\eta_k = \beta_k \quad (\text{A.86})$$

$$Z_k = Y_k - g(\hat{X}_{k+1/k}) + C_k \cdot \hat{X}_{k+1/k} \quad (\text{A.87})$$

On obtient le système suivant, semblable au modèle d'état (A.1) :

$$\begin{cases} X_{k+1} = A_k \cdot X_k + Ud_k + \zeta_k \\ Z_k = C_k \cdot X_k + \eta_k \end{cases} \quad (\text{A.88})$$

On peut donc appliquer les résultats du paragraphe 1.

6.2 Etape de prédiction

On applique le même raisonnement que dans le paragraphe 3, en prenant pour meilleure estimation de l'entrée, sa mesure : on remplace ainsi U par U^* . On arrive donc à l'expression

$$\hat{X}_{k+1/k} = f(\hat{X}_{k/k}, U_k^*) \quad (\text{A.89})$$

Comme on a fait l'hypothèse que α_k et γ_k sont indépendants alors

$$\text{Var}(\zeta_k) = Q_{\alpha_k} + B_k \cdot Q_{\gamma_k} \cdot B_k^t \quad (\text{A.90})$$

$$\begin{aligned} P_{k+1/k} &= A_k \cdot P_{k/k} \cdot A_k^t + Q_k \\ &= A_k \cdot P_{k/k} \cdot A_k^t + Q_{\alpha_k} + B_k \cdot Q_{\gamma_k} \cdot B_k^t \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

6.3 Etape de filtrage

Elle reste identique à celle du paragraphe 5.

6.4 Algorithme

pour $k=1,2,\dots$

$$P_{0/0} = \text{Var}(X_0) \quad (\text{A.92})$$

$$A_k = \left[\frac{\partial f}{\partial X}(\hat{X}_{k/k}, U_k^*) \right] \quad B_k = \left[\frac{\partial f}{\partial U}(\hat{X}_{k/k}, U_k^*) \right] \quad (\text{A.93})$$

$$\hat{X}_{k+1/k} = f(\hat{X}_{k/k}, U_k^*) \quad (\text{A.94})$$

$$P_{k+1/k} = A_k \cdot P_{k/k} \cdot A_k^t + Q_{\alpha_k} + B_k \cdot Q_{\gamma_k} \cdot B_k^t \quad (\text{A.95})$$

$$C_k = \left[\frac{\partial g}{\partial X}(\hat{X}_{k+1/k}, U_k^*) \right] \quad (\text{A.96})$$

$$K_k = P_{k+1/k} C_k^t (C_k P_{k+1/k} C_k^t + R)^{-1} \quad (\text{A.97})$$

$$\hat{X}_{k+1/k+1} = \hat{X}_{k+1/k} + K_k \cdot (Y_k - g(\hat{X}_{k+1/k})) \quad (\text{A.98})$$

$$P_{k+1/k+1} = (I - K_k C_k) P_{k+1/k} \quad (\text{A.99})$$

7 SYSTEME NON LINEAIRE A ENTREE MESUREE AVEC TRANSMISSION DIRECTE

7.1 Modèle d'état

On considère maintenant un système non linéaire à entrée bruitée et avec transmission directe de l'entrée sur la sortie², représenté par les équations suivantes :

$$\begin{cases} X_{k+1} = f(X_k, U_k^*) + \alpha_k \\ U_k^* = U_k + \gamma_k \\ Y_k = g(X_k, U_k^*) + \beta_k \end{cases} \quad (\text{A.100})$$

Les bruits suivent les mêmes hypothèse que dans les paragraphes précédents.

7.2 Algorithme

On obtient en remplaçant les matrices par leur jacobienne :

pour $k=1,2,\dots$

$$P_{0/0} = \text{Var}(X_0) \quad (\text{A.101})$$

$$A_k = \left[\frac{\partial f}{\partial X}(\hat{X}_{k/k}, U_k^*) \right] \quad B_k = \left[\frac{\partial f}{\partial U}(\hat{X}_{k/k}, U_k^*) \right] \quad (\text{A.102})$$

$$\hat{X}_{k+1/k} = f(\hat{X}_{k/k}, U_k^*) \quad (\text{A.103})$$

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^t + B_k Q_\gamma B_k^t + Q_\alpha \quad (\text{A.104})$$

$$B_k = \left[\frac{\partial f}{\partial U}(\hat{X}_{k+1/k}, U_k^*) \right] \quad C_k = \left[\frac{\partial g}{\partial X}(\hat{X}_{k+1/k}, U_k^*) \right] \quad D_k = \left[\frac{\partial g}{\partial U}(\hat{X}_{k+1/k}, U_k^*) \right] \quad (\text{A.105})$$

$$S_k = B_k Q_\gamma D_k^t \quad (\text{A.106})$$

$$K_k = \left(P_{k+1/k} C_k^t + S_k \right) \left(C_k P_{k+1/k} C_k^t + D_k Q_\gamma D_k^t + Q_\beta + C_k S_k + S_k C_k^t \right)^{-1} \quad (\text{A.107})$$

$$\hat{X}_{k+1/k+1} = \hat{X}_{k+1/k} + K_k \cdot \left(Y_k - g(\hat{X}_{k+1/k}, U_k^*) \right) \quad (\text{A.108})$$

$$P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k} - K_k \left(C_k P_{k+1/k} + S_k^t \right) \quad (\text{A.109})$$

Il est à noter que la matrice jacobienne « B_k » est calculée à chacune des deux étapes, en prenant à chaque fois la dernière valeur de \hat{X} .

² Ce cas correspond au filtre à 4 éléments « EKF4b » du chapitre 5.

ANNEXE B

Deuxième formulation du filtre 2D

Cette annexe présente une deuxième formulation plus « classique » du filtre 2D (identique à celle que l'on trouve dans [Opderbecke, 94] par exemple). La différence avec le chapitre 2 se situe au niveau du vecteur d'entrée qui contient maintenant la translation et la rotation élémentaires, et non plus les rotations élémentaires de roues directement mesurées par les codeurs incrémentaux.

Soit le vecteur $U_i = [\Delta_i \quad \omega_i]^t$ qui correspond à la commande cinématique appliquée au véhicule. Il est relié au vecteur « Δq_i » mesuré par la relation matricielle :

$$U_i = \begin{bmatrix} rd/2 & rg/2 \\ rd/e & -rg/e \end{bmatrix} \Delta q_i \quad (B.1)$$

$$U_i = M \Delta q_i \quad (B.2)$$

On a :

$$\begin{cases} x_{i+1} \approx x_i + \Delta_i \cos(\theta_i + \omega_i / 2) \\ y_{i+1} \approx y_i + \Delta_i \sin(\theta_i + \omega_i / 2) \\ \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \end{cases} \quad (B.3)$$

On note $X_i = [x_i \quad y_i \quad \theta_i]^t$ la posture du mobile. Le système précédent peut se mettre sous la forme :

$$X_{i+1} = f(X_i, U_i) \quad (B.4)$$

où la fonction vectorielle f est définie de $\mathfrak{R}^5 \rightarrow \mathfrak{R}^3$. Le modèle d'état est :

$$\begin{cases} X_{i+1} = f(X_i, U_i) + \alpha_i \\ \Delta q_i = (\Delta q_i)_{\text{réel}} + \gamma_i \\ \lambda_j = g^k(X_j) + \beta_j \end{cases} \quad (B.5)$$

La variance Q_U du vecteur aléatoire U peut être exprimée en fonction de celle des codeurs $T_e \cdot Q_{\Delta q}$ ($Q_{\Delta q}$ est un scalaire) et est donnée par l'équation :

$$Q_U = M Q_{\gamma} M^t = M \cdot T_e Q_{\Delta q} I_{22} \cdot M^t = T_e Q_{\Delta q} M M^t \quad (B.6)$$

$$\hat{X}_{i+1/i} = f(\hat{X}_{i/i}, U_i) \quad (\text{B.7})$$

$$P_{i+1/i} \approx A_i P_{i/i} A_i^t + B_i Q_U B_i^t + Q_\alpha \quad (\text{B.8})$$

Les matrices A_i et B_i sont les matrices Jacobiennes suivantes :

$$A_i = \left[\frac{\partial f}{\partial X} \right] \text{ évaluée en } \hat{X}_{i/i} \text{ et } B_i = \left[\frac{\partial f}{\partial U} \right] \text{ en } U_i \quad (\text{B.9})$$

Ainsi, on obtient :

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta_i \sin(\hat{\theta}_{i/i} + \omega_i/2) \\ 0 & 1 & \Delta_i \cos(\hat{\theta}_{i/i} + \omega_i/2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \cos(\hat{\theta}_{i/i} + \omega_i/2) & -\frac{\Delta}{2} \sin(\hat{\theta}_{i/i} + \omega_i/2) \\ \sin(\hat{\theta}_{i/i} + \omega_i/2) & \frac{\Delta}{2} \cos(\hat{\theta}_{i/i} + \omega_i/2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

L'étape de filtrage est identique.

ANNEXE C

Commutations entre les filtres 2D avec et sans identification des rayons

On s'intéresse dans cette annexe au passage d'un filtre à 5 éléments d'état $X'_i = [x_i \ y_i \ \theta_i \ rd_i \ rg_i]^t$ à un filtre à 3 éléments d'état $X_i = [x_i \ y_i \ \theta_i]^t$, et au problème inverse (cf. paragraphe 5.2 du chapitre 2). En effet, si la vitesse devient inférieure à un seuil à déterminer (par exemple 1cm/s), le processus d'identification doit être stoppé car les rayons ne sont plus observables. A l'inverse, si la vitesse devient suffisante, on peut reprendre l'estimation en ligne.

Dans la solution proposée ici, le vecteur d'état est toujours de dimension cinq. L'identification est réalisée ou non en annulant des termes de la matrice jacobienne A'_i .

Soit H'_i la matrice 3x2 traduisant l'effet d'une variation des rayons sur l'état (x, y, θ) . H'_i est une sous matrice de A'_i et a pour expression :

$$H'_i = \begin{bmatrix} \frac{\Delta qd_i}{2} a(i) & \frac{\Delta qg_i}{2} b(i) \\ \frac{\Delta qd_i}{2} c(i) & \frac{\Delta qg_i}{2} d(i) \\ \frac{\Delta qd_i}{e} & -\frac{\Delta qg_i}{e} \end{bmatrix} \text{ soit } A'_i = \begin{bmatrix} A_i & \frac{\Delta qd_i}{2} a(i) & \frac{\Delta qg_i}{2} b(i) \\ & \frac{\Delta qd_i}{2} c(i) & \frac{\Delta qg_i}{2} d(i) \\ & \frac{\Delta qd_i}{e} & -\frac{\Delta qg_i}{e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & H'_i \\ 0_{23} & I_{22} \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

1 ARRET DE L'IDENTIFICATION DES RAYONS

Quand la vitesse est (au départ) ou devient trop faible, on transforme les matrices de la façon suivante :

$$- A'_i = \begin{bmatrix} A_i & H'_i \\ 0_{23} & I_{22} \end{bmatrix} \text{ devient } A'_i = \begin{bmatrix} A_i & 0_{32} \\ 0_{23} & I_{22} \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

$$- P'_{i/i} = \begin{bmatrix} P_{i/i} & L_{32} \\ M_{23} & N_{22} \end{bmatrix} \text{ devient } P'_{i/i} = \begin{bmatrix} P_{i/i} & 0_{32} \\ 0_{23} & 0_{22} \end{bmatrix} \quad (C.3)$$

$$- Q'_{\alpha} = T_e \cdot \begin{bmatrix} Q_x & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & Q_y & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & Q_{\theta} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & Q_r & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & Q_r \end{bmatrix} \text{ devient } Q'_{\alpha} = T_e \cdot \begin{bmatrix} Q_x & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & Q_y & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & Q_{\theta} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

On peut montrer que si A'_i et $P'_{i/i}$ ont les formes ci-dessus, alors P' conserve cette forme (c'est-à-dire que seule la sous matrice 3x3 reste non nulle), aussi bien dans la phase de prédiction que dans la phase de filtrage.

Montrons que grâce aux expressions (C.2) et (C.3) le filtre n'identifie plus les rayons.

On rappelle que le gain de Kalman est la correction vectorielle appliquée à l'état. L'équation de recalage a la forme :

$$\hat{X}_{j/j} = \hat{X}_{j/j-1} + K_j \cdot (\lambda_j - \hat{\lambda}_j) \quad (C.5)$$

Le gain est donné par une équation du type $K_j = P_{j/j-1} \cdot C_j^t \cdot \rho$ où ρ est un scalaire.

Or $C'_j = [C_j \ 0 \ 0]$, donc :

$$K_j = \begin{bmatrix} P_{i/i} & 0_{32} \\ 0_{23} & 0_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_j^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \rho = \begin{bmatrix} U_{31} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (C.6)$$

Par conséquent, l'étape de filtrage ne modifie pas l'estimée des rayons, ce qui signifie en d'autres termes qu'il n'y a pas d'identification.

2 PASSAGE A L'IDENTIFICATION DES RAYONS

Quand la vitesse est suffisante, on calcule les termes croisés de la jacobienne :

$$- A'_i = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ A_i & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ devient } A'_i = \begin{bmatrix} A_i & H'_i \\ 0_{23} & I_{22} \end{bmatrix} \quad (C.7)$$

Pour prendre en compte une erreur initiale de rayons, on augmente les deux derniers termes de la diagonale de P :

$$- P'_{i/i} = \begin{bmatrix} P_{i/i} & 0_{32} \\ 0_{23} & 0_{22} \end{bmatrix} \text{ devient } P'_{i/i} = \begin{bmatrix} P_{i/i} & 0_{31} & 0_{31} \\ 0_{13} & P_{r_{\text{initial}}} & 0 \\ 0_{13} & 0 & P_{r_{\text{initial}}} \end{bmatrix} \quad (C.8)$$

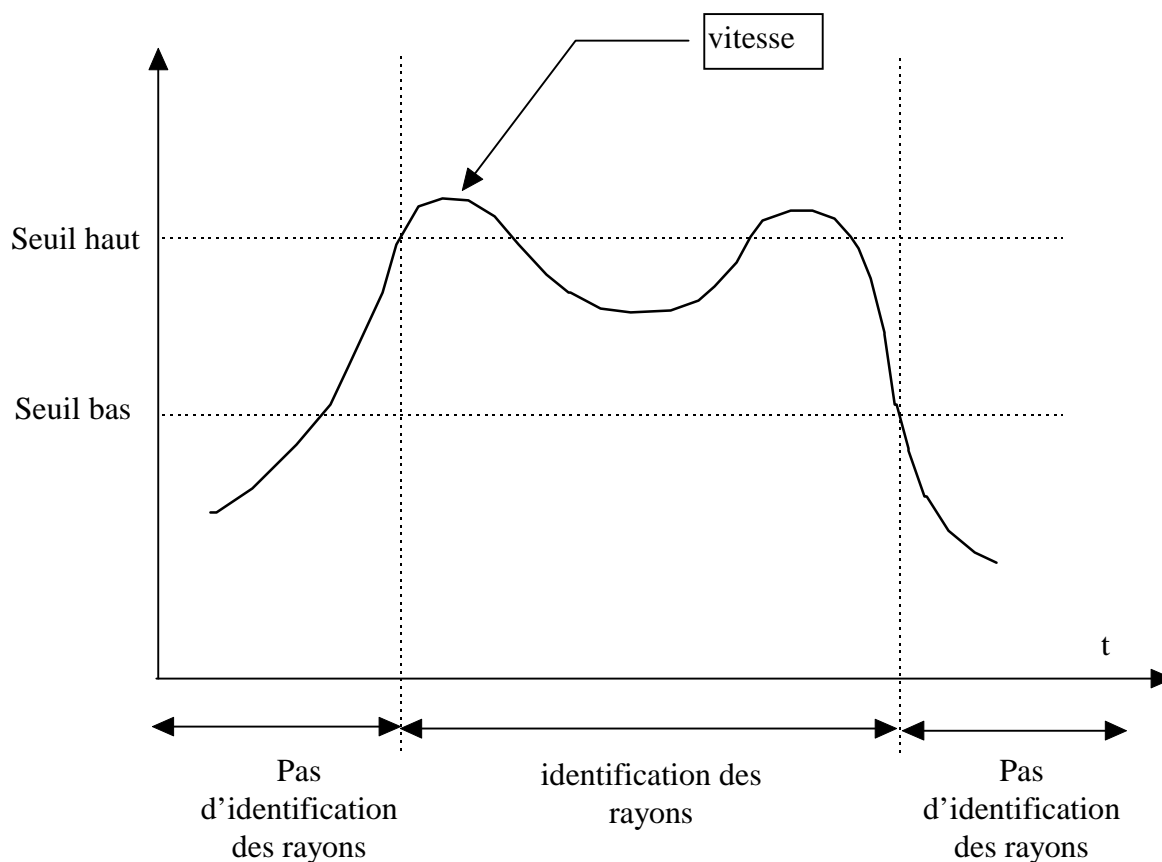
On ajoute le bruit de modèle des rayons :

$$-Q'_{\alpha}=T_e \cdot \begin{bmatrix} Q_x & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & Q_y & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & Q_{\theta} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ devient } Q'_{\alpha}=T_e \cdot \begin{bmatrix} Q_x & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & Q_y & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & Q_{\theta} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & Q_r & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & Q_r \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

On propose de remettre la variance initiale « Pr_{initial} » sur les deux derniers termes diagonaux de P. Ainsi, lors du passage d'un filtre n'identifiant pas les rayons à un filtre les identifiant, un régime transitoire apparaît.

3 UTILISATION DE DEUX SEUILS

Afin d'éviter trop de commutations de filtres, si la vitesse oscille autour du seuil de commutation, on propose l'utilisation de deux seuils (trigger de Schmitt), dont le sens de franchissement définit s'il y a ou non identification des rayons. Une transition montante sur le seuil haut enclenche l'identification des rayons, qui est stoppée par une transition descendante sur le seuil bas.



ANNEXE D

Expression des matrices jacobiennes des filtres 3D à 6 et 4 éléments

Cette annexe contient les expressions analytiques des matrices jacobiennes qui interviennent dans les filtres de Kalman étendus 3D. Leurs expressions ont été obtenues à l'aide du logiciel de calcul formel « Maple » version 5.

Ces expressions, données sous forme brute, peuvent paraître compliquées, mais le nombre d'opérations arithmétiques après optimisation n'est pas rédhibitoire. Ainsi, pour la mise en œuvre des filtres, nous avons utilisé une fonction de conversion et d'optimisation de la bibliothèque « C » de Maple. Le nombre d'opérations arithmétiques (additions, multiplications et divisions) est alors considérablement réduit. A titre d'information, voici le nombre d'opérations nécessaires pour les termes des jacobiennes et les angles prédits des filtres pendant une période d'échantillonnage, dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire quand une mesure de SIREM intervient :

	additions et soustractions	multiplications	divisions
EKF6a	187	336	22
EKF4a	209	391	31

Les fonctions trigonométriques n'ont pas été comptées car elles sont peu nombreuses. Par exemple, « $\cos(\psi)$ » est calculé une seule fois et mémorisé dans une variable auxiliaire.

Par ailleurs, contrairement à ce que le tableau ci-dessus pourrait laisser penser, l'exécution de « EKF4a » est plus rapide que celle de « EKF6a ». Seule l'étape de recalage avec SIREM est plus compliquée (d'où un nombre d'opérations arithmétiques plus important), mais cette étape est peu fréquente.

1 MATRICES JACOBINIENNES DU FILTRE « EKF6A »

1.1 Prédiction odométrique

$$A_i = \left[\frac{\partial F}{\partial \xi} (\hat{\xi}_{i/i}, V_i^*) \right] \quad (D.1)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & -\sin(\psi) \cos(dc) \Delta, & -\cos(\psi) \sin(dc) \Delta, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \cos(\psi) \cos(dc) \Delta, & -\sin(\psi) \sin(dc) \Delta, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & \cos(dc) \Delta \\ 0, & 0, & 0, & 1, & -\frac{\omega \cos(dc) \sin(dc)}{\sqrt{\cos(dc)^2 - \sin(dv)^2}}, & -\frac{\omega \sin(dv) \cos(dv)}{\sqrt{\cos(dc)^2 - \sin(dv)^2}} \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \quad (D.2)$$

$$B_i = \left[\frac{\partial F}{\partial V} (\hat{\xi}_{i/i}, V_i^*) \right] \quad (D.3)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \cos(dc) & 0 \\ \sin(\psi) \cos(dc) & 0 \\ \sin(dc) & 0 \\ 0 & \sqrt{\cos(dc)^2 - \sin(dv)^2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (D.4)$$

1.2 Correction extéroceptive

Voici les expressions des angles prédits :

$$\begin{aligned} l b d a _ p r e d i t &:= \arctan \left(\frac{-x b 0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + x b 0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + y b 0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} + y b 0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - \sin(dv) z b 0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + \sin(dv) z \cos(dc)}{\cos(dc)}, \cos(\psi) \cos(dc) x b 0 + \sin(\psi) \cos(dc) y b 0 + \sin(dc) z b 0 - \cos(\psi) \cos(dc) x - \sin(\psi) \cos(dc) y - \sin(dc) z \right) \\ \%1 &:= \cos(dc)^2 - \sin(dv)^2 \end{aligned} \quad (D.5)$$

$$\begin{aligned} l b d a _ p r e d i t &:= \arctan \left(\frac{-x b 0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + x b 0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + y b 0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} + y b 0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - \sin(dv) z b 0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + \sin(dv) z \cos(dc)}{\cos(dc)}, \cos(\psi) \cos(dc) x b 0 + \sin(\psi) \cos(dc) y b 0 + \sin(dc) z b 0 - \cos(\psi) \cos(dc) x - \sin(\psi) \cos(dc) y - \sin(dc) z \right) \\ \%1 &:= \cos(dc)^2 - \sin(dv)^2 \end{aligned} \quad (D.6)$$

Expression de la matrice jacobienne terme par terme :

$$C_j = \left[\frac{\partial G_b}{\partial \zeta} \left(\hat{\zeta}_{j+1/j} \right) \right] \quad (D.7)$$

$$C_{-i, 1} := \left(\frac{\sin(\psi) \sqrt{\%2} - \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv)}{\cos(dc) \%1} + (-xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%2} \right. \\ \left. + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%2} + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \right. \\ \left. - \sin(dv) zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%2} - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%2} \right. \\ \left. - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + \sin(dv) z \cos(dc) \right) \cos(\psi) / \%1^2 \Big/ \left(1 + (-xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%2} \right. \\ \left. + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%2} + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \right. \\ \left. - \sin(dv) zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%2} - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%2} \right. \\ \left. - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + \sin(dv) z \cos(dc) \right)^2 / \left(\cos(dc)^2 \%1^2 \right) \\ \%1 := \cos(\psi) \cos(dc) xb0 + \sin(\psi) \cos(dc) yb0 + \sin(dc) zb0 - \cos(\psi) \cos(dc) x \\ - \sin(\psi) \cos(dc) y - \sin(dc) z \\ \%2 := \cos(dc)^2 - \sin(dv)^2 \quad (D.8)$$

$$C_{-i, 2} := \left(\frac{-\cos(\psi) \sqrt{\%2} - \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv)}{\cos(dc) \%1} + (-xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%2} \right. \\ \left. + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%2} + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \right. \\ \left. - \sin(dv) zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%2} - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%2} \right. \\ \left. - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + \sin(dv) z \cos(dc) \right) \sin(\psi) / \%1^2 \Big/ \left(1 + (-xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%2} \right. \\ \left. + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%2} + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \right. \\ \left. - \sin(dv) zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%2} - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%2} \right. \\ \left. - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + \sin(dv) z \cos(dc) \right)^2 / \left(\cos(dc)^2 \%1^2 \right) \\ \%1 := \cos(\psi) \cos(dc) xb0 + \sin(\psi) \cos(dc) yb0 + \sin(dc) zb0 - \cos(\psi) \cos(dc) x \\ - \sin(\psi) \cos(dc) y - \sin(dc) z \\ \%2 := \cos(dc)^2 - \sin(dv)^2 \quad (D.9)$$

$$C_{-i, 3} := \left(\frac{\sin(dv)}{\%1} + (-xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%2} + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%2} \right. \\ \left. + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - \sin(dv) zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%2} \right. \\ \left. - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%2} - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \right. \\ \left. + \sin(dv) z \cos(dc) \right) \sin(dc) / \left(\cos(dc) \%1^2 \right) \Big/ \left(1 + (-xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%2} \right. \\ \left. + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%2} + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \right. \\ \left. - \sin(dv) zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%2} - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%2} \right. \\ \left. - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + \sin(dv) z \cos(dc) \right)^2 / \left(\cos(dc)^2 \%1^2 \right) \\ \%1 := \cos(\psi) \cos(dc) xb0 + \sin(\psi) \cos(dc) yb0 + \sin(dc) zb0 - \cos(\psi) \cos(dc) x \\ - \sin(\psi) \cos(dc) y - \sin(dc) z \\ \%2 := \cos(dc)^2 - \sin(dv)^2 \quad (D.10)$$

$$\begin{aligned}
C_{-i,4} = & \left((-xb0 \cos(\psi) \sqrt{\%2} - xb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - yb0 \sin(\psi) \sqrt{\%2} \right. \\
& + yb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + x \cos(\psi) \sqrt{\%2} + x \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \\
& + y \sin(\psi) \sqrt{\%2} - y \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \Big) / (\cos(dc) \%1) - (-xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%2} \\
& + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%2} + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \\
& - \sin(dv) zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%2} - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%2} \\
& - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + \sin(dv) z \cos(dc) \Big) \\
& (-\sin(\psi) \cos(dc) xb0 + \cos(\psi) \cos(dc) yb0 + \sin(\psi) \cos(dc) x - \cos(\psi) \cos(dc) y) / \left(\right. \\
& \left. \cos(dc) \%1^2 \right) \Big) / \left(1 + (-xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%2} + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \right. \\
& + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%2} + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - \sin(dv) zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%2} \\
& - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%2} - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \\
& \left. + \sin(dv) z \cos(dc) \right)^2 / (\cos(dc)^2 \%1^2) \Big) \\
\%1 = & \cos(\psi) \cos(dc) xb0 + \sin(\psi) \cos(dc) yb0 + \sin(dc) zb0 - \cos(\psi) \cos(dc) x \\
& - \sin(\psi) \cos(dc) y - \sin(dc) z \\
\%2 = & \cos(dc)^2 - \sin(dv)^2
\end{aligned} \tag{D.11}$$

$$\begin{aligned}
C_{-i,5} = & \left(\left(\frac{xb0 \sin(\psi) \cos(dc) \sin(dc)}{\sqrt{\%2}} + xb0 \cos(\psi) \cos(dc) \sin(dv) \right. \right. \\
& - \frac{yb0 \cos(\psi) \cos(dc) \sin(dc)}{\sqrt{\%2}} + yb0 \sin(\psi) \cos(dc) \sin(dv) + \sin(dv) zb0 \sin(dc) \\
& - \frac{x \sin(\psi) \cos(dc) \sin(dc)}{\sqrt{\%2}} - x \cos(\psi) \cos(dc) \sin(dv) + \frac{y \cos(\psi) \cos(dc) \sin(dc)}{\sqrt{\%2}} \\
& \left. - y \sin(\psi) \cos(dc) \sin(dv) - \sin(dv) z \sin(dc) \right) / (\cos(dc) \%1) + \frac{\%3 \sin(dc)}{\cos(dc)^2 \%1} - \%3 \left(\right. \\
& -xb0 \cos(\psi) \sin(dc) - \sin(\psi) \sin(dc) yb0 + \cos(dc) zb0 + \cos(\psi) \sin(dc) x \\
& \left. + \sin(\psi) \sin(dc) y - \cos(dc) z \right) / (\cos(dc) \%1^2) \Big) / \left(1 + \frac{\%3^2}{\cos(dc)^2 \%1^2} \right) \\
\%1 = & \cos(\psi) \cos(dc) xb0 + \sin(\psi) \cos(dc) yb0 + \sin(dc) zb0 - \cos(\psi) \cos(dc) x \\
& - \sin(\psi) \cos(dc) y - \sin(dc) z \\
\%2 = & \cos(dc)^2 - \sin(dv)^2 \\
\%3 = & -xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%2} + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%2} \\
& + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - \sin(dv) zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%2} \\
& - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%2} - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \\
& + \sin(dv) z \cos(dc)
\end{aligned} \tag{D.12}$$

$$\begin{aligned}
C_{-i, 6} = & \left(\frac{xb0 \sin(\psi) \sin(dv) \cos(dv)}{\sqrt{\%1}} + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \cos(dv) \right. \\
& - \frac{yb0 \cos(\psi) \sin(dv) \cos(dv)}{\sqrt{\%1}} + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \cos(dv) - \cos(dv) zb0 \cos(dc) \\
& - \frac{x \sin(\psi) \sin(dv) \cos(dv)}{\sqrt{\%1}} - x \cos(\psi) \sin(dc) \cos(dv) + \frac{y \cos(\psi) \sin(dv) \cos(dv)}{\sqrt{\%1}} \\
& \left. - y \sin(\psi) \sin(dc) \cos(dv) + \cos(dv) z \cos(dc) \right) / \left(\cos(dc) (\cos(\psi) \cos(dc) xb0 \right. \\
& + \sin(\psi) \cos(dc) yb0 + \sin(dc) zb0 - \cos(\psi) \cos(dc) x - \sin(\psi) \cos(dc) y - \sin(dc) z) \\
& \left(1 + (-xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} \right. \\
& + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - \sin(dv) zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} \\
& - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \\
& + \sin(dv) z \cos(dc) \left. \right)^2 / \left(\cos(dc)^2 (\cos(\psi) \cos(dc) xb0 + \sin(\psi) \cos(dc) yb0 \right. \\
& \left. + \sin(dc) zb0 - \cos(\psi) \cos(dc) x - \sin(\psi) \cos(dc) y - \sin(dc) z)^2 \right) \Big) \\
\%1 = & \cos(dc)^2 - \sin(dv)^2
\end{aligned} \tag{D.13}$$

$$\begin{aligned}
C_{-i, 1} = & \left[\frac{\sin(\psi) \sin(dv) + \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1}}{\cos(dc) \sqrt{\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(dc)^2}}} - \frac{1}{2} (-xb0 \sin(\psi) \sin(dv) \right. \\
& - xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} + yb0 \cos(\psi) \sin(dv) - yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} \\
& + \sqrt{\%1} zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sin(dv) + x \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(dv) \\
& \left. + y \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(dc) \right) \\
& \left(-2 \%3 \cos(\psi) \cos(dc) + 2 \frac{\%2 (\sin(\psi) \sqrt{\%1} - \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv))}{\cos(dc)^2} \right) / \left(\cos(dc) \right. \\
& \left. \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(dc)^2} \right)^{3/2} \right) \Big) / \left(1 + (-xb0 \sin(\psi) \sin(dv) - xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} \right. \\
& + yb0 \cos(\psi) \sin(dv) - yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} + \sqrt{\%1} zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sin(dv) \\
& + x \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(dv) + y \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(dc) \left. \right) \\
& 2 / \left(\cos(dc)^2 \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(dc)^2} \right) \right) \Big) \\
\%1 = & \cos(dc)^2 - \sin(dv)^2 \\
\%2 = & -xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} \\
& + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - \sin(dv) zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} \\
& - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \\
& + \sin(dv) z \cos(dc) \\
\%3 = & \cos(\psi) \cos(dc) xb0 + \sin(\psi) \cos(dc) yb0 + \sin(dc) zb0 - \cos(\psi) \cos(dc) x \\
& - \sin(\psi) \cos(dc) y - \sin(dc) z
\end{aligned} \tag{D.14}$$

$$\begin{aligned}
C_{-i_{2,2}} &= \left(\frac{-\cos(\psi) \sin(dv) + \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1}}{\cos(dc) \sqrt{\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(dc)^2}}} - \frac{1}{2} (-xb0 \sin(\psi) \sin(dv)) \right. \\
&\quad - xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} + yb0 \cos(\psi) \sin(dv) - yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} \\
&\quad + \sqrt{\%1} zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sin(dv) + x \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(dv) \\
&\quad \left. + y \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(dc) \right) \\
&\quad \left(-2 \%3 \sin(\psi) \cos(dc) + 2 \frac{\%2 (-\cos(\psi) \sqrt{\%1} - \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv))}{\cos(dc)^2} \right) / \left(\cos(dc) \right. \\
&\quad \left. \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(dc)^2} \right)^{3/2} \right) / \left(1 + (-xb0 \sin(\psi) \sin(dv) - xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1}) \right. \\
&\quad \left. + yb0 \cos(\psi) \sin(dv) - yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} + \sqrt{\%1} zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sin(dv) \right. \\
&\quad \left. + x \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(dv) + y \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(dc) \right) \\
&\quad 2 / \left(\cos(dc)^2 \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(dc)^2} \right) \right) \\
\%1 &= \cos(dc)^2 - \sin(dv)^2 \\
\%2 &= -xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} \\
&\quad + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - \sin(dv) zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} \\
&\quad - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \\
&\quad + \sin(dv) z \cos(dc) \\
\%3 &= \cos(\psi) \cos(dc) xb0 + \sin(\psi) \cos(dc) yb0 + \sin(dc) zb0 - \cos(\psi) \cos(dc) x \\
&\quad - \sin(\psi) \cos(dc) y - \sin(dc) z
\end{aligned} \tag{D.15}$$

$$\begin{aligned}
C_{-i_{2,3}}^j := & \left(-\frac{\sqrt{\%1}}{\sqrt{\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(dc)^2}}} - \frac{1}{2} \left(-xb0 \sin(\psi) \sin(dv) - xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} \right. \right. \\
& + yb0 \cos(\psi) \sin(dv) - yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} + \sqrt{\%1} zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sin(dv) \\
& + x \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(dv) + y \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(dc) \left. \right) \\
& \left(-2 \%3 \sin(dc) + 2 \frac{\%2 \sin(dv)}{\cos(dc)} \right) / \left(\cos(dc) \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(dc)^2} \right)^{3/2} \right) / \left(1 + \left(\right. \right. \\
& -xb0 \sin(\psi) \sin(dv) - xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} + yb0 \cos(\psi) \sin(dv) \\
& - yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} + \sqrt{\%1} zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sin(dv) \\
& + x \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(dv) + y \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(dc) \left. \right) \\
& \left. \left. \left. 2 / \left(\cos(dc)^2 \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(dc)^2} \right) \right) \right) \right) \right) \\
\%1 := & \cos(dc)^2 - \sin(dv)^2 \\
\%2 := & -xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} \\
& + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - \sin(dv) zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} \\
& - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \\
& + \sin(dv) z \cos(dc) \\
\%3 := & \cos(\psi) \cos(dc) xb0 + \sin(\psi) \cos(dc) yb0 + \sin(dc) zb0 - \cos(\psi) \cos(dc) x \\
& - \sin(\psi) \cos(dc) y - \sin(dc) z
\end{aligned} \tag{D.16}$$

$$\begin{aligned}
C_{-i_{2,4}} := & \left(\begin{aligned} & -xb0 \cos(\psi) \sin(dv) + xb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - yb0 \sin(\psi) \sin(dv) \\ & - yb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} + x \cos(\psi) \sin(dv) - x \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} \\ & + y \sin(\psi) \sin(dv) + y \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} \end{aligned} \right) / \left(\cos(dc) \sqrt{\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(dc)^2}} \right) - \frac{1}{2} \left(\begin{aligned} & -xb0 \sin(\psi) \sin(dv) - xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} + yb0 \cos(\psi) \sin(dv) \\ & - yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} + \sqrt{\%1} zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sin(dv) \\ & + x \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(dv) + y \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(dc) \end{aligned} \right) \\
& \left(\begin{aligned} & \%3 (-\sin(\psi) \cos(dc) xb0 + \cos(\psi) \cos(dc) yb0 + \sin(\psi) \cos(dc) x - \cos(\psi) \cos(dc) y) \\ & + 2 \%2 \left(-xb0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} - xb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - yb0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} \right. \\ & \left. + yb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + x \cos(\psi) \sqrt{\%1} + x \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \right. \\ & \left. + y \sin(\psi) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \right) / \cos(dc)^2 \end{aligned} \right) / \left(\cos(dc) \right. \\
& \left. \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(dc)^2} \right)^{3/2} \right) / \left(1 + \left(-xb0 \sin(\psi) \sin(dv) - xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} \right. \right. \\
& \left. \left. + yb0 \cos(\psi) \sin(dv) - yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} + \sqrt{\%1} zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sin(dv) \right. \right. \\
& \left. \left. + x \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(dv) + y \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(dc) \right) \right) \\
& 2 / \left(\cos(dc)^2 \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(dc)^2} \right) \right) \\
\%1 := & \cos(dc)^2 - \sin(dv)^2 \\
\%2 := & -xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} \\
& + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - \sin(dv) zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} \\
& - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \\
& + \sin(dv) z \cos(dc) \\
\%3 := & \cos(\psi) \cos(dc) xb0 + \sin(\psi) \cos(dc) yb0 + \sin(dc) zb0 - \cos(\psi) \cos(dc) x \\
& - \sin(\psi) \cos(dc) y - \sin(dc) z
\end{aligned} \tag{D.17}$$

$$\begin{aligned}
C_{-i_{2,5}} = & \left(\left(-xb0 \cos(\psi) \cos(dc) \sqrt{\%1} + \frac{xb0 \cos(\psi) \sin(dc)^2 \cos(dc)}{\sqrt{\%1}} \right. \right. \\
& - yb0 \sin(\psi) \cos(dc) \sqrt{\%1} + \frac{yb0 \sin(\psi) \sin(dc)^2 \cos(dc)}{\sqrt{\%1}} - \frac{zb0 \cos(dc)^2 \sin(dc)}{\sqrt{\%1}} \\
& - \sqrt{\%1} zb0 \sin(dc) + x \cos(\psi) \cos(dc) \sqrt{\%1} - \frac{x \cos(\psi) \sin(dc)^2 \cos(dc)}{\sqrt{\%1}} \\
& + y \sin(\psi) \cos(dc) \sqrt{\%1} - \frac{y \sin(\psi) \sin(dc)^2 \cos(dc)}{\sqrt{\%1}} + \frac{z \cos(dc)^2 \sin(dc)}{\sqrt{\%1}} \\
& \left. \left. + \sqrt{\%1} z \sin(dc) \right) \right) / \left(\cos(dc) \sqrt{\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(dc)^2}} + \frac{\%4 \sin(dc)}{\cos(dc)^2 \sqrt{\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(dc)^2}}} - \frac{1}{2} \right. \\
& \%4 \left(2 \%3 (-xb0 \cos(\psi) \sin(dc) - \sin(\psi) \sin(dc) yb0 + \cos(dc) zb0 + \cos(\psi) \sin(dc) x \right. \\
& + \sin(\psi) \sin(dc) y - \cos(dc) z) + 2 \%2 \left(\frac{xb0 \sin(\psi) \cos(dc) \sin(dc)}{\sqrt{\%1}} \right. \\
& + xb0 \cos(\psi) \cos(dc) \sin(dv) - \frac{yb0 \cos(\psi) \cos(dc) \sin(dc)}{\sqrt{\%1}} \\
& + yb0 \sin(\psi) \cos(dc) \sin(dv) + \sin(dv) zb0 \sin(dc) - \frac{x \sin(\psi) \cos(dc) \sin(dc)}{\sqrt{\%1}} \\
& - x \cos(\psi) \cos(dc) \sin(dv) + \frac{y \cos(\psi) \cos(dc) \sin(dc)}{\sqrt{\%1}} - y \sin(\psi) \cos(dc) \sin(dv) \\
& \left. \left. - \sin(dv) z \sin(dc) \right) / \cos(dc)^2 + 2 \frac{\%2^2 \sin(dc)}{\cos(dc)^3} \right) / \left(\cos(dc) \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(dc)^2} \right)^{3/2} \right) \\
& / \left(1 + \frac{\%4^2}{\cos(dc)^2 \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(dc)^2} \right)} \right) \\
\%1 = & \cos(dc)^2 - \sin(dv)^2 \\
\%2 = & -xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} \\
& + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - \sin(dv) zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} \\
& - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \\
& + \sin(dv) z \cos(dc) \\
\%3 = & \cos(\psi) \cos(dc) xb0 + \sin(\psi) \cos(dc) yb0 + \sin(dc) zb0 - \cos(\psi) \cos(dc) x \\
& - \sin(\psi) \cos(dc) y - \sin(dc) z \\
\%4 = & -xb0 \sin(\psi) \sin(dv) - xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} + yb0 \cos(\psi) \sin(dv) \\
& - yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} + \sqrt{\%1} zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sin(dv) \\
& + x \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(dv) + y \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(dc) \quad (D.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{-i_{2,6}} = & \left(\left(-xb0 \sin(\psi) \cos(dv) + \frac{xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \cos(dv)}{\sqrt{\%1}} \right. \right. \\
& + yb0 \cos(\psi) \cos(dv) + \frac{yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \cos(dv)}{\sqrt{\%1}} \\
& - \frac{zb0 \cos(dc) \sin(dv) \cos(dv)}{\sqrt{\%1}} + x \sin(\psi) \cos(dv) - \frac{x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \cos(dv)}{\sqrt{\%1}} \\
& \left. \left. - y \cos(\psi) \cos(dv) - \frac{y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \cos(dv)}{\sqrt{\%1}} + \frac{z \cos(dc) \sin(dv) \cos(dv)}{\sqrt{\%1}} \right) \right) / \left(\right. \\
& \cos(dc) \sqrt{\%3} - \left(-xb0 \sin(\psi) \sin(dv) - xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} + yb0 \cos(\psi) \sin(dv) \right. \\
& - yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} + \sqrt{\%1} zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sin(dv) \\
& \left. + x \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(dv) + y \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(dc) \right) \\
& \%2 \left(\frac{xb0 \sin(\psi) \sin(dv) \cos(dv)}{\sqrt{\%1}} + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \cos(dv) \right. \\
& - \frac{yb0 \cos(\psi) \sin(dv) \cos(dv)}{\sqrt{\%1}} + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \cos(dv) - \cos(dv) zb0 \cos(dc) \\
& - \frac{x \sin(\psi) \sin(dv) \cos(dv)}{\sqrt{\%1}} - x \cos(\psi) \sin(dc) \cos(dv) + \frac{y \cos(\psi) \sin(dv) \cos(dv)}{\sqrt{\%1}} \\
& \left. \left. - y \sin(\psi) \sin(dc) \cos(dv) + \cos(dv) z \cos(dc) \right) \right) / \left(\cos(dc)^3 \%3^{3/2} \right) \left(1 + \left(\right. \right. \\
& -xb0 \sin(\psi) \sin(dv) - xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} + yb0 \cos(\psi) \sin(dv) \\
& - yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} + \sqrt{\%1} zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sin(dv) \\
& \left. + x \cos(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(dv) + y \sin(\psi) \sin(dc) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(dc) \right) \\
& \left. 2 \sqrt{\cos(dc)^2 \%3} \right) \\
\%1 = & \cos(dc)^2 - \sin(dv)^2 \\
\%2 = & -xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + xb0 \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} \\
& + yb0 \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - \sin(dv) zb0 \cos(dc) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} \\
& - x \cos(\psi) \sin(dc) \sin(dv) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(dc) \sin(dv) \\
& + \sin(dv) z \cos(dc) \\
\%3 = & (\cos(\psi) \cos(dc) xb0 + \sin(\psi) \cos(dc) yb0 + \sin(dc) zb0 - \cos(\psi) \cos(dc) x \\
& - \sin(\psi) \cos(dc) y - \sin(dc) z)^2 + \frac{\%2^2}{\cos(dc)^2}
\end{aligned} \tag{D.19}$$

2 MATRICES JACOBIENNES DU FILTRE « EKF4A »

2.1 Prédiction odométrique et inclinométrique

$$A_i = \left[\frac{\partial H}{\partial X} \left(\hat{X}_{i/i}, U_i^* \right) \right] \tag{D.20}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\sin(\psi) \cos(\alpha) \Delta \\ 0 & 1 & 0 & \cos(\psi) \cos(\alpha) \Delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{D.21}$$

$$B_i = \left[\frac{\partial H}{\partial U} \left(\hat{X}_{i/i}, U_i^* \right) \right] \tag{D.22}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \cos(\alpha), & 0, & -\cos(\psi) \sin(\alpha) \Delta, & 0 \\ \sin(\psi) \cos(\alpha), & 0, & -\sin(\psi) \sin(\alpha) \Delta, & 0 \\ \sin(\alpha), & 0, & \cos(\alpha) \Delta, & 0 \\ 0, \sqrt{\cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2}, & -\frac{\omega \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\sqrt{\cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2}}, & -\frac{\omega \sin(\beta) \cos(\beta)}{\sqrt{\cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2}} \end{bmatrix} \quad (D.23)$$

2.2 Correction extéroceptive

Angles de SIREM prédits :

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{prédit}} := & \arctan\left(\frac{(-xb_0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + xb_0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + yb_0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} + yb_0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\beta) zb_0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} - x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\beta) z \cos(\alpha)) / (\cos(\alpha)), \cos(\psi) \cos(\alpha) xb_0 + \sin(\psi) \cos(\alpha) yb_0 + \sin(\alpha) zb_0 - \cos(\psi) \cos(\alpha) x - \sin(\psi) \cos(\alpha) y - \sin(\alpha) z)}{\%1} \right) \end{aligned}$$

$$\%1 := \cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2 \quad (D.24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{prédit}} := & \arctan\left(\frac{(-xb_0 \sin(\psi) \sin(\beta) - xb_0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + yb_0 \cos(\psi) \sin(\beta) - yb_0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + \sqrt{\%1} zb_0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sin(\beta) + x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(\beta) + y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(\alpha)) / \left(\cos(\alpha) \left((\cos(\psi) \cos(\alpha) xb_0 + \sin(\psi) \cos(\alpha) yb_0 + \sin(\alpha) zb_0 - \cos(\psi) \cos(\alpha) x - \sin(\psi) \cos(\alpha) y - \sin(\alpha) z)^2 + (-xb_0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + xb_0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + yb_0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} + yb_0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\beta) zb_0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} - x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\beta) z \cos(\alpha))^2 / \cos(\alpha)^2 \right)^{1/2}} \right)}{\%1} \right) \end{aligned}$$

$$\%1 := \cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2 \quad (D.25)$$

Ce filtre nécessite le calcul de deux matrices jacobiennes.

2.2.1 Première matrice jacobienne

$$C_j = \left[\frac{\partial O_B}{\partial X} (\hat{X}_{j/j-1}, U_j^*) \right] \quad (D.26)$$

$$\begin{aligned}
C_{-1,1}^i &= \left(\frac{\sin(\psi)\sqrt{\%2} - \cos(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\%1} + (-xb0\sin(\psi)\sqrt{\%2} \right. \\
&\quad + xb0\cos(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) + yb0\cos(\psi)\sqrt{\%2} + yb0\sin(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) \\
&\quad - \sin(\beta)zb0\cos(\alpha) + x\sin(\psi)\sqrt{\%2} - x\cos(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) - y\cos(\psi)\sqrt{\%2} \\
&\quad \left. - y\sin(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\beta)z\cos(\alpha) \right) \cos(\psi)/\%1^2 \Big/ \left(1 + (-xb0\sin(\psi)\sqrt{\%2} \right. \\
&\quad + xb0\cos(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) + yb0\cos(\psi)\sqrt{\%2} + yb0\sin(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) \\
&\quad - \sin(\beta)zb0\cos(\alpha) + x\sin(\psi)\sqrt{\%2} - x\cos(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) - y\cos(\psi)\sqrt{\%2} \\
&\quad \left. - y\sin(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\beta)z\cos(\alpha) \right)^2 / (\cos(\alpha)^2 \%1^2) \\
\%1 &= \cos(\psi)\cos(\alpha)xb0 + \sin(\psi)\cos(\alpha)yb0 + \sin(\alpha)zb0 - \cos(\psi)\cos(\alpha)x \\
&\quad - \sin(\psi)\cos(\alpha)y - \sin(\alpha)z \\
\%2 &= \cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2
\end{aligned} \tag{D.27}$$

$$\begin{aligned}
C_{-1,2}^i &= \left(\frac{-\cos(\psi)\sqrt{\%2} - \sin(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\%1} + (-xb0\sin(\psi)\sqrt{\%2} \right. \\
&\quad + xb0\cos(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) + yb0\cos(\psi)\sqrt{\%2} + yb0\sin(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) \\
&\quad - \sin(\beta)zb0\cos(\alpha) + x\sin(\psi)\sqrt{\%2} - x\cos(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) - y\cos(\psi)\sqrt{\%2} \\
&\quad \left. - y\sin(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\beta)z\cos(\alpha) \right) \sin(\psi)/\%1^2 \Big/ \left(1 + (-xb0\sin(\psi)\sqrt{\%2} \right. \\
&\quad + xb0\cos(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) + yb0\cos(\psi)\sqrt{\%2} + yb0\sin(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) \\
&\quad - \sin(\beta)zb0\cos(\alpha) + x\sin(\psi)\sqrt{\%2} - x\cos(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) - y\cos(\psi)\sqrt{\%2} \\
&\quad \left. - y\sin(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\beta)z\cos(\alpha) \right)^2 / (\cos(\alpha)^2 \%1^2) \\
\%1 &= \cos(\psi)\cos(\alpha)xb0 + \sin(\psi)\cos(\alpha)yb0 + \sin(\alpha)zb0 - \cos(\psi)\cos(\alpha)x \\
&\quad - \sin(\psi)\cos(\alpha)y - \sin(\alpha)z \\
\%2 &= \cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2
\end{aligned} \tag{D.28}$$

$$\begin{aligned}
C_{-1,3}^i &= \left(\frac{\sin(\beta)}{\%1} + (-xb0\sin(\psi)\sqrt{\%2} + xb0\cos(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) + yb0\cos(\psi)\sqrt{\%2} \right. \\
&\quad + yb0\sin(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\beta)zb0\cos(\alpha) + x\sin(\psi)\sqrt{\%2} \\
&\quad - x\cos(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) - y\cos(\psi)\sqrt{\%2} - y\sin(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\beta)z\cos(\alpha) \Big) \\
&\quad \sin(\alpha) / (\cos(\alpha)\%1^2) \Big/ \left(1 + (-xb0\sin(\psi)\sqrt{\%2} + xb0\cos(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) \right. \\
&\quad + yb0\cos(\psi)\sqrt{\%2} + yb0\sin(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\beta)zb0\cos(\alpha) + x\sin(\psi)\sqrt{\%2} \\
&\quad \left. - x\cos(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) - y\cos(\psi)\sqrt{\%2} - y\sin(\psi)\sin(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\beta)z\cos(\alpha) \right)^2 \\
&\quad / (\cos(\alpha)^2 \%1^2) \\
\%1 &= \cos(\psi)\cos(\alpha)xb0 + \sin(\psi)\cos(\alpha)yb0 + \sin(\alpha)zb0 - \cos(\psi)\cos(\alpha)x \\
&\quad - \sin(\psi)\cos(\alpha)y - \sin(\alpha)z \\
\%2 &= \cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2
\end{aligned} \tag{D.29}$$

$$\begin{aligned}
C_{-1,4}^i := & \left((-xb0 \cos(\psi) \sqrt{\%2} - xb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - yb0 \sin(\psi) \sqrt{\%2} \right. \\
& + yb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + x \cos(\psi) \sqrt{\%2} + x \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + y \sin(\psi) \sqrt{\%2} \\
& \left. - y \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) \right) / (\cos(\alpha) \%1) - (-xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%2} \\
& + xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%2} + yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) \\
& - \sin(\beta) zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sqrt{\%2} - x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - y \cos(\psi) \sqrt{\%2} \\
& - y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\beta) z \cos(\alpha)) \\
& (-\sin(\psi) \cos(\alpha) xb0 + \cos(\psi) \cos(\alpha) yb0 + \sin(\psi) \cos(\alpha) x - \cos(\psi) \cos(\alpha) y) / \left(\right. \\
& \left. \cos(\alpha) \%1^2 \right) \left(1 + (-xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%2} + xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) \right. \\
& + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%2} + yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\beta) zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sqrt{\%2} \\
& - x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - y \cos(\psi) \sqrt{\%2} - y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\beta) z \cos(\alpha) \left. \right)^2 \\
& / (\cos(\alpha)^2 \%1^2) \\
\%1 := & \cos(\psi) \cos(\alpha) xb0 + \sin(\psi) \cos(\alpha) yb0 + \sin(\alpha) zb0 - \cos(\psi) \cos(\alpha) x \\
& - \sin(\psi) \cos(\alpha) y - \sin(\alpha) z \\
\%2 := & \cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2
\end{aligned} \tag{D.30}$$

$$\begin{aligned}
C_{-2,1}^i := & \left(\frac{\sin(\psi) \sin(\beta) + \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1}}{\cos(\alpha) \sqrt{\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(\alpha)^2}}} - \frac{1}{2} (-xb0 \sin(\psi) \sin(\beta) \right. \\
& - xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + yb0 \cos(\psi) \sin(\beta) - yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} \\
& + \sqrt{\%1} zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sin(\beta) + x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(\beta) \\
& \left. + y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(\alpha) \right) \\
& \left(-2 \%3 \cos(\psi) \cos(\alpha) + 2 \frac{\%2 (\sin(\psi) \sqrt{\%1} - \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta))}{\cos(\alpha)^2} \right) / \left(\cos(\alpha) \right. \\
& \left. \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(\alpha)^2} \right)^{3/2} \right) \left(1 + (-xb0 \sin(\psi) \sin(\beta) - xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} \right. \\
& + yb0 \cos(\psi) \sin(\beta) - yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + \sqrt{\%1} zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sin(\beta) \\
& + x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(\beta) + y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(\alpha) \left. \right)^2 / \\
& \left(\cos(\alpha)^2 \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(\alpha)^2} \right) \right) \\
\%1 := & \cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2 \\
\%2 := & -xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} \\
& + yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\beta) zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} \\
& - x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\beta) z \cos(\alpha) \\
\%3 := & \cos(\psi) \cos(\alpha) xb0 + \sin(\psi) \cos(\alpha) yb0 + \sin(\alpha) zb0 - \cos(\psi) \cos(\alpha) x \\
& - \sin(\psi) \cos(\alpha) y - \sin(\alpha) z
\end{aligned} \tag{D.31}$$

$$\begin{aligned}
C_{-i_{2,2}} &:= \left(\frac{-\cos(\psi) \sin(\beta) + \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1}}{\cos(\alpha) \sqrt{\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(\alpha)^2}}} - \frac{1}{2} (-xb0 \sin(\psi) \sin(\beta) \right. \\
&\quad - xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + yb0 \cos(\psi) \sin(\beta) - yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} \\
&\quad + \sqrt{\%1} zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sin(\beta) + x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(\beta) \\
&\quad \left. + y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(\alpha) \right) \\
&\quad \left(-2 \%3 \sin(\psi) \cos(\alpha) + 2 \frac{\%2 (-\cos(\psi) \sqrt{\%1} - \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta))}{\cos(\alpha)^2} \right) / \left(\cos(\alpha) \right. \\
&\quad \left. \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(\alpha)^2} \right)^{3/2} \right) / \left(1 + (-xb0 \sin(\psi) \sin(\beta) - xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} \right. \\
&\quad + yb0 \cos(\psi) \sin(\beta) - yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + \sqrt{\%1} zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sin(\beta) \\
&\quad + x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(\beta) + y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(\alpha) \left. \right)^2 / \\
&\quad \left(\cos(\alpha)^2 \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(\alpha)^2} \right) \right) \\
\%1 &:= \cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2 \\
\%2 &:= -xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} \\
&\quad + yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\beta) zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} \\
&\quad - x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\beta) z \cos(\alpha) \\
\%3 &:= \cos(\psi) \cos(\alpha) xb0 + \sin(\psi) \cos(\alpha) yb0 + \sin(\alpha) zb0 - \cos(\psi) \cos(\alpha) x \\
&\quad - \sin(\psi) \cos(\alpha) y - \sin(\alpha) z
\end{aligned} \tag{D.32}$$

$$\begin{aligned}
C_{-i_{2,3}} &:= \left(-\frac{\sqrt{\%1}}{\sqrt{\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(\alpha)^2}}} - \frac{1}{2} (-xb0 \sin(\psi) \sin(\beta) - xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} \right. \\
&\quad + yb0 \cos(\psi) \sin(\beta) - yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + \sqrt{\%1} zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sin(\beta) \\
&\quad \left. + x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(\beta) + y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(\alpha) \right) \\
&\quad \left(-2 \%3 \sin(\alpha) + 2 \frac{\%2 \sin(\beta)}{\cos(\alpha)} \right) / \left(\cos(\alpha) \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(\alpha)^2} \right)^{3/2} \right) / \left(1 + \left(\right. \right. \\
&\quad -xb0 \sin(\psi) \sin(\beta) - xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + yb0 \cos(\psi) \sin(\beta) \\
&\quad - yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + \sqrt{\%1} zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sin(\beta) + x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} \\
&\quad \left. - y \cos(\psi) \sin(\beta) + y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(\alpha) \right)^2 / \left(\cos(\alpha)^2 \right. \\
&\quad \left. \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(\alpha)^2} \right) \right) \\
\%1 &:= \cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2 \\
\%2 &:= -xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} \\
&\quad + yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\beta) zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} \\
&\quad - x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\beta) z \cos(\alpha) \\
\%3 &:= \cos(\psi) \cos(\alpha) xb0 + \sin(\psi) \cos(\alpha) yb0 + \sin(\alpha) zb0 - \cos(\psi) \cos(\alpha) x \\
&\quad - \sin(\psi) \cos(\alpha) y - \sin(\alpha) z
\end{aligned} \tag{D.33}$$

$$\begin{aligned}
C_{i_{2,4}} := & \left(\begin{aligned}
& -xb0 \cos(\psi) \sin(\beta) + xb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - yb0 \sin(\psi) \sin(\beta) \\
& - yb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + x \cos(\psi) \sin(\beta) - x \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + y \sin(\psi) \sin(\beta) \\
& + y \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} \Big/ \left(\cos(\alpha) \sqrt{\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(\alpha)^2}} \right) - \frac{1}{2} \left(-xb0 \sin(\psi) \sin(\beta) \right. \\
& - xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + yb0 \cos(\psi) \sin(\beta) - yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} \\
& + \sqrt{\%1} zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sin(\beta) + x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(\beta) \\
& + y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(\alpha) \Big) \left(\right. \\
& 2 \%3 \left(-\sin(\psi) \cos(\alpha) xb0 + \cos(\psi) \cos(\alpha) yb0 + \sin(\psi) \cos(\alpha) x - \cos(\psi) \cos(\alpha) y \right) \\
& + 2 \%2 \left(-xb0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} - xb0 \sin(\psi) \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} - yb0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} \right. \\
& + yb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + x \cos(\psi) \sqrt{\%1} + x \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + y \sin(\psi) \sqrt{\%1} \\
& \left. \left. - y \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) \right) / \cos(\alpha)^2 \Big/ \left(\cos(\alpha) \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(\alpha)^2} \right)^{3/2} \right) \Big/ \left(1 + \left(\right. \right. \right. \\
& -xb0 \sin(\psi) \sin(\beta) - xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + yb0 \cos(\psi) \sin(\beta) \\
& - yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + \sqrt{\%1} zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sin(\beta) + x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} \\
& \left. \left. \left. - y \cos(\psi) \sin(\beta) + y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(\alpha) \right)^2 / \left(\cos(\alpha)^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left(\%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(\alpha)^2} \right) \right) \right) \right)
\end{aligned} \right) \\
\%1 := & \cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2 \\
\%2 := & -xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} \\
& + yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\beta) zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} \\
& - x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\beta) z \cos(\alpha) \\
\%3 := & \cos(\psi) \cos(\alpha) xb0 + \sin(\psi) \cos(\alpha) yb0 + \sin(\alpha) zb0 - \cos(\psi) \cos(\alpha) x \\
& - \sin(\psi) \cos(\alpha) y - \sin(\alpha) z
\end{aligned} \tag{D.34}$$

2.2.2 Deuxième matrice jacobienne

$$D_j = \left[\frac{\partial O_B}{\partial U} \left(\hat{X}_{j/j-1}, U_j^* \right) \right] \tag{D.35}$$

$$D_{i_{1,1}} := 0 \quad D_{i_{1,2}} := 0 \tag{D.36}$$

$$\begin{aligned}
Di_{1,3} = & \left(\left(\frac{xb0 \sin(\psi) \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\sqrt{\%2}} + xb0 \cos(\psi) \cos(\alpha) \sin(\beta) \right. \right. \\
& - \frac{yb0 \cos(\psi) \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\sqrt{\%2}} + yb0 \sin(\psi) \cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\beta) zb0 \sin(\alpha) \\
& - \frac{x \sin(\psi) \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\sqrt{\%2}} - x \cos(\psi) \cos(\alpha) \sin(\beta) + \frac{y \cos(\psi) \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\sqrt{\%2}} \\
& \left. \left. - y \sin(\psi) \cos(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\beta) z \sin(\alpha) \right) / (\cos(\alpha) \%1) + \frac{\%3 \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^2 \%1} - \%3 (\right. \\
& \left. - \cos(\psi) \sin(\alpha) xb0 - \sin(\psi) \sin(\alpha) yb0 + \cos(\alpha) zb0 + \cos(\psi) \sin(\alpha) x \right. \\
& \left. + \sin(\psi) \sin(\alpha) y - \cos(\alpha) z) / (\cos(\alpha) \%1^2) \right) / \left(1 + \frac{\%3^2}{\cos(\alpha)^2 \%1^2} \right) \\
\%1 = & \cos(\psi) \cos(\alpha) xb0 + \sin(\psi) \cos(\alpha) yb0 + \sin(\alpha) zb0 - \cos(\psi) \cos(\alpha) x \\
& - \sin(\psi) \cos(\alpha) y - \sin(\alpha) z \\
\%2 = & \cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2 \\
\%3 = & -xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%2} + xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%2} \\
& + yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\beta) zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sqrt{\%2} \\
& - x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - y \cos(\psi) \sqrt{\%2} - y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\beta) z \cos(\alpha) \quad (D.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Di_{1,4} = & \left(\frac{xb0 \sin(\psi) \sin(\beta) \cos(\beta)}{\sqrt{\%1}} + xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \cos(\beta) \right. \\
& - \frac{yb0 \cos(\psi) \sin(\beta) \cos(\beta)}{\sqrt{\%1}} + yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\beta) zb0 \cos(\alpha) \\
& - \frac{x \sin(\psi) \sin(\beta) \cos(\beta)}{\sqrt{\%1}} - x \cos(\psi) \sin(\alpha) \cos(\beta) + \frac{y \cos(\psi) \sin(\beta) \cos(\beta)}{\sqrt{\%1}} \\
& \left. - y \sin(\psi) \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\beta) z \cos(\alpha) \right) / (\cos(\alpha) (\cos(\psi) \cos(\alpha) xb0 \\
& + \sin(\psi) \cos(\alpha) yb0 + \sin(\alpha) zb0 - \cos(\psi) \cos(\alpha) x - \sin(\psi) \cos(\alpha) y - \sin(\alpha) z) \left(1 \right. \\
& + (-xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} \\
& + yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\beta) zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} \\
& \left. - x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\beta) z \cos(\alpha) \right)^2 \\
& \left. / (\cos(\alpha)^2 (\cos(\psi) \cos(\alpha) xb0 + \sin(\psi) \cos(\alpha) yb0 + \sin(\alpha) zb0 - \cos(\psi) \cos(\alpha) x \right. \\
& \left. - \sin(\psi) \cos(\alpha) y - \sin(\alpha) z)^2) \right) \\
\%1 = & \cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2 \quad (D.38)
\end{aligned}$$

$$Di_{2,1} = 0 \quad (D.39)$$

$$Di_{2,2} = 0 \quad (D.40)$$

$$\begin{aligned}
D_{i_{2,3}} = & \left(\left(-xb0 \cos(\psi) \cos(\alpha) \sqrt{\%1} + \frac{xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha)^2 \cos(\alpha)}{\sqrt{\%1}} \right. \right. \\
& - yb0 \sin(\psi) \cos(\alpha) \sqrt{\%1} + \frac{yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha)^2 \cos(\alpha)}{\sqrt{\%1}} - \frac{zb0 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{\sqrt{\%1}} \\
& - \sqrt{\%1} zb0 \sin(\alpha) + x \cos(\psi) \cos(\alpha) \sqrt{\%1} - \frac{x \cos(\psi) \sin(\alpha)^2 \cos(\alpha)}{\sqrt{\%1}} \\
& + y \sin(\psi) \cos(\alpha) \sqrt{\%1} - \frac{y \sin(\psi) \sin(\alpha)^2 \cos(\alpha)}{\sqrt{\%1}} + \frac{z \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)}{\sqrt{\%1}} + \sqrt{\%1} z \sin(\alpha) \\
& \left. \right) / \left(\cos(\alpha) \sqrt{\%4} + \frac{\%5 \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^2 \sqrt{\%4}} - \frac{1}{2} \%5 \left(2 \%3 (-\cos(\psi) \sin(\alpha) xb0 \right. \right. \\
& - \sin(\psi) \sin(\alpha) yb0 + \cos(\alpha) zb0 + \cos(\psi) \sin(\alpha) x + \sin(\psi) \sin(\alpha) y - \cos(\alpha) z) + 2 \\
& \%2 \left(\frac{xb0 \sin(\psi) \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\sqrt{\%1}} + xb0 \cos(\psi) \cos(\alpha) \sin(\beta) \right. \\
& - \frac{yb0 \cos(\psi) \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\sqrt{\%1}} + yb0 \sin(\psi) \cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\beta) zb0 \sin(\alpha) \\
& - \frac{x \sin(\psi) \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\sqrt{\%1}} - x \cos(\psi) \cos(\alpha) \sin(\beta) + \frac{y \cos(\psi) \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{\sqrt{\%1}} \\
& \left. \left. - y \sin(\psi) \cos(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\beta) z \sin(\alpha) \right) / \cos(\alpha)^2 + 2 \frac{\%2^2 \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^3} \right) / \left(\cos(\alpha) \right. \\
& \left. \%4^{3/2} \right) / \left(1 + \frac{\%5^2}{\cos(\alpha)^2 \%4} \right) \\
\%1 = & \cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2 \\
\%2 = & -xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} \\
& + yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\beta) zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} \\
& - x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\beta) z \cos(\alpha) \\
\%3 = & \cos(\psi) \cos(\alpha) xb0 + \sin(\psi) \cos(\alpha) yb0 + \sin(\alpha) zb0 - \cos(\psi) \cos(\alpha) x \\
& - \sin(\psi) \cos(\alpha) y - \sin(\alpha) z \\
\%4 = & \%3^2 + \frac{\%2^2}{\cos(\alpha)^2} \\
\%5 = & -xb0 \sin(\psi) \sin(\beta) - xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + yb0 \cos(\psi) \sin(\beta) \\
& - yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + \sqrt{\%1} zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sin(\beta) + x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} \\
& - y \cos(\psi) \sin(\beta) + y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(\alpha)
\end{aligned} \tag{D.41}$$

$$\begin{aligned}
Di_{2,4} = & \left(\left(-xb0 \sin(\psi) \cos(\beta) + \frac{xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\beta)}{\sqrt{\%1}} + yb0 \cos(\psi) \cos(\beta) \right. \right. \\
& + \frac{yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\beta)}{\sqrt{\%1}} - \frac{zb0 \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\beta)}{\sqrt{\%1}} + x \sin(\psi) \cos(\beta) \\
& - \frac{x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\beta)}{\sqrt{\%1}} - y \cos(\psi) \cos(\beta) - \frac{y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\beta)}{\sqrt{\%1}} \\
& + \left. \frac{z \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\beta)}{\sqrt{\%1}} \right) / (\cos(\alpha) \sqrt{\%3}) - (-xb0 \sin(\psi) \sin(\beta) \\
& - xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + yb0 \cos(\psi) \sin(\beta) - yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} \\
& + \sqrt{\%1} zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sin(\beta) + x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - y \cos(\psi) \sin(\beta) \\
& + y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(\alpha)) \%2 \left(\frac{xb0 \sin(\psi) \sin(\beta) \cos(\beta)}{\sqrt{\%1}} \right. \\
& + xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \cos(\beta) - \frac{yb0 \cos(\psi) \sin(\beta) \cos(\beta)}{\sqrt{\%1}} + yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \cos(\beta) \\
& - \cos(\beta) zb0 \cos(\alpha) - \frac{x \sin(\psi) \sin(\beta) \cos(\beta)}{\sqrt{\%1}} - x \cos(\psi) \sin(\alpha) \cos(\beta) \\
& + \left. \frac{y \cos(\psi) \sin(\beta) \cos(\beta)}{\sqrt{\%1}} - y \sin(\psi) \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\beta) z \cos(\alpha) \right) / (\cos(\alpha)^3 \\
& \%3^{3/2}) / \left(1 + (-xb0 \sin(\psi) \sin(\beta) - xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + yb0 \cos(\psi) \sin(\beta) \right. \\
& - yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} + \sqrt{\%1} zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sin(\beta) + x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} \\
& \left. - y \cos(\psi) \sin(\beta) + y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sqrt{\%1} - \sqrt{\%1} z \cos(\alpha))^2 / (\cos(\alpha)^2 \%3) \right) \\
\%1 = & \cos(\alpha)^2 - \sin(\beta)^2 \\
\%2 = & -xb0 \sin(\psi) \sqrt{\%1} + xb0 \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + yb0 \cos(\psi) \sqrt{\%1} \\
& + yb0 \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - \sin(\beta) zb0 \cos(\alpha) + x \sin(\psi) \sqrt{\%1} \\
& - x \cos(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) - y \cos(\psi) \sqrt{\%1} - y \sin(\psi) \sin(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\beta) z \cos(\alpha) \\
\%3 = & (\cos(\psi) \cos(\alpha) xb0 + \sin(\psi) \cos(\alpha) yb0 + \sin(\alpha) zb0 - \cos(\psi) \cos(\alpha) x \\
& - \sin(\psi) \cos(\alpha) y - \sin(\alpha) z)^2 + \frac{\%2^2}{\cos(\alpha)^2}
\end{aligned} \tag{D.42}$$