# Correction des exercices du TD2

**Rappel :** des aides vous sont fournies sur le site « www4.utc.fr /~mt21/» à la fin des fichiers consacrés aux chapitre de cours. N'hésitez pas à les consulter pour refaire les exercices avant de regarder la correction.
**Nota :** Lorsque la démonstration d'une question a déjà été présentée (typiquement comme dans l'exercice 1, il se peut que le rédacteur fasse quelques raccourcis ; cela ne vous autorise bien sûr pas à en faire dans vos copies.

---

## Exercice A.2.1

Soit une application $f : A \to B$

Q1 : Quelle propriété se traduit par : $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$
Rep : la surjectivité

Q2 : Ecrire la négation de cette propriété :
$\exists y \in B, \forall x \in A, y \neq f(x)$

Q3 : Ecrire à l'aide quantificateurs "$f$ est injective" :
$\forall x \in A, \forall x' \in A, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Q4 : Ecrire à l'aide quantificateurs "$f$ n'est pas injective" :
$\exists x \in A, \exists x' \in A, f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$

---

## Exercice A.2.2

Soient deux applications $f : A \to B$ et $g : B \to C$

Q1 : Montrer que si $f$ et $g$ sont injectives alors $g \circ f$ est injective

Rappel : injectif
$\forall x \in A, \forall x' \in A, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ *ou*
$\forall x \in A, \forall x' \in A, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

On sait :
Hyp : $\forall x \in A, \forall x' \in A, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ (1)
$\forall y \in B, \forall y' \in B, g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$ (2)
Résultat recherché : $\forall x \in A, \forall x' \in A, g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x'$ (3)

Partons du membre de gauche de (3) :
Soient $x \in A$ et $x' \in A$ quelconques, tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$
$\Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(x'))$ (4)
Or, étant donné que l'on calcule $g(f(x))$ et $g(f(x'))$, cela implique que $f(x)$ et $f(x')$ existent, et ils sont des élément de $B$ par définition de l'application $f$. On peut donc les nommer comme des éléments de $B$ (changement de variables) ; on pose :
$y = f(x)$ et $y' = f(x')$
On obtient :
(4) $\Rightarrow x \in A$ et $x' \in A$ quelconques, tels que : $\exists y \in B, \exists y' \in B, y = f(x)$ et $y' = f(x'), g(f(x)) = g(f(x'))$
$\Rightarrow x \in A$ et $x' \in A$ quelconques, tels que : $\exists y \in B, \exists y' \in B, y = f(x)$ et $y' = f(x'), g(y) = g(y')$ (5)
Or la propriété (2) est vraie pour tous le $y$, donc on particulier pour ceux mis en évidence ci-dessus. On peut réécrire :
(5) $\Rightarrow \forall x \in A, \forall x' \in A, \exists y \in B, \exists y' \in B, y = f(x)$ et $y' = f(x'), (g(y) = g(y') \Rightarrow y = y' = f(x) = f(x'))$
On utilise maintenant la proposition (1) pour écrire :
$\forall x \in A, \forall x' \in A, \exists y \in B, \exists y' \in B, y = f(x)$ et $y' = f(x'), (g(y) = g(y')) \Rightarrow (y = y' = f(x) = f(x')) \Rightarrow x = x'$
$\Rightarrow \forall x \in A, \forall x' \in A, \exists y \in B, \exists y' \in B, y = f(x)$ et $y' = f(x'), g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow x = x'$
$\Rightarrow \forall x \in A, \forall x' \in A, g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow x = x'$

On compacte l'expression. L'existence des $y$ n'a pas besoin d'être énoncée ; il ne s'agit que d'une étape nécessaire à l'obtention de la conclusion

Q2 : Montrer que si $f$ et $g$ sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective

Rappel : surjectif
$\forall y \in B , \exists x \in A, y = f(x)$

On sait :

Hyp : $\forall y \in B , \exists x \in A, y = f(x)$ (1)

$\forall z \in C , \exists y \in B, z = g(y)$ (2)

Résultat recherché : $\forall z \in C , \exists x \in A, z = g \circ f(x)$ (3)

Partons de la proposition (2) :

(2) $\Leftrightarrow \forall z \in C , \exists y \in B, z = g(y)$ (4)

Or pour ce $y$ qui apparaît dans (4), on peut affirmer grâce à la propriété (1) qu'il existe un $x$ tel que $y = f(x)$. En effet, c'est vrai pour tous les $y$ de $B$ et donc en particulier pour celui qu'on a montré. On peut donc écrire :

(4) $\Rightarrow \forall z \in C , \exists y \in B$, pour ce $y$ $\exists x \in A$ *et* $y = f(x)$ , $z = g(y)$

$\Rightarrow \forall z \in C , \exists y \in B$, pour ce $y$ $\exists x \in A$ *et* $y = f(x)$ , $z = g(f(x))$

$\Rightarrow \forall z \in C , \exists x \in A , z = g(f(x))$

On compacte l'expression puisqu'au final, l'existence des $y$ n'a pas besoin d'être énoncée ; il ne s'agit que d'une étape nécessaire à l'obtention de la conclusion où il faut exprimer l'existence d'un $x$, ce qui est fait.

Q3 : Montrer que si $f$ et $g$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective

On sait :

Hyp : $\forall y \in B , \exists! x \in A, y = f(x)$ (1)

$\forall z \in C , \exists! y \in B, z = g(y)$ (2)

Résultat recherché : $\forall z \in C , \exists! x \in A, z = g \circ f(x)$ (3)

Partons de la proposition (2) :

(2) $\Leftrightarrow \forall z \in C, \exists! y \in B, z = g(y)$ (4)

Or pour cet unique $y$ qui apparaît dans (4), on peut affirmer grâce à la propriété (1) qu'il existe un unique $x$ tel que $y = f(x)$. En effet, c'est vrai pour tous les $y$ de $B$ et donc en particulier pour celui qu'on a montré. On peut donc écrire :

(4) $\Rightarrow \forall z \in C , \exists! y \in B$, pour ce $y$ $\exists! x \in A$ *et* $y = f(x)$ , $z = g(y)$

$\Rightarrow \forall z \in C , \exists! y \in B$, pour ce $y$ $\exists! x \in A$ *et* $y = f(x)$ , $z = g(f(x))$

$\Rightarrow \forall z \in C , \exists! x \in A , z = g(f(x))$

On compacte l'expression puisqu'au final, l'existence des $y$ n'a pas besoin d'être énoncée ; il ne s'agit que d'une étape nécessaire à l'obtention de la conclusion où il faut exprimer l'existence d'un $x$, ce qui est fait.

Q4

a) Montrer que si $g \circ f$ est injective et $f$ est surjective, alors $g$ est injective

On sait :

Hyp : $\forall x \in A , \forall x' \in A, g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x'$ (1)

$\forall y \in B , \exists x \in A, y = f(x)$ (2)

Résultat recherché : $\forall y \in B , \forall y' \in B, g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$ (3)

Partons du membre de gauche de (3) :

Soient $y \in B$ et $y' \in B$ quelconques, tels que $g(y) = g(y')$

$\Rightarrow y$ et $y' \in B$ quelconques, tels que $\exists x \in A, y = f(x), \exists x' \in A, y' = f(x'), g(y) = g(y')$

$\Rightarrow y$ et $y' \in B$ quelconques, tels que $\exists x \in A, y = f(x), \exists x' \in A, y' = f(x'), g(f(x)) = g(f(x'))$

On utilise la proposition (2) : pour le $y$ et le $y'$ qui apparaissent dans le membre de gauche de (3), on peut trouver un $x$ et un $x'$. (2) nous prouve leur existence ; c'est un peu différent de la question 1 où on donne simplement un nom à $f(x)$.

On réécrit:

$\Rightarrow \forall y \in B , \forall y' \in B, \exists x \in A, y = f(x), \exists x' \in A, y' = f(x'), ( g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow x = x' )$ (4)

On utilise directement la proposition (1).

Or on sait que $f$ est une application, et par définition, un élément de départ ne peut avoir qu'une image dans l'ensemble d'arrivée, ce qu'on peut traduire par :

$\forall x \in A , \forall x' \in A, x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')$ (5)

En appliquant (5) à (4), on peut écrire :

$\forall y \in B , \forall y' \in B, \exists x \in A, y = f(x), \exists x' \in A, y' = f(x'), g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')$

$\Rightarrow \forall y \in B , \forall y' \in B, \exists x \in A, y = f(x), \exists x' \in A, y' = f(x'), g(y) = g(y) \Rightarrow y = y'$

$\Rightarrow \forall y \in B , \forall y' \in B, g(y) = g(y) \Rightarrow y = y'$

On remplace $f(x)$ et $f(x)$ par leurs valeurs

b) on veut $g \circ f$ injective, $g$ non injective, et $f$ non surjective.
Essayez $A = B = C = \mathbb{R}$, et $f(x) = e^x$ ; $g(y) = y^2$

c) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective
On sait :

Hyp : $\forall x \in A$ , $\forall x' \in A$, $g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x'$ (1)

Résultat recherché : $\forall x \in A$ , $\forall x' \in A$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ (2)

Partons du membre de gauche de (2) et déduisons que :

$\forall x \in A$ , $\forall x' \in A$, $f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x'))$ — Car $g$ est une application

$\Rightarrow \forall x \in A$ , $\forall x' \in A$, $f(x) = f(x') \Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x')$

$\Rightarrow \forall x \in A$ , $\forall x' \in A$, $f(x) = f(x') \Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x'$ — On utilise l'hypothèse (1)

$\Rightarrow \forall x \in A$ , $\forall x' \in A$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

<u>Q5</u>

a) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et $g$ est injective, alors $f$ est surjective
On sait :

Hyp : $\forall z \in C$ , $\exists x \in A$, $z = g \circ f(x)$ (1)

$\forall y \in B$ , $\forall y' \in B$, $g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'$ (2)

Résultat recherché : $\forall y \in B$ , $\exists x \in A$, $y = f(x)$ (3)

Soit $y \in B$ quelconque, alors $g(y) \in C$ (évident car $g$ est une application que l'on peut appliquer à tous les $y$ de $B$).
Pour ce $z = g(y)$, on invoque la propriété (1) qui nous donne l'existence d'un $x$ tel que :

$\forall y \in B$ , $\exists x \in A$, $z = g(y) = g(f(x))$

$\Rightarrow \forall y \in B$ , $\exists x \in A$, $z = g(y) = g(f(x)) \Rightarrow y = f(x)$ — On utilise l'hypothèse (2)

$\Rightarrow \forall y \in B$ , $\exists x \in A$, $y = f(x)$ — On compacte puisque la véracité de l'implication nous donne la partie droite de celle-ci vraie.

b) $g \circ f$ est surjective et $g$ est non injective, et $f$ est non surjective
Essayez $A = B = \mathbb{R}$, $C = [0 ; 1]$ et $f(x) = x$ *si* $x \in [-\pi/2 ; \pi/2]$ et $f(x) = 0$ *sinon* ; $g(y) = \cos(y)$

c) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est surjective
On sait :

Hyp : $\forall z \in C$ , $\exists x \in A$, $z = g \circ f(x)$ (1)

Résultat recherché : $\forall z \in C$ , $\exists y \in B$, $z = g(y)$ (2)

Partons de l'hypothèse (1) :

$\forall z \in C$ , $\exists x \in A$, $z = g \circ f(x)$

$\Leftrightarrow \forall z \in C$ , $\exists x \in A$, $z = g(f(x))$

Puisque $g(f(x))$ existe, on est en train d'appliquer $g$ à un élément de $B$ qui s'appelle $f(x)$ et que l'on peut appeler $y$ tel que on pose $y = f(x)$. Par cette opération, on a prouvé l'existence d'un $y$ tel que :

$\forall z \in C$ , $\exists x \in A$, $\exists y \in B$ et $y = f(x)$, $z = g(f(x))$

$\Rightarrow \forall z \in C$ , $\exists x \in A$, $\exists y \in B$ et $y = f(x)$, $z = g(y)$

$\Rightarrow \forall z \in C$ , $\exists y \in B$, $z = g(y)$ CQFD

---

## Exercice A.2.3

Utiliser les résultats des question 4a, 4c, 5a et 5c de l'exercice 2, et prenez en compte le fait qu'une application bijective est à la fois injective et surjective ; appliquez à $g \circ f$ et $h \circ g$

Par exemple, on peut dire en utilisant 4c que sachant que $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective. De même sachant que $h \circ g$ est injective, alors $g$ est injective. De plus $g \circ f$ est surjective et $g$ est injective alors $f$ est surjective (5a).
Et ainsi de suite.

## Exercice A.2.4

$E_1$, $E_2$, et $E_4$ sont des ensembles bornés dans $\mathbb{R}$ : on en déduit immédiatement, d'après les axiomes de la borne inférieure et de la borne supérieure, que ces ensembles admettent une borne Sup et une borne Inf (et par la même, un majorant et un minorant).
$E_1$ : -3 plus petit élément ; 7 borne Sup ;
$E_2$ : -5 plus petit élément ; 5 plus grand élément ;
$E_3$ : $E_3 = ]-\infty ; -3] \cup [3 ; +\infty[$ ; cet ensemble n'est ni majoré, ni minoré ;
$E_4$ : $E_4 = ]-3 ; 3[$ ; -3 borne Inf ; 3 borne Sup

## Exercice A.2.5

Soit l'intervalle $I = [0 ; 1] \subset \mathbb{R}$. Soit l'application $f : I \to I$ vérifiant :

$$x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \leqslant f(x') \quad \text{(croissance de } f\text{)} \qquad (1)$$

Soit l'ensemble $A$ définie par : $A = \{x \in I ; f(x) \leqslant x\}$

Q1 : Montrer que $A \neq \varnothing$

$A$ est non vide car 1 appartient à $A$. En effet, $x = 1$ appartient à $I = [0 ; 1]$, et on sait que l'image de tout $x$ par $f$ se trouve dans $I = [0 ; 1]$ ; et donc $y = f(1) \leqslant 1$, ce qui répond à la définition de $A$.

Q2 : Montrer que $x \in A \Rightarrow f(x) \in A$

Traduisons ce que l'on cherche à montrer : si $x \in A$ ($x \in I$ ; $f(x) \leqslant x$) alors $f(x) \in A$ ($f(x) \in I$ ; $f(f(x)) \leqslant f(x)$ )

si $x \in A \Rightarrow f(x) \leqslant x$ — On rappelle que $x$ et $f(x)$ appartiennent à $I$.

$\Rightarrow f(f(x)) \leqslant f(x)$ — Et donc on utilise l'hypothèse (1)

Or $f(x)$ est un élément de $y$ de $I$ , tel que $f(y) \leqslant y$ , ce qui implique que $f(x) \in A$.

Q3 : Montrer que $A$ admet une borne inférieure $a$ et $a \in I$.

a) $A$ est non vide (voir question 1). Or par hypothèse on a $A \subset I$, et $I$ est borné (car majoré et minoré). On peut immédiatement en déduire que $A$ admet une borne Inf $a$. grâce à l'axiome de la borne Inf
b) $A \subset I$ donc 0 est un minorant de $A$. a étant le plus grand des minorants on a : $a \geqslant 0$. De plus la borne Sup de $A$ (qui existe pour la même raison que la Borne Inf) est plus grande que $a$ mais plus petite que tout majorant de $A$. On a donc $0 \leqslant a \leqslant 1$. Ce qui prouve que $a \in A$.

Q4 : Montrer que $f(a)$ est un minorant de $A$. En déduire que $a \in A$.

Soit $a \in I$ et $x \in A \subset I$ $\quad \Rightarrow a \leqslant x$ (car $a$ est un minorant de $A$ : tous les $x$ de $A$ sont plus grand que $a$)
$\Rightarrow f(a) \leqslant f(x)$ (car les deux éléments appartiennent à $I$ et $f$ croissante)
De plus, étant donné que $x \in A$ , on a : $f(x) \leqslant x$
On combine avec le résultat précédent $f(a) \leqslant f(x)$ , et on obtient : $f(a) \leqslant f(x)) \leqslant x$.
On peut en déduire que $f(a)$ est un minorant de $A$.

De plus, $a$ est la borne inf de $A$, c'est donc le plus grand des minorant ; cela nous donne la relation :

$$f(a) \leqslant a \Rightarrow a \in A \text{ (par définition de l'ensemble } A\text{)}$$

Q5 : En déduire que $f(a) = a$

D'après la question 2, $f(x) \in A$ si $x \in A$. Or $a \in A$ donc $f(a) \in A$. Comme $a$ est borne Inf, on a : $a \leqslant f(a)$
et en même temps : $\qquad f(a) \leqslant a \qquad$ (voir question 4)
On déduit de ces deux relations que $f(a) = a$

Q5 : la propriété est-elle vraie pour une fonction décroissante : NON

Exemple : $\begin{cases} f(x) = 1 & si \quad x \leq 1/2 \\ f(x) = 0 & si \quad x > 1/2 \end{cases}$

## Exercice A.2.6

Soient $A$ et $B$ deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On suppose $A \subset B$. Montrer que :

$\sup A \leqslant \sup B$

$\inf A \geqslant \inf B$

a) Montrons que $\sup A \leqslant \sup B$

$A \subset B$

$\Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Définition de l'inclusion

De plus $\forall y \in B,\ y \leqslant sup\ B$

On a donc :

$A \subset B$

$\Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \leqslant sup\ B)$

Donc *sup B* est un majorant se $A$. Or sup $A$ est <u>le plus petit </u>des majorants de $A$, on a donc la relation

$\sup A \leqslant sup\ B$

b) La démonstration est identique en utilisant des minorants

## Exercice A.2.7

Soit la proposition : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{b} < x \Rightarrow \mathrm{a} \leqslant x$

Montrer que $\mathrm{a} \leqslant \mathrm{b}$

Réécrivons ce que l'on doit démontrer :

$(\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{b} < x \Rightarrow \mathrm{a} \leqslant x) \Rightarrow \mathrm{a} \leqslant \mathrm{b}$ (1)

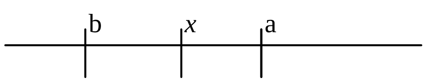
Ecrivons la contraposée de cette proposition :

$(P \Rightarrow Q)$ est équivalent à $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$

$\neg(\mathrm{a} \leqslant \mathrm{b}) \Rightarrow \neg(\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{b} < x \Rightarrow \mathrm{a} \leqslant x)$

$\Leftrightarrow \mathrm{a} > \mathrm{b} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R},\ \mathrm{b} < x$ et $\mathrm{a} > x$ (1)

$\neg(P \Rightarrow Q)$ est équivalent à $(P\ et\ \neg Q)$ .




On voit immédiatement sur la figure ci-dessus qu'il est facile de trouver un $x$ entre b et a, et donc la proposition (2) est toujours vraie. (2) étant la contraposée de (1), alors (1) est toujours vraie.

## Exercice A.2.8

<u>Q1</u>

a) Calculer le module et l'argument de $(1+i)^3$, $(1+i)^4$, et $(1+i)^n$

On peut écrire : $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

On obtient donc :

$$(1+i)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3\left(\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(3\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\left(4\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(4\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$(1+i)^n = 1^n + C_n^1\, 1^{n-1} i^1 + C_n^2\, 1^{n-2} i^2 + \ldots + C_n^k\, 1^{n-k} i^k + \ldots + C_n^{n-1}\, 1^1 i^{n-1} + i^n$$

$$\Leftrightarrow (1+i)^n = 1 + C_n^1\, i^1 + C_n^2\, i^2 + \ldots + C_n^k\, i^k + \ldots + C_n^{n-1}\, i^{n-1} + i^n$$

b) En considérant que l'on peut écrire $i^{2p}=\left(i^2\right)^p=(-1)^p$ et $i^{2p+1}=i^{2p}i = (-1)^p i$
on voit que les termes de puissance paire appartiennent à la partie réelle de $(1+i)^n$ et les termes de puissance impaire à la partie imaginaire.

On a donc : $$\sum_{p=0}^{2p\le n}(-1)^p C_n^{2p}=\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\quad et\quad \sum_{p=}^{2p+1\le n}(-1)^p C_n^{2p+1}i=i\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$

Q2

Pour montrer que
$$2^n=1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots$$
$$0^n=1-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ldots$$
Il suffit d'appliquer le binôme de Newton à $(1+1)^2$ et $(1-1)^2$

Q3

a) Soit $j=\cos\left(2\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)$. On applique le binôme de Newton à $(1+j)^n$
$$(1+j)^n=1+C_n^1\ j^1+C_n^2\ j^2+\ldots+C_n^k\ j^k+\ldots+C_n^{n-1}\ j^{n-1}+j^n \qquad (1)$$
Il faut alors considérer que :
$$j^{3p}=\left(j^3\right)^p=1$$
$$j^{3p+1}=\left(j^3\right)^p j=j$$
$$j^{3p+2}=\left(j^3\right)^p j^2=j^2$$
On rassemble les éléments dans (1) en fonction de la puissance de *j*, on factorise, et les trois facteurs sont :
$$A=1+C_n^3+C_n^6+C_n^9+\ldots$$
$$B=C_n^1+C_n^4+C_n^7+C_n^{10}+\ldots$$
$$C=C_n^2+C_n^5+C_n^8+C_n^{11}+\ldots$$
b) On peut commencer par remarquer que : $A+B+C=2^n \qquad (a)$

De plus on a : $1+j=-j^2$ et $-j^2=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

On a donc $(1+j)^n=\left(-j^2\right)^n=\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) = A+Bj+Cj^2$

En identifiant parties réelles et parties imaginaires, on obtient deux équation de plus :
$$A+B\times\left(-\frac{1}{2}\right)+C\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) \qquad (b)$$
$$B\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+C\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \qquad (c)$$
En faisant $(a)$+2$(b)$, on obtient : $3A=\left(2^n+2\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right)$ soit la première relation demandée.

En faisant $2(b)-\frac{2}{\sqrt{3}}(c)$, on obtient : $2A-2B=2\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$

En remplaçant *A* par sa valeur, on obtient :
$$B=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right)-\left(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{1}{3}2^n+\frac{2}{3}\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}2^n-\frac{1}{3}\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}2^n-\frac{1}{3}\left(2\left(\frac{1}{2}\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)-\frac{3}{2\sqrt{3}}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)$$
$$=\frac{1}{3}2^n-\frac{1}{3}\left(2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)=\frac{1}{3}2^n-\frac{1}{3}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{3}+n\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{1}{3}\left(2^n-2\cos\left((n+1)\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

En appliquant la même méthode de calcul à $2(b)+\frac{2}{\sqrt{3}}(c)$, on obtient la troisième relation demandée.

## Exercice A.2.9

On désigne $P$ le demi-plan complexe supérieur, par $D$ le disque unité et par $U$ le cercle unité. Soit l'application $f$ :

$$F : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C},\ z \longmapsto f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

<u>Q1</u> : Montrer que $f$ est injective

Prenons deux images par $f$ égales :

$$\begin{aligned} f(z_1) = f(z_2) \quad & \Leftrightarrow \frac{z_1 - i}{z_1 + i} = \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \\ & \Leftrightarrow (z_1 - i)(z_2 + i) = (z_1 + i)(z_2 - i) \\ & \Leftrightarrow z_1 z_2 + i\, z_1 - i\, z_2 + 1 = z_1 z_2 - i\, z_1 + i\, z_2 + 1 \\ & \Leftrightarrow 2i\, z_1 = 2i\, z_2 \\ & \Leftrightarrow z_1 = z_2 \end{aligned}$$

<u>Q2</u> : Montrer que $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, on a $f(z) \neq 1$

Supposons que $f(z) = 1$, et montrons que l'on obtient un résultat absurde.

$$\begin{aligned} f(z) = 1 \quad & \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+i} = 1 \\ & \Leftrightarrow z - i = z + i \\ & \Leftrightarrow 2i = 0 \qquad \text{ce qui est impossible} \end{aligned}$$

<u>Q3</u> : Montrer que Im $f = \mathbb{C} \setminus \{1\}$
On veut donc montrer que $f$ est surjective de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Soit $y \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on cherche la valeur de l'antécédent $z$ tel que : $y = f(z)$

$$\begin{aligned} y = f(z) \quad & \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+i} = y \\ & \Leftrightarrow z - i = y\,(z + i) \\ & \Leftrightarrow z\,(1 - y) - i - i\, y = 0 \\ & \Leftrightarrow z = i\,\frac{1+y}{1-y} \end{aligned}$$

On peut donc conclure que tout $y$ admet un antécédent $z$ (valeur ci-dessus), donc $f$ est surjective.

<u>Q4</u> : Montrer que $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, on a $1 - |f(z)|^2 = 4\,\dfrac{\Im m(z)}{|z+i|^2}$

On a : $|f(z)|^2 = f(z) \times \overline{f(z)} = \dfrac{z-i}{z+i} \times \dfrac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i} = \dfrac{|z|^2 + i\,(z - \bar{z}) + 1}{|z|^2 + i\,(\bar{z} - z) + 1}$

Calculons maintenant :

$$\begin{aligned} 1 - |f(z)|^2 & = 1 - \frac{|z|^2 + i\,(z - \bar{z}) + 1}{|z|^2 + i\,(\bar{z} - z) + 1} \\ & = \frac{\left(|z|^2 + i\,(\bar{z} - z) + 1\right) - \left(|z|^2 + i\,(z - \bar{z}) + 1\right)}{|z+i|^2} \\ & = \frac{2i\,(\bar{z} - z)}{|z+i|^2} \\ & = \frac{2i\,(-2i\,\Im m(z))}{|z+i|^2} = \frac{4\,\Im m(z)}{|z+i|^2} \end{aligned}$$

Q5 : On considère $f_1$ la restriction de $f$ à $\mathbb{R}$. Montrer que $f_1$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $U \setminus \{1\}$ et qu'elle est surjective.

On sait que si $z \in \mathbb{R}$, alors $\Im m(z) = 0 \Leftrightarrow |f(z)| = 1 \Rightarrow$ On a donc une application $f_1 : \mathbb{R} \to U$

De plus on sait grâce à Q2 que $f(z) \neq 1$ si $z \neq -i$ (ce qui est le cas dans $\mathbb{R}$) donc on a : $f_1 : \mathbb{R} \to U \setminus \{1\}$

Montrons maintenant que $f_1$ est surjective (utilisation de Q3) : $\forall y \in U \setminus \{1\}, \exists z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ tq $y = f(z)$

Il faut montrer que ce $z$ appartient à $\mathbb{R}$.

On a : $|f(z)| = |y| = 1$ (cela vient de l'ensemble d'arrivé de $f_1$) donc en utilisant Q4, on en déduit que : $\Im m(z) = 0$, et donc que $z \in \mathbb{R}$. Cela revient à écrire : $\forall y \in U \setminus \{1\}, \exists z \in \mathbb{R}$ tq $y = f(z)$, c'est à dire que $f_1$ est surjective.

Q6 : On considère $f_2$ la restriction de $f$ à $P$. Montrer que $f_2$ est une application de $P$ sur $D$ et qu'elle est bijective.

Si $z \in P \Leftrightarrow \Im m(z) > 0 \Leftrightarrow 1 - |f(z)|^2 > 0 \Leftrightarrow f(z) \in D$ ; donc $f_2 : P \to D$

D'autre part : $\forall y \in D, \exists z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ tq $y = f(z)$, mais d'après la Q4 (et les équivalence ci dessus), si $f(z) \in D$ alors on en déduit que $z$ est un élément de $P$, et il existe. On peut donc dire que est surjective de $P$ sur $D$.

Montrons que si $f$ est injective alors $f_2$ l'est aussi, soit par contraposée :

$$\begin{aligned} f_2 \text{ non inj. } &\Rightarrow \exists z_1, z_2 \in P, z_1 \neq z_2, \ f_2(z_1) = f_2(z_2) \\ &\Rightarrow \exists z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}, z_1 \neq z_2, \ f(z_1) = f(z_2) \end{aligned}$$

car si $z_1, z_2 \in P$, alors ce sont des éléments de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

$f_2$ injective et surjective donc bijective.

---

## Exercice A.2.10

Q3 : $(1-i)\,z^2 - (7+i)\,z + 4 + 6\,i = 0$

$\Delta = (7+i)^2 - 4\,(1-i)(4+6i) = 48+14i-16-8i-24 = 8+6i$

on cherche $a$ et $b$ tel que :

$$(a+ib)^2 = 8+6i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ ab = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^4 - 8a^2 - 9 = 0 \\ ab = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 = 9 \\ ab = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 3, b = 1 \\ ou \\ a = -3, b = -1 \end{cases}$$

D'où les racines

$$z_1 = \frac{(7+i)+(3+i)}{2(1-i)} = 2+3i$$

$$z_2 = \frac{(7+i)-(3+i)}{2(1-i)} = 1+i$$

Q5 : $z^7 = 64 - 64i\sqrt{3}$

On a : $z^7 = 128\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) = 128\,e^{-\frac{\pi}{3}+2k\pi} = 2^7\ e^{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}$