

Fusion de données redondantes avec une technique ensembliste atteignant la consistance globale

AMADOU GNING ET PHILIPPE BONNIFAIT

HEUDIASYC UMR UTC/CNRS 6599.

60205 COMPIEGNE CEDEX.

Résumé — Cet article propose de traiter un problème de fusion de données ensembliste à l'aide d'outils de satisfaction de contraintes sur les intervalles réels. En effet, dans le cas où il existe une forte redondance des données, on cherche à étudier les performances d'une telle approche compte tenu de son fort potentiel à être implémentée sur un ordinateur temps-réel. La contribution de ce travail est essentiellement méthodologique dans la mesure où nous proposons une méthode originale pour atteindre la consistance globale en un nombre calculable a priori d'opérations arithmétiques. D'un point de vue applicatif, nous nous intéressons ici à l'estimation de l'état cinématique d'une automobile à partir des mesures des quatre capteurs ABS et de l'angle au volant.

Mots clés—estimation ensembliste, fusion de données garantie, propagation de contraintes sur les réels.

I. INTRODUCTION

La fusion de données est un problème d'estimation avec plus de données que d'inconnues dans lequel on cherche à tirer profit de toutes les informations disponibles. Dans un problème de fusion de données, il est fondamental de gérer l'imprécision et l'incertitude. L'imprécision d'une grandeur est définie comme l'écart entre cette grandeur et sa valeur vraie alors que la certitude d'une proposition traduit la confiance que l'on a dans le fait que cette proposition soit vraie. Plus l'incertitude d'une proposition est grande et plus les chances que cette proposition soit vraie sont faibles. Dans cet article, on ne considère que les imprécisions des données. Lorsque celles-ci sont modélisées sous forme d'intervalles, la propagation de contraintes sur les intervalles réels permet de résoudre à elle seule des problèmes de fusion de données redondantes [4, 5, 7, 8]. En d'autres termes, en cas de forte redondance, cette technique permet d'obtenir des pavés assez réduits et donc peu pessimistes.

Dans ce travail, on cherche à appliquer un concept théorique nouveau, susceptible de résoudre un problème souvent rencontré lorsqu'on résout un problème de satisfaction de contraintes. En effet, les algorithmes de propagation de contraintes aboutissent souvent à des consistances locales sauf dans certains cas, comme celui où le graphe de représentation des contraintes reliant les variables est sous forme d'un arbre [2, 5]. Dans le cas où des cycles interviennent, les méthodes reposent souvent sur un algorithme de Waltz [3], dans lequel l'amélioration consiste à utiliser des heuristiques tendant à organiser le choix de l'ordre de contraction des variables. Si on veut améliorer la consistance locale qui découle de ces algorithmes et donc tendre vers la consistance globale, les solutions existantes se basent en général sur un découpage des pavés. Malheureusement, ces approches ont en commun la mauvaise

propriété d'avoir un temps de calcul inconnu a priori, ce qui complique leur implémentation temps réel.

Nous définissons dans cet article la notion de domaine de consistance. Un tel domaine présente des propriétés intéressantes, notamment, celle de conduire à la consistance globale en un nombre fini et connu d'opérations.

Nous avons appliquée cette technique au problème de fusion de données non linéaire des mesures des quatre capteurs ABS et de l'angle au volant dans le but d'obtenir une estimation garantie de l'état cinématique d'une automobile en déplacement. Le graphe correspondant à ce problème présente des cycles dus à la forte redondance des données [2, 5].

L'article est organisé comme suit. D'abord, le problème de fusion de données sera présenté ; il s'agit d'estimer de façon garantie l'état cinématique 2D d'une automobile en déplacement à partir de mesures redondantes. Ensuite, la notion de domaine de consistance sera définie. Grâce à plusieurs propriétés démontrées, on verra comment l'utiliser pour atteindre la consistance globale d'un problème académique présentant un cycle. Enfin, nous appliquerons cette technique à la résolution de notre problème et nous présenterons les résultats d'une telle approche sur des données réelles obtenues avec le véhicule expérimental du laboratoire.

II. LE PROBLEME CONSIDERE

Considérons un modèle simple d'Ackerman [3] établi sous hypothèse de roulement sans glissement.

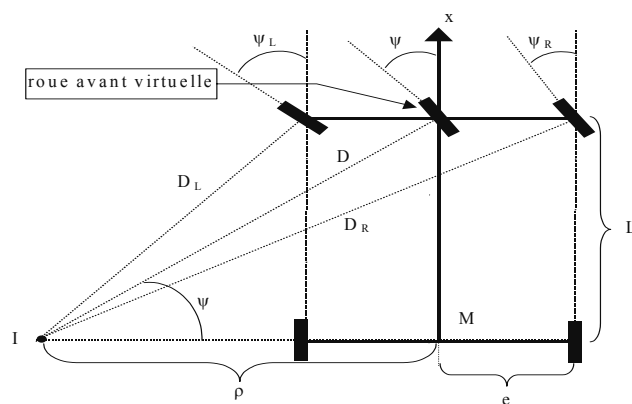


Figure 1 : modèle d'Ackerman d'un véhicule.

On note δ_s et δ_θ respectivement la distance parcourue par le point M et la variation de cap entre deux instants d'échantillonnage. De simples considérations géométriques utilisant le centre instantané de rotation « I » permettent d'établir les relations suivantes [10] :

$$(1) \quad \begin{cases} \tan(\psi) &= L \cdot \frac{\delta_\theta}{\delta_s} \\ \delta_{RL} &= \delta_s - e \cdot \delta_\theta \\ \delta_{RR} &= \delta_s + e \cdot \delta_\theta \\ \delta_{FL} \cdot \cos(\psi_L) &= \delta_s - e \cdot \delta_\theta \\ \delta_{FR} \cdot \cos(\psi_R) &= \delta_s + e \cdot \delta_\theta \end{cases}$$

où δ_{RL} , δ_{RR} , δ_{FL} , δ_{FR} , sont respectivement les distances parcourues par les roues arrières droite et gauche, et les roues avant droite et gauche. ψ_R et ψ_L sont les orientations des roues droite et gauche, et ψ l'angle d'une roue virtuelle centrale (cf. figure 1).

L'objectif que l'on se fixe est de trouver une méthode ensembliste utilisant l'analyse par intervalle et capable de fournir une estimation garantie de δ_s et δ_θ . Cette méthode doit de plus être compatible avec une implémentation en temps réel, c'est-à-dire que le nombre d'opérations doit être borné et connu à chaque pas de temps.

Le système redondant (1) entraîne des cycles dans le graphe des contraintes. Dans ce cas, les méthodes de propagation de contraintes de type "Waltz" [3, 6] ne permettent pas de connaître a priori le temps de calcul car elles se basent sur une boucle de type "répéter tant que ça contracte". De plus, ces approches ne permettent d'atteindre qu'une consistance locale.

Pour résoudre ces deux problèmes, nous proposons une nouvelle approche basée sur la notion de *domaine de consistance* présentée dans la suite.

III. DOMAINES DE CONSISTANCE

A. Consistances locale et globale

Etant donné un pavé $[x] \in \mathbb{R}^n$, résoudre le CSP $\mathcal{H} = \{x \in [x] \mid F(x)=0\}$ signifie rechercher dans ce pavé l'ensemble des solutions du système de contraintes $F(x)=0$.

On note S l'ensemble des solutions dans $[x]$ des contraintes f : $S = \{x \in [x] \mid F(x)=0\}$

Contracter \mathcal{H} signifie remplacer le pavé $[x]$ par un sous-pavé $[x]^\circ \subset [x]$ qui conserve toutes les solutions S , i.e $S \subset [x]^\circ$.

Un pavé $[x_i]$ est dit localement consistant avec \mathcal{H} s'il vérifie toutes les contraintes prises séparément. Un pavé $[x_i]$ est dit globalement consistant avec \mathcal{H} s'il vérifie toutes les contraintes en même temps.

B. Domaine de consistance associé à un sous-vecteur

Soient $I = (1, \dots, n)$ et $J = (j_1, \dots, j_m)$ un sous-ensemble de I de cardinal m .

Considérons un vecteur noté $x \in \mathbb{R}^n$. On note x_J un sous-vecteur de x associé à J . Ce sous-vecteur est de dimension m et s'écrit : $x_J = (x(j_1), \dots, x(j_m))^T$

De même, soit $[x]$ un pavé dans \mathbb{R}^n . Le sous-pavé de $[x]$ associé à J , noté $[x_J] \in \mathbb{R}^m$, s'écrit $[x_J] = ([x(j_1)], \dots, [x(j_m)])^T$

On note $K=I \setminus J$ le complémentaire de J dans I . Considérons d'abord le cas simple décrit par la figure 2 où \mathcal{H} est un CSP à 2 variables (x, y) et constitué de 2 contraintes (une bande et une ellipse, ici). Pour la valeur de x_0 choisie, l'ensemble $D_F(x_0)$ des y tels que (x_0, y) soit globalement consistant avec \mathcal{H} est représenté sur la figure 2.

Soit x_J un sous-vecteur de x associé à J . On appelle domaine de consistance associé à x_J , l'ensemble $D_F(x_J)$ inclus dans l'ensemble des sous-vecteurs de \mathbb{R}^n associés à K .

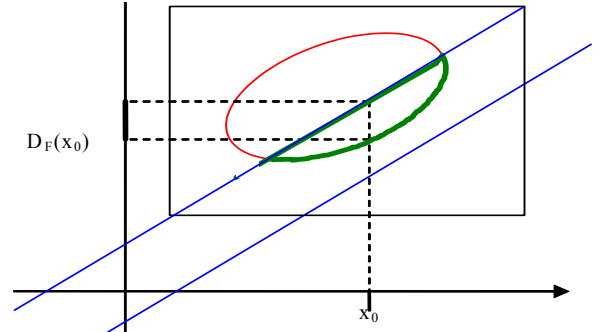


Figure 2 : domaine de consistance associé à la valeur x_0 .

$D_F(x_J)$ est vide ou bien vérifie les conditions suivantes :

1. tout vecteur globalement consistant ayant x_J comme sous-vecteur a ses composantes complémentaires à x_J incluses dans le domaine de consistance, i.e. $\forall z \in \mathbb{R}^n$ tel que $z_J = x_J$ et tel que z vérifie toutes les contraintes F , alors $z_K \in D_F(x_J)$
2. tout vecteur constitué des sous-vecteurs $z_K \in D_F(x_J)$ et x_J est globalement consistant, i.e. $\forall z_K \in D_F(x_J)$, le produit cartésien $z_K \times x_J$ dans \mathbb{R}^n (dans le bon ordre) vérifie toutes les contraintes F .

Pour un sous-vecteur donné x_J , $D_F(x_J)$ représente donc le plus grand ensemble de sous-vecteurs tels que leurs produits cartésiens avec x_J donne un vecteur dans \mathbb{R}^n globalement consistant avec \mathcal{H} .

C. Domaine de consistance associé à un ensemble de sous-vecteurs

Considérons maintenant le cas décrit par la figure 3 où cette fois-ci, on cherche à caractériser pour un intervalle $[x]$ donné, l'ensemble des y pour lesquels $\exists x \in [x]$ tel que (x, y) soit globalement consistant avec \mathcal{H} . Cet ensemble, noté $D_F([x])$, est appelé domaine de consistance associé à l'intervalle $[x]$.

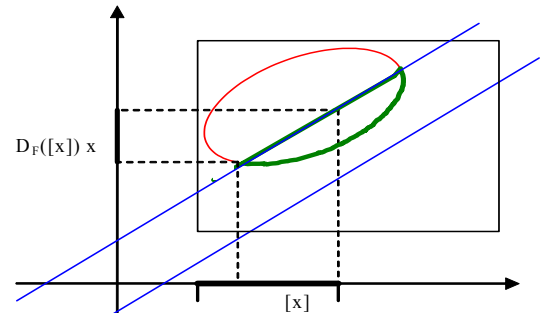


Figure 3 : domaine de consistance d'un intervalle.

Dans le cas général, pour un ensemble de sous-vecteurs associés à J donné A_J non vide, $D_F([x_J])$ représente le plus grand ensemble de sous-vecteurs vérifiant :

- $\forall z_K \in D_F(A_J), \exists x_J \in A_J$
tel que le produit cartésien avec x_J donne un vecteur dans $[x]$ globalement consistant.
- $D_F(A_J)$ (inclus dans l'ensemble des sous vecteurs dans $[x]$ associés à K) est vide ou bien vérifie :

1. si z est globalement consistant et si ses composantes selon J sont incluses dans A_J alors celles de z selon K appartiennent au domaine de consistance, i.e. $\forall z \in \mathbb{R}^n$ tel que $z_J \in A_J$ et tel que z vérifie toutes les contraintes F , alors $z_K \in D_F(A_J)$

2. pour tout sous-vecteur dans DF(AJ) on peut trouver un sous-vecteur dans AJ tel que leur produit cartésien soit globalement consistant, i.e $\forall zK \in DF(AJ), \exists zJ \in [AJ]$ tel que le produit cartésien de zK et zJ dans \mathbb{R}^n vérifie toutes les contraintes F.

Remarque : si A_j est vide, $D_F(A_j)$ est vide.

D. Propriétés

Un certain nombre de propriétés intéressantes, dont les démonstrations sont en annexe, sont citées ci dessous. Elles nous ont permis d'aboutir à des résultats intéressants, permettant d'évaluer les domaines de consistances.

1. Dans le cas particulier de deux variables x et y reliées par une contrainte $x = f(y)$, on a $D_f([y]) = f([y])$.
2. Soient $[z]$ et $[y]$ des sous-intervalles dans \mathcal{H} associés à J tels que $[y] \subset [z]$ alors $D_F([y]) \subset D_F([z])$
3. le domaine de consistance associé à un sous-pavé est l'union des domaines de consistance de tous les sous-vecteurs de ce sous-pavé, i.e.
 \forall le sous-pavé $[x_J]$ de $[x]$, $D_F([x_J]) = \bigcup_{x_j \in [x_J]} D_F(x_j)$.
4. Soit $[z]$ un sous-pavé associé à J et soient $[z_{J,1}], \dots, [z_{J,p}]$ p sous-pavés associés à J constituant un recouvrement de $[z]$, i.e. $[z] = \bigcup_{1 \leq i \leq p} [z_{J,i}]$.
Alors $D_F([z]) = \bigcup_{1 \leq i \leq p} D_F([z_{J,i}])$.
5. Si un système de contraintes $G(x)=0$ est une sous-partie du système $F(x)=0$, alors pour $[x_J]$ sous-pavé de $[x]$, on a $D_F([x_J]) \subset D_G([x_J])$.
6. Supposons que le système $F(x)=0$ soit équivalent à un système qui s'écrit $G(x)=0$, alors pour $[x_J]$ sous-pavé de $[x]$, on a $D_F([x_J]) = D_G([x_J])$

E. Théorèmes

Soient $[x]$ un pavé de \mathbb{R}^n , $(f_i)_{i=1..p}$ des fonctions réelles et $F=(f_1, \dots, f_p)$. Soit $I=\{1 \dots n\}$ et le CSP $\mathcal{H} = (F(x)=0 \mid x \in [x])$.

1) Théorème 1 : calcul du domaine globalement consistant à l'aide des domaines de consistance associés au complémentaire de chaque composante

Pour tout $j \in I$, on a : $\Pi_j(S) = [x_j] \cap D_F(\prod_{i \in I - \{j\}} [x_i])$

où $\Pi_j(S)$ est la projection de la solution S selon la $j^{\text{ème}}$ composante. En répétant n fois cette opération pour toutes les composantes, on obtient un pavé globalement consistant.

2) Théorème 2

Soit $[x_J]$ le sous-pavé de $[x]$ associé à J . On note $[x_J^-]$ et $[x_J^+]$ les composantes de $[x_J]$ qui apparaissent respectivement une fois au plus et deux fois au moins dans le graphe des contraintes. On a pour tout x_J^+ dans $[x_J^+]$

$$D_F([x_J^-] \times x_J^+) = \bigcap_{i=1..p} D f_i([x_J^-] \times x_J^+)$$

3) Théorème 3

Pour $j \in 1 \dots n$, soit le CSP noté $\mathcal{H}_{I-\{j\}}$, dans l'espace \mathbb{R}^{n-1} , correspondant aux variables réduites aux $x_i \neq x_j$ et aux contraintes les reliant i.e. $\mathcal{H}_{I-\{j\}} = (g(y)=0, y \in \prod_{i \in I - \{j\}} [x_i])$ où g

est le sous-ensemble des contraintes F indépendantes de la variable x_j . Notons $S_{I-\{j\}}$ l'ensemble solution du CSP $\mathcal{H}_{I-\{j\}}$.

On a le résultat : $D_F(\prod_{i \in I - \{j\}} [x_i]) = D_F(S_{I-\{j\}})$ (2)

Corollaire 1

Posons $f_{\{j\}}$ l'ensemble des contraintes reliant la variable x_j aux autres variables dans \mathcal{H} . On a la relation suivante découlant du résultat précédent :

$$D_F(\prod_{i \in I - \{j\}} [x_i]) = D f_{\{j\}}(S_{I-\{j\}}). \quad (3)$$

Corollaire 2

Supposons de plus que l'ensemble de contraintes $f_{\{j\}}$ relie x_j uniquement aux q variables d'indices notés j_1, \dots, j_q ($q \leq n$), on a alors :

$$D_F(\prod_{i \in I - \{j\}} [x_i]) = D f_{\{j\}}(\Pi_{j_1 \dots j_q}(S_{I-\{j\}})) \quad (4)$$

où $\Pi_{j_1 \dots j_q}$ est la projection sur l'espace des $(x_{j_1} \times \dots \times x_{j_q})$.

IV. EXEMPLE : RESOLUTION D'UN CSP CONTENANT UN CYCLE

Considérons un CSP $\mathcal{H} = \{F(a, b, x, y) = 0 \mid (a \times b \times x \times y) \in [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]\}$ où F est constitué des 2 contraintes linéaires $y+x=a$ et $y-x=b$. Le graphe de ce CSP contient un cycle (fig.4) et est bien connu pour mettre en défaut l'algorithme de Waltz [6].

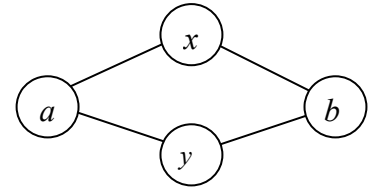


Figure 4 : domaine de consistance d'un intervalle.

Pour résoudre ce CSP en utilisant la méthode de consistance globale, considérons d'abord la variable y .

A. Calcul de la composante $[y]$ globalement consistante

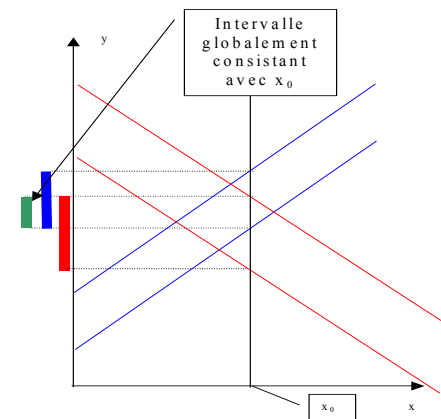


Figure 5 : contraintes de l'exemple.

Appliquons le théorème 1 pour déterminer $[y]$ globalement consistant avec \mathcal{H} . On a : $\Pi_3(S) = [y] \cap D_F([a] \times [b] \times [x])$

1) Etape 1 : bornes du domaine associé à un scalaire x_0

La variable x étant la seule à apparaître plus d'une fois dans les équations, d'après le théorème 2, pour un $x_0 \in [x]$, le domaine de consistance associé à $[a] \times [b] \times x_0$, $D_F([a] \times [b] \times x_0)$ peut être calculé grâce à une intersection des domaines obtenus en prenant les contraintes séparément :

$$D_F([a] \times [b] \times x_0) = ([a] - x_0) \cap ([b] + x_0) = ([a_1, a_2] - x_0) \cap ([b_1, b_2] + x_0) \\ = ([a_1 - x_0, a_2 - x_0]) \cap ([b_1 + x_0, b_2 + x_0]) \\ = [\text{Sup}(a_1 - x_0, b_1 + x_0), \text{Inf}(a_2 - x_0, b_2 + x_0)] \quad (5)$$

2) Etape 2 : évolution des bornes en fonction de x_0

On cherche à caractériser le domaine lorsque x_0 parcourt $[x]$ notamment en étudiant les bornes de l'intervalle (5). Faisons une étude de la fonction suivante $\Delta(x) = (a-x) - (b+x) = a-b-2x$.

$$\text{Notons } x_{ab} = \frac{a-b}{2}.$$

Δ est décroissante et s'annule pour x_{ab} . Le tableau qui suit détermine les maxima et minima de $a-x$ et $b+x$ selon x .

| | $]-\infty, x_{ab}]$ | $[x_{ab}, +\infty[$ |
|--------------------------|---------------------|---------------------|
| $\Delta(x)$ | >0 | <0 |
| $\text{Sup}\{a-x, b+x\}$ | $a-x$ | $b+x$ |
| $\text{Inf}\{a-x, b+x\}$ | $b+x$ | $a-x$ |

En remplaçant dans ce tableau le couple (a,b) par chaque couple (a_1, b_1) et (a_2, b_2) , on obtient 3 secteurs (P_1, P_2, P_3) qui recouvrent \mathbb{R} et pour lesquels les bornes de $D_F([a] \times [b] \times x)$ sont connues.

| Si $x_{a_1 b_1} < x_{a_2 b_2}$ | $P_1 =]-\infty, x_{a_1 b_1}]$ | $P_2 = [x_{a_1 b_1}, x_{a_2 b_2}]$ | $P_3 = [x_{a_2 b_2}, +\infty[$ |
|--------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|--------------------------------|
| $\text{Sup}\{a_1-x, b_1+x\}$ | a_1-x | b_1+x | b_1+x |
| $\text{Inf}\{a_2-x, b_2+x\}$ | b_2+x | b_2+x | a_2-x |
| $D_F([a] \times [b] \times x)$ | $[a_1-x, b_2+x]$ | $[b_1+x, b_2+x]$ | $[b_1+x, a_2-x]$ |

| Si $x_{a_1 b_1} > x_{a_2 b_2}$ | $P_1 =]-\infty, x_{a_2 b_2}]$ | $P_2 = [x_{a_2 b_2}, x_{a_1 b_1}]$ | $P_3 = [x_{a_1 b_1}, +\infty[$ |
|--------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|--------------------------------|
| $D_F([a] \times [b] \times x)$ | $[a_1-x, b_2+x]$ | $[a_1-x, a_2-x]$ | $[b_1+x, a_2-x]$ |

3) Etape 3 : élimination des x pour lesquels l'intervalle $D_F([a] \times [b] \times x)$ est impropre

Il est à noter que le domaine de consistance peut être impropre (ce qui signifie « vide » physiquement) si sa borne supérieure devient inférieure à sa borne inférieure.

Par exemple, pour x dans P_1 , $D_F([a] \times [b] \times x) = [a_1-x, b_2+x]$, ce domaine est impropre si

$$a_1-x > b_2+x \Leftrightarrow \text{si } x < \frac{a_1-b_2}{2} \text{ soit } x < x_{a_1 b_2}.$$

On note $P_{1,s}$ (s pour solution), l'ensemble des P_1 pour lesquels $[a_1-x, b_2+x]$ est non vide.

$$\text{On a } P_{1,s} = P_1 \cap [x_{a_1 b_2}, +\infty[$$

On fait de même pour P_3 pour supprimer les intervalles impropres. On introduit ainsi :

$$P_{3,s} = P_3 \cap]-\infty, x_{a_2 b_1}].$$

Pour P_2 , on remarque que les intervalles sont toujours propres (pour tout x , $b_1+x < b_2+x$ et $a_1-x < a_2-x$). On a donc $P_{2,s} = P_2$.

4) Etape 4 : calcul de $D_F([a] \times [b] \times [x])$ connaissant $D_F([a] \times [b] \times x)$

$$\text{On a : } [a] \times [b] \times [x] = \bigcup_{i=1,2,3} [a] \times [b] \times ([x] \cap P_i)$$

Pour calculer $D_F([a] \times [b] \times [x])$, utilisons la propriété :

$$D_F([a] \times [b] \times [x]) = \bigcup_{i=1,2,3} D_F([a] \times [b] \times ([x] \cap P_i)) \\ = \bigcup_{i=1,2,3} \bigcup_{x \in [x] \cap P_i} D_F([a] \times [b] \times x)$$

$$\text{Calculons alors pour tout } i \bigcup_{x \in [x] \cap P_i} D_F([a] \times [b] \times x) :$$

→ Pour P_1 ,

$$\bigcup_{x \in [x] \cap P_1} D_F([a] \times [b] \times x) = \bigcup_{x \in [x] \cap P_{1,s}} D_F([a] \times [b] \times x) = \bigcup_{x \in [x] \cap P_1} [a_1-x, b_2+x] = [\text{Inf}\{a_1-x\} \mid x \in [x] \cap P_{1,s}, \text{Sup}\{b_2+x\} \mid x \in [x] \cap P_{1,s}]$$

Notons $[x] \cap P_{1,s} = [\underline{x}_{1,s}, \bar{x}_{1,s}]$. On a :

$$\bigcup_{y \in [y] \cap P_1} D_F([a] \times [b] \times [x]) = [a_1 - \bar{x}_{1,s}, b_2 + \bar{x}_{1,s}]. \quad (6)$$

→ Pour P_2 ,

▪ Si $x_{a_1 b_1} < x_{a_2 b_2}$ en posant $[x] \cap P_{2,s} = [\underline{x}_{2,s}, \bar{x}_{2,s}]$ on a :

$$\bigcup_{x \in [x] \cap P_2} D_F([a] \times [b] \times [x]) = [b_1 + \underline{x}_{2,s}, b_2 + \bar{x}_{2,s}] \quad (7)$$

▪ Si $x_{a_2 b_2} < x_{a_1 b_1}$ en posant $[x] \cap P_{2,s} = [\underline{x}_{2,s}, \bar{x}_{2,s}]$ on a :

$$\bigcup_{x \in [x] \cap P_2} D_F([a] \times [b] \times [x]) = [a_1 - \bar{x}_{2,s}, a_2 - \underline{x}_{2,s}] \quad (8)$$

→ Pour P_3 ,

En posant $[x] \cap P_{3,s} = [\underline{x}_{3,s}, \bar{x}_{3,s}]$ on a :

$$\bigcup_{x \in [x] \cap P_3} D_F([a] \times [b] \times [x]) = [b_1 + \underline{x}_{3,s}, a_2 - \underline{x}_{3,s}] \quad (9)$$

Si $x_{a_1 b_1} < x_{a_2 b_2}$, d'après (6), (7) et (9) on a :

$$D_F([a] \times [b] \times [x]) = [a_1 - \bar{x}_{1,s}, b_2 + \bar{x}_{1,s}] \cup [b_1 + \underline{x}_{2,s}, b_2 + \bar{x}_{2,s}] \cup [b_1 + \underline{x}_{3,s}, a_2 - \underline{x}_{3,s}]$$

Si $x_{a_2 b_2} < x_{a_1 b_1}$, d'après (6), (8) et (9) on a :

$$D_F([a] \times [b] \times [x]) = [a_1 - \bar{x}_{1,s}, b_2 + \bar{x}_{1,s}] \cup [a_1 - \bar{x}_{2,s}, a_2 - \underline{x}_{2,s}] \cup [b_1 + \underline{x}_{3,s}, a_2 - \underline{x}_{3,s}]$$

5) Algorithm

| Consistance_globale(In : $[x], [y], [a_1, a_2], [b_1, b_2]$, Out : $[y]$) |
|--|
| $x_{a_1 b_1} = \frac{a_1 - b_1}{2}, x_{a_2 b_2} = \frac{a_2 - b_2}{2}$ $x_{a_2 b_1} = \frac{a_2 - b_1}{2}, x_{a_1 b_2} = \frac{a_1 - b_2}{2}$ $P_1 =]-\infty, \min(x_{a_1 b_1}, x_{a_2 b_2})]$ $P_2 = [\min(x_{a_1 b_1}, x_{a_2 b_2}), \max(x_{a_1 b_1}, x_{a_2 b_2})]$ $P_3 = [\max(x_{a_1 b_1}, x_{a_2 b_2}), +\infty[$ $P_{1,s} = P_1 \cap [x_{a_1 b_2}, +\infty[; P_{2,s} = P_2 ; P_{3,s} = P_3 \cap]-\infty, x_{a_2 b_1}]$ $[x_{1,s}] = [x] \cap P_{1,s} ; [x_{2,s}] = [x] \cap P_{2,s} ; [x_{3,s}] = [x] \cap P_{3,s}$ $\text{if } [x_{1,s}] \neq \emptyset, [y_{1,s}] = [y] \cap [a_1 - \bar{x}_{1,s}, b_2 + \bar{x}_{1,s}]$ $\text{else } [y_{1,s}] = \emptyset \text{ end}$ $\text{if } (x_{a_1 b_1} < x_{a_2 b_2})$ $\quad \text{if } [x_{2,s}] \neq \emptyset, [y_{2,s}] = [y] \cap [b_1 + \underline{x}_{2,s}, b_2 + \bar{x}_{2,s}]$ $\quad \text{else } [y_{2,s}] = \emptyset \text{ end}$ else $\quad \text{if } [x_{2,s}] \neq \emptyset, [y_{2,s}] = [y] \cap [a_1 - \bar{x}_{2,s}, a_2 - \underline{x}_{2,s}]$ $\quad \text{else } [y_{2,s}] = \emptyset \text{ end}$ end $\text{if } [x_{3,s}] \neq \emptyset, [y_{3,s}] = [y] \cap [b_1 + \underline{x}_{3,s}, a_2 - \underline{x}_{3,s}]$ $\text{else } [y_{3,s}] = \emptyset \text{ end}$ $[y] = [y_{1,s}] \cup [y_{2,s}] \cup [y_{3,s}].$ |

B. Calcul de la composante $[x]$ globalement consistante

Pour $[x]$ globalement consistant, la symétrie du CSP par rapport à x et y ($x=a-y$ et $x=-b+y$), nous permet d'utiliser le même algorithme. Il suffit de faire ainsi :

Consistance_globale(In : $[y],[x],[a_1,a_2], [-b_2,-b_1]$, Out : $[x]$)

Si $[a]$ et $[b]$ sont scalaires, on vérifie que l'algorithme trouve bien une solution ponctuelle pour $[x]$ et $[y]$.

V. APPLICATION AU PROBLEME DE FUSION DE DONNEES

A. Mise en forme du problème

Considérons le système de contraintes (1). Pour obtenir un graphe de contraintes simplifié, on introduit 4 nouvelles variables intermédiaires a_1, a_2, a_3 et a_4 :

$$a_1 = \frac{e \cdot \tan(\psi)}{L}, a_2 = \delta_{FR} \cdot \cos(\psi_R), a_3 = \delta_{FL} \cdot \cos(\psi_L)$$

$$a_4 = e \cdot \delta_\theta$$

Le système d'équations (1) devient :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{a_4}{\delta_S} \\ \delta_{RL} = \delta_S - a_4 \\ \delta_{RR} = \delta_S + a_4 \\ a_2 = \delta_S - a_4 \\ a_3 = \delta_S + a_4 \end{cases}$$

et son graphe de contraintes est présenté sur la figure 6.

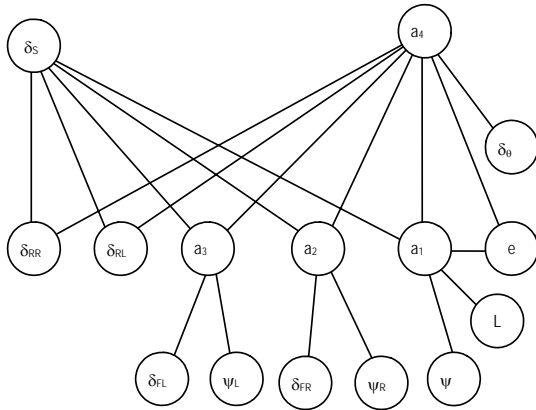


Figure 6 : graphe de contraintes du problème de fusion

On prend $x = (\delta_S, \delta_\theta, \delta_{RR}, \delta_{RL}, \delta_{FR}, \delta_{FL}, \psi, \psi_R, \psi_L, e, L, a_1, a_2, a_3, a_4)$, regroupant l'état, les paramètres du modèle et les variables auxiliaires. Le vecteur x à contracter est de dimension 15 et le problème présente un grand nombre de cycles.

Nous avons appliqué la méthodologie présentée dans l'exemple précédent pour obtenir un algorithme permettant d'aboutir à la consistance globale pour $[\delta_S]$ et pour $[\delta_\theta]$ en un nombre fini et connu d'opérations. La version Matlab de cet algorithme est accessible auprès des auteurs.

B. Résultats expérimentaux

Nous avons enregistré à 100 Hz les données des capteurs du véhicule expérimental de l'UTC (une Citroën Xantia break). Ces données ont été ré-échantillonnées à 5 Hz de façon à être synchrones de celles d'un récepteur GPS.

Des estimations garanties du déplacement élémentaire $[\delta_S]$ entre deux instants d'échantillonnage sont données sur la figure 7 (la vitesse du véhicule est d'environ 70 km/h). La méthode basée sur les domaines de consistance (courbe avec des '+') donne une estimation plus précise qu'une méthode

basée sur l'algorithme de Waltz (courbe avec des '*'). En effet, l'imprécision est réduite d'au moins 25 % ce qui est très significatif.

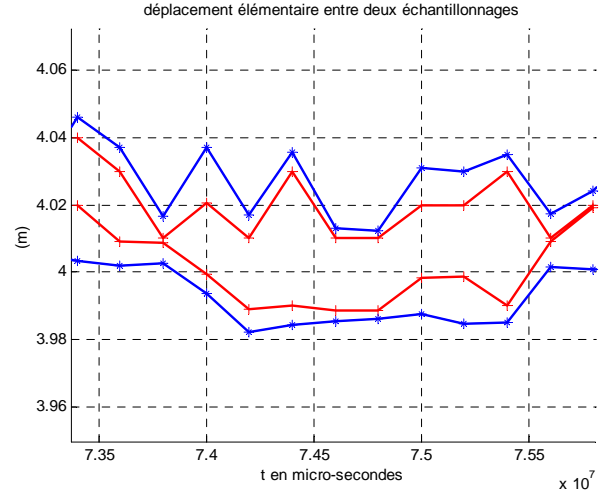


Figure 7 : estimations garanties de δ_S (domaine de consistance '+' et méthode de Waltz '*')

Ce résultat est conforme à la théorie puisque la méthode basée sur les domaines de consistance atteint la consistance globale et fournit donc l'estimation à erreur bornée la plus petite vérifiant toutes les contraintes. A l'inverse, une méthode basée sur l'algorithme de Waltz induit un pessimisme supplémentaire.

En terme de temps de calcul et pour fixer l'ordre de grandeur, une itération de la méthode prend 280 ms sous Matlab et avec un PC équipé d'un processeur Intel Pentium IV à 1,7 Ghz. Pour un algorithme de Waltz, le temps de calcul est de 35 ms avec un nombre d'itérations entre 3 et 4 en moyenne pour un seuil de contraction choisi de l'ordre 10^{-3} . Ce résultat est extrêmement encourageant pour une implémentation temps-réel à une fréquence de 5 Hz.

VI. CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons introduit une nouvelle technique de propagation de contraintes basée sur la notion fondamentale de domaine de consistance permettant d'envisager une résolution atteignant la consistance globale en un temps connu, et ce pour un problème présentant un graphe cyclique. Nous avons appliqué cette méthodologie à la résolution d'un problème de fusion de données dans lequel les contraintes sont non linéaires. Un exemple académique a permis d'expliquer la démarche à suivre en se basant sur des résultats dont les démonstrations ont été données.

Théoriquement, il est possible de résoudre de nombreux problèmes cycliques grâce à la caractérisation des domaines de consistance. Cependant, l'une des difficultés majeures, pour pouvoir calculer ces domaines, reste la détermination des solutions des CSP obtenus en utilisant le théorème 3. Une autre difficulté concerne la détermination des bornes supérieures et inférieures des fonctions dans IR. En effet, la complexité s'accroît avec le nombre de fonctions et avec les variations de monotonie des fonctions (comme les fonctions périodiques telles que *sinus*). En l'état actuel de nos connaissances, nous ne savons traiter que certains problèmes et au cas par cas.

La perspective de ce travail porte sur la comparaison de cette approche avec d'autres méthodes (basées sur la bisection notamment). On souhaite également étendre le champ d'application de cette méthode de résolution de cycles et

enfin on envisage de la porter dans un environnement informatique temps réel.

VII. REFERENCES

- [1] D. Waltz. "Generating semantic descriptions from drawings of scenes with shadows", *The psychology of computer Vision*, New York, NY pp. 19-91(1975).
- [2] F. Benhamou, F. Goualard, L. Granvilliers, and J.F. Puget. "Revising hull and box consistency", *Proceedings of the International Conference on Logic Programming*, Las Cruces, NM, pp.230-244. 1999.
- [3] J. Ackerman. Yaw disturbance by robust decoupling of car steering, *Proceedings of the IFAC World Congress, San Fransisco* July 1996
- [4] L. Jaulin, Consistency technique for the localisation of a satellite, Cocos 2002.
- [5] L. Jaulin, M. Kieffer, I. Braems and E. Walter. Guaranteed non linear estimation using constraint propagation on sets. *International Journal of Control*, volume 74, no 18, 1772-1782, 2001.
- [6] L. Jaulin., M. Kieffer, O. Didrit and E. Walter. "Applied Interval Analysis", *Springer-Verlag*, (2001).
- [7] M. Kieffer Estimation ensembliste par analyse par intervalles, application à la localisation d'un véhicule. *PhD dissertation, Université Paris-Sud*, Orsay, 1999.
- [8] M. Kieffer, L. Jaulin and E. Walter. "Guaranteed recursive non-linear state estimation using interval Analysis", *International journal of adaptative control and signal processing*, 16:193-218, 2002.
- [9] P. Bouron, D. Meizel, Ph. Bonnifait. "Set-Membership Non-Linear Observers with Application to Vehicle Localisation". 6th *European Control Conference*. Porto. Sept 2001.
- [10] Ph. Bonnifait, P. Bouron, D. Meizel and P. Crubillé. "Dynamic Localization of Car-like vehicles using Data Fusion Of Redundant ABS sensors". *The Journal Of Navigation*, Vol. 56, pp. 1-13. 2003.
- [11] R. E. Moore, "Interval Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.

VIII. ANNEXE: DEMONSTRATIONS DES PROPRIETES, DES THEOREMES ET DE LEURS COROLLAIRES

A. Propriétés

1. Par définition, pour x et y reliées par $x = f(y)$, on a $D_f([y]) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in [y] \text{ vérifiant } f(y) = x\} = f([y])$ ■
2. soient $[z]$ et $[y]$ associés à J tels que $[y] \subset [z]$
 $\forall y_K \in D_F([y]), \exists y_J \in [y] \subset [z]$ tel que $y_K \times y_J$ soit globalement consistant $\Rightarrow y_K \in D_F([z]) \forall y_K \in D_F([y]) \Rightarrow D_F([y]) \subset D_F([z])$ ■
3. $\forall x_J \in [x_J], D_F(x_J) \subset D_F([x_J]) \Rightarrow \bigcup_{x_J \in [x_J]} D_F(x_J) \subset D_F([x_J])$.

A l'inverse, pour $z_K \in D_F([x_J])$, on a par définition, $\exists z_J \in [x_J]$ tel que le produit cartésien de z_K et z_J dans \mathbb{R}^n soit globalement consistant $\Rightarrow z_K \in D_F(z_J)$ or $D_F(z_J) \subset \bigcup_{x_J \in [x_J]} D_F(x_J) \Rightarrow z_K \in \bigcup_{x_J \in [x_J]} D_F(x_J) \forall z_K \in D_F([x_J]) \Rightarrow D_F([x_J]) \subset \bigcup_{x_J \in [x_J]} D_F(x_J)$ ■

4. Soient $[z], [z_{J,1}], \dots, [z_{J,p}]$ des sous-pavés associés à J tels que $[z] = \bigcup_{1 \leq i \leq p} [z_{J,i}]$. On a $[z_{J,i}] \subset [z] \forall i \in 1 \dots p \Rightarrow$
 $D_F([z_{J,i}]) \subset D_F([z]) \forall i \in 1 \dots p \Rightarrow \bigcup_{1 \leq i \leq p} D_F([z_{J,i}]) \subset D_F([z])$,

A l'opposé, pour $z_K \in D_F([z])$, on sait par définition qu'il existe $z_J \in [z] = \bigcup_{1 \leq i \leq p} [z_{J,i}]$ tel que le produit cartésien de z_K et z_J dans \mathbb{R}^n soit globalement consistant. Or, $z_J \in \bigcup_{1 \leq i \leq p} [z_{J,i}] \Rightarrow \exists l$ tel que $z_J \in [z_{J,l}]$
 $\Rightarrow z_K \in D_F([z_{J,l}]) \Rightarrow z_K \in \bigcup_{1 \leq i \leq p} D_F([z_{J,i}]), \forall z_K \in D_F([z])$
 $\Rightarrow D_F([z]) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq p} D_F([z_{J,i}])$ ■

5. Soit $G(x)=0$ est une sous-partie du système $F(x)=0$, on a :

$x_K \in D_F([x_J]) \Leftrightarrow$ le vecteur $x_J \times x_K$ dans \mathbb{R}^n vérifie $F(x_J \times x_K)=0$
 $\Rightarrow x_J \times x_K$ vérifie en particulier $G(x_J \times x_K)=0 \Rightarrow x_K \in D_G([x_J])$ ■
6. Soit $F(x)=0$ équivalent au système $G(x)=0$, on a :
 $x_K \in D_F([x_J]) \Leftrightarrow$ le vecteur $x_J \times x_K$ dans \mathbb{R}^n vérifie $F(x_J \times x_K) = 0$
 $\Leftrightarrow x_J \times x_K$ vérifie $G(x_J \times x_K)=0 \Leftrightarrow x_K \in D_G([x_J])$ ■

B. Théorèmes

1) Théorème 1.

$S \subset [x]$ par définition donc $\Pi_j(S) \subset [x_j]$, montrons que $\Pi_j(S) \subset D_F(\prod_{i \in I - \{j\}} [x_i])$.

Soit $z_j \in \Pi_j(S)$. Par définition, $\exists s \in S$ tel que $z_j = s_j$
donc $z_j = s_j \in D_F(\prod_{i \in I - \{j\}} s_i)$.

$\prod_{i \in I - \{j\}} s_i \subset \prod_{i \in I - \{j\}} [x_i] \Rightarrow D_F(\prod_{i \in I - \{j\}} s_i) \subset D_F(\prod_{i \in I - \{j\}} [x_i])$

donc $z_j \in D_F(\prod_{i \in I - \{j\}} [x_i]), \forall z_j \in \Pi_j(S)$

d'où $\Pi_j(S) \subset [x_j] \cap D_F(\prod_{i \in I - \{j\}} [x_i])$

A l'inverse, soit $z_j \in [x_j] \cap D_F(\prod_{i \in I - \{j\}} [x_i])$

$\Rightarrow z_j \in [x_j]$ et $\exists y \in \prod_{i \in I - \{j\}} [x_i]$ tel que $y \times z_j$ dans \mathbb{R}^n soit globalement

consistant,

\Rightarrow on a $y \times z_j \in S \Rightarrow z_j \in \Pi_j(S), \forall z_j \in [x_j] \cap D_F(\prod_{i \in I - \{j\}} [x_i])$

d'où $\{[x_j] \cap D_F(\prod_{i \in I - \{j\}} [x_i])\} \subset \Pi_j(S)$ ■

2) Théorème 2

f_i est une sous-partie du système $F \forall i=1 \dots p$.

Donc $D_F([x_j^-] \times x_j^{1+}) \subset D_{f_i}([x_j^-] \times x_j^{1+}) \forall i=1 \dots p$

d'où : $D_F([x_j^-] \times x_j^{1+}) \subset \bigcap_{i=1 \dots p} D_{f_i}([x_j^-] \times x_j^{1+})$

Réciproquement $z_K \in \bigcap_{i=1 \dots p} D_{f_i}([x_j^-] \times x_j^{1+})$

$\Rightarrow z_K \in D_{f_i}([x_j^-] \times x_j^{1+}) \forall i=1 \dots p$

$\Rightarrow \forall i = 1 \dots p, \exists z_j^- (i) \in [x_j^-]$ tel que $f_i(z_K \times z_j^- (i) \times x_j^{1+}) = 0$.

Or, les variables dans $[x_j^-]$ n'apparaissent qu'une fois dans les contraintes f_i . On peut alors prendre un $z_j^- \in [x_j^-]$ tel que les composantes de z_j^- qui interviennent dans la contrainte f_i soient les mêmes que celles de $z_j^- (i)$ pour tout $i = 1 \dots p$.

Donc, $\exists z_j^- \in [x_j^-]$ tel que $f_i(z_K \times z_j^- \times x_j^{1+}) = f_i(z_K \times z_j^- (i) \times x_j^{1+}) = 0 \forall i=1 \dots p \Rightarrow \exists z_j^- \in [x_j^-]$ tel que $F(z_K \times z_j^- \times x_j^{1+}) = 0$

$\Rightarrow z_K \in D_F(z_j^- \times x_j^{1+}) \Rightarrow z_K \in D_F([x_j^-] \times x_j^{1+})$

d'où : $\bigcap_{i=1 \dots p} D_{f_i}([x_j^-] \times x_j^{1+}) \subset D_F([x_j^-] \times x_j^{1+})$ ■

3) Théorème 3

On a $S_{I-\{j\}} \subset \prod_{i \in I - \{j\}} [x_i]$ donc $D_F(S_{I-\{j\}}) \subset D_F(\prod_{i \in I - \{j\}} [x_i])$

Réciproquement, soit $z_j \in D_F(\prod_{i \in I - \{j\}} [x_i])$

$\Leftrightarrow \exists y \in \prod_{i \in I - \{j\}} [x_i]$ tel que le produit cartésien $y \times z_j$ dans \mathbb{R}^n vérifie

$F(y \times z_j) = 0$,

en particulier, $y \times z_j$ vérifie l'ensemble des contraintes g dans $\mathcal{H}_{I-\{j\}}$, \Rightarrow

$g(y \times z_j) = 0$

g ne concernant que les variables $x_i, i \neq j$, ceci est équivalent à : $g(y) = 0 \Leftrightarrow y \in S_{I-\{j\}}$ d'où $z_j \in D_F(S_{I-\{j\}})$ ■

Corollaire 1 et 2

Leurs démonstrations ne posent pas de problèmes. En cas de doute ou de difficultés, ne pas hésiter à s'adresser aux auteurs.