Correction des exercices du TD1

Rappel : des aides vous sont fournies sur le site « www4.utc.fr /~mt21/» à la fin des fichiers consacrés aux chapitre de cours. N'hésitez pas à les consulter pour refaire les exercices avant de regarder la correction.
Nota : Lorsque la démonstration d'une question a déjà été présentée (typiquement comme dans l'exercice 1, il se peut que le rédacteur fasse quelques raccourcis ; cela ne vous autorise bien sûr pas à en faire dans vos copies.

Exercice A.2.1

Q1

- Utiliser les quantificateurs ou, si vous ne les avez pas encore vus, raisonnez en français.
- La négation de "une propriété est vraie pour tout élément d'un ensemble" est "il existe au moins un élément de l'ensemble qui ne la vérifie pas".
- La négation de (P et Q) est ($\neg P$ ou $\neg Q$).

Ecrivons déjà la proposition avec des quantificateurs :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant 2 \text{ et } g(x) = 0$$

On commence par écrire ce que l'on cherche, c'est à dire la négation de la proposition :

$$\neg\,(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant 2 \text{ et } g(x) = 0)$$

Pour ne pas se tromper, on peut incorporer des parenthèses dans la proposition, afin de savoir dans quel ordre il faut effectuer les négations :

$$\neg\,(\,(\forall x \in \mathbb{R}),\ (\,(f(x) \leqslant 2) \text{ et } (g(x) = 0)\,)\,)$$

Attention, la notation de la partie quantificateur entre parenthèses est un peu abusive

Puis on effectue effectivement la négation :

$$\neg\,(\forall x \in \mathbb{R}),\ \neg\,(\,(f(x) \leqslant 2) \text{ et } (g(x) = 0)\,)$$

$$\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{R},\ \neg\,(f(x) \leqslant 2) \text{ ou } \neg\,(g(x) = 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\exists\, a \in \mathbb{R},\ f(a) > 2 \text{ ou } g(a) \neq 0}$$

Q2

On écrit la proposition avec l'opération que l'on veut effectuer :

$$\neg\,(\forall n \in \mathbb{Z},\ n \leqslant 0 \text{ ou } n > 0)$$

Ici on va utiliser le fait que la négation de (P ou Q) est ($\neg P$ *et* $\neg Q$).

Puis par un jeu de parenthèses (à vous de jouer), on obtient le résultat :

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{Z},\ n > 0 \text{ et } n \leqslant 0}$$

Q3

On écrit la proposition avec l'opération que l'on veut effectuer :

$$\neg\,(\exists x \in \mathbb{R},\ e^x > 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \leqslant 1}$$

Cette proposition est bien entendue fausse, mais c'est normal pour la négation d'une proposition vraie.

Q4

On écrit la proposition avec l'opération que l'on veut effectuer :

La négation de l'existence unique entraîne la mise en évidence de 2 cas possible : la non existence, ou l'existence multiple.

$$\neg\,(\exists!\, x \in \mathbb{R},\ e^x = 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{(\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \neq 1) \text{ ou } (\exists\, x_1 \in \mathbb{R},\ \exists\, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq x_2,\ e^{x_1} = 1 \text{ et } e^{x_2} = 1)}$$

Q5
On écrit la proposition avec l'opération que l'on veut effectuer :

$$\neg(x \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{x} \text{ existe})$$
$$\Rightarrow \boxed{x \geqslant 0 \; et \; \sqrt{x} \text{ n'existe pas}}$$

Ici, on pense à rappeler que $\neg(P \Rightarrow Q)$ est équivalent à (P *et* $\neg Q$) ; pour se souvenir de cela, il suffit de nier ($\neg P$ *ou* Q) qui est la forme équivalente de l'implication. De plus, pour éviter les erreurs, on retiendra que la négation d'un implication n'est pas une implication.

Q6
On écrit la proposition avec l'opération que l'on veut effectuer :

$$\neg(\, n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow n^3 - n \text{ est multiple de 3})$$
$$\Rightarrow \boxed{n \in \mathbb{N}^+ \; et \; n^3 - n \text{ n'est pas multiple de 3}}$$

Mêmes remarques que précédemment.

Exercice A.2.2

Soit E un ensemble, et $P(x)$ une propriété satisfaite ou non par les éléments de E. Trouver l'unique ensemble A tel que

$(\forall x \in A, P(x)) \Rightarrow (\exists x \in A, P(x))$ est fausse.

Réécrire l'énoncé ne fait jamais de mal.

Pour répondre à la question, commençons par réécrire la proposition :

$\neg(\forall x \in A, P(x))$ *ou* $(\exists x \in A, P(x))$

$\Leftrightarrow (\exists a \in A, \neg P(a))$ *ou* $(\exists x \in A, P(x))$ (1)

($P \Rightarrow Q$) est équivalent à ($\neg P$ *ou* Q)

Pour que la proposition ci-dessus soit fausse, il faut que les deux termes qui entourent le *ou* soit faux simultanément. Or ici, on voit apparaître une complémentarité de propositions (dans l'hypothèse, on indique de $P(x)$ est soit vraie soit fausse sur E) qui va nous permettre de faire un petit raisonnement par l'absurde ; encore faut-il sentir que la véracité des deux termes du *ou* est fortement liée à l'existence d'éléments de E.
Supposons que A est non vide, donc qu'il existe au moins un élément a dans A, et que (1) soit fausse (donc les deux termes de (1) faux). Pour cet élément de A, l'énoncé nous dit que $P(x)$ est satisfaite ou non, donc que a (qui existe par hypothèse est tel que

soit $(\exists a \in A, \neg P(a))$,

soit $(\exists a \in A, P(a))$ (ce qui est complètement équivalent à $(\exists x \in A, P(x))$ car x est une variable muette).

Ceci est directement en contradiction avec le fait que (1) est fausse, ce qui nous montre que l'hypothèse d'existence d'un a est fausse ; et donc $\boxed{A = \varnothing}$.

Exercice A.2.3

Soient E et F, deux ensembles, soit f une application $E \to F$, $f : x \mapsto f(x)$. Soit la proposition :

$\forall x \in E, \; \forall y \in E, (x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y))$ (1)

Q1 : négation de (1)
On écrit la proposition avec l'opération que l'on veut effectuer :

$\neg(1) \Leftrightarrow \neg(\forall x \in E, \; \forall y \in E, (x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y)))$

Soit en transformant (utilisation des même astuces que l'exercice A.2.1) :

$\boxed{\exists x \in E, \; \exists y \in E, (x \neq y) \; et \; (f(x) = f(y))}$

($P \Rightarrow Q$) est équivalent à ($\neg P$ *ou* Q) et on effectue la négation de (P' *ou* Q) c'est à dire ($\neg P'$ *et* $\neg Q$).

Q2 : contraposée de (1)
La contraposée est une forme équivalente de l'implication :

$\boxed{\forall x \in E, \; \forall y \in E, (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)}$ (2)

($P \Rightarrow Q$) est équivalent à ($\neg Q \Rightarrow \neg P$).
Etant donné qu'il s'agit d'une forme équivalente, elle doit s'exprimer pour les mêmes quantificateurs.

Q3 : négation de la contraposée de (1)
On écrit la proposition avec l'opération que l'on veut effectuer :

$\neg(2) \Leftrightarrow \neg(\forall x \in E, \; \forall y \in E, (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y))$

Soit en transformant (utilisation des même astuces que l'exercice A.2.1) :

$\boxed{\exists x \in E, \; \exists y \in E, (f(x) = f(y)) \; et \; (x \neq y)}$

Q4 : Comparaison des résultats des questions 1 et 3

La contraposée est équivalente à l'implication de départ. Il est donc normal de retrouver le même résultat en Q1 et Q3, car la négation d'une proposition *P* équivalente à une autre proposition *Q*, est équivalente à la négation de *Q*.

Exercice A.2.4

Vérifier l'exactitude des proposition suivantes formées de 2 propositions *P* et *Q*.

Penser à modifier les expressions pour se simplifier la vie

Q1

Soit : $Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ (1)

$\Leftrightarrow Q \Rightarrow (\neg P \text{ ou } Q)$

$\Leftrightarrow \neg Q \text{ ou } (\neg P \text{ ou } Q)$

$\Leftrightarrow (\neg Q \text{ ou } Q) \text{ ou } \neg P$

$(P \Rightarrow Q)$ est équivalent à $(\neg P \text{ ou } Q)$

Utilisation de la commutativité et de l'associativité du *ou*

Or $(\neg Q \text{ ou } Q)$ est toujours vraie et (vraie *ou* ?) est toujours vraie. Donc (1) est toujours vraie.

Q2

Soit : $P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ (2)

$\Leftrightarrow P \Rightarrow (\neg P \text{ ou } Q)$

$\Leftrightarrow \neg P \text{ ou } (\neg P \text{ ou } Q)$

$\Leftrightarrow (\neg p \text{ ou } \neg P) \text{ ou } Q$

$\Leftrightarrow P \Rightarrow Q$

Utilisation de la l'associativité du *ou*

car (*R ou R*) est équivalent à *R*

qui est vrai si *P* fausse ou si *P* vrai et *Q* vrai.

Q3

Soit : $P \Rightarrow (P \text{ ou } Q)$ (3)

$\Leftrightarrow \neg P \text{ ou } (P \text{ ou } Q)$

$\Leftrightarrow \neg P \text{ ou } (P \text{ ou } Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \text{ ou } P) \text{ ou } Q$

$\Leftrightarrow$ toujours vrai (voir Q1)

Q4

Soit : $P \Rightarrow (P \text{ et } Q)$ (4)

$\Leftrightarrow \neg P \text{ ou } (P \text{ et } Q)$

Ici le plus simple est de faire une table de vérité pour trouver la solution.
(on rappelle que l'on note vrai = 1 et faux =0)

		P	
Q	*et*	V	F
	V	1	0
	F	0	0

		P et Q	
$\neg P$	*ou*	V	F
	V	1	1
	F	1	0

Solution fausse par exemple

On voit que (4) est fausse quand *Q* est fausse.

On peut aussi écrire :

$\neg P \text{ ou } (P \text{ et } Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \text{ ou } P) \text{ et } (\neg P \text{ ou } Q)$

$\Leftrightarrow$ V et $(\neg P \text{ ou } Q)$

$\Leftrightarrow \neg P \text{ ou } Q$

Q5

Soit : $Q \Rightarrow (P \text{ ou } Q)$ (5)

$\Leftrightarrow \neg Q \text{ ou } (P \text{ ou } Q)$

$\Leftrightarrow (\neg Q \text{ ou } Q) \text{ ou } P$

$\Leftrightarrow$ Toujours vraie (voir Q1)

Utilisation de la commutativité et de l'associativité du *ou*

Q6

Soit : $P \text{ et } Q \Rightarrow Q$ (6)

$\Leftrightarrow \neg (P \text{ et } Q) \text{ ou } Q$

$\Leftrightarrow (\neg P \text{ ou } \neg Q) \text{ ou } Q$

$\Leftrightarrow \neg P \text{ ou } (\neg Q \text{ ou } Q)$

$\Leftrightarrow$ Toujours vrai (voir Q1)

$(P \Rightarrow Q)$ est équivalent à $(\neg P \text{ ou } Q)$

Utilisation de la l'associativité du *ou*

Exercice A.2.5

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $P(n)$: n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair (1)

Q1 : Utilisation de la contraposée de $P(n)$ pour montrer que (1) est vraie

contraposée de (1) $\Leftrightarrow$ n est impair $\Rightarrow$ n^2 est impair

soit n impair, on peut l'écrire $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$

On peut ainsi calculer le carré de n :

$$n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1 = 2k + 1 \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

n^2 s'écrit comme un nombre impair (c'en est donc un) CQFD

Q2 : raisonnement par l'absurde

Supposons que n^2 est pair, et que la conclusion est fausse, c'est à dire que n est impair.

Si n est impair, on a :

$$n^2 - n = 4p^2 + 4p + 1 - 2p - 1 = 4p^2 + 2p = 2(2p^2 + p)$$

c'est à dire un nombre pair. Or si on fait la différence d'un nombre pair avec un nombre impair (n^2 et n par exemple), on obtient un nombre impair (cela se démontre : à vous de jouer). On arrive à la conclusion que $(n^2 - n)$ est à la fois pair et impair, ce qui est absurde. On en déduit donc que l'hypothèse « n est impair » est fausse, et donc que n est pair.

Exercice A.2.6

Soit E un ensemble, et A et B deux sous ensembles de E.

Q1 : Montrer que $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ (1)

Pour montrer l'équivalence, on va montrer la double implication :

$A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$ (2)

$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ (3)

a) Démontrons (2)

Hyp : $A \cap B = A$

Or on peut ajouter que :

$(A \cap B) \subset B$ (4)

(Cela peut se démontrer, mais on peut le considérer comme acquis tellement cela dépend de la définition de l'inclusion).

En remplaçant dans (4) la valeur de $A \cap B$ donnée par Hyp, on obtient :

$A \subset B$

On a bien montré que en ayant $A \cap B = A$, cela implique $A \subset B$

b) Démontrons (3)

Hyp : $A \subset B$

On veut trouver une égalité d'ensemble. On va donc travailler par double inclusion, c'est à dire :

On rappelle que A = B est équivalent à $(A \subset B)$ et $(B \subset A)$

$(A \cap B) \subset A$ (5)

$A \subset (A \cap B)$ (6)

b1) Démontrer (5) est immédiate car c'est une relation du même type que (4) que l'on considère admise car triviale.

b2) Si $A \subset B$

$\Leftrightarrow x \in A \Rightarrow (x \in A)$ *et* $(x \in B)$

Or $((x \in A)$ *et* $(x \in B))$ est la définition de $x \in A \cap B$. donc si :

$x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$

$\Leftrightarrow A \subset (A \cap B)$ CQFD car relation (6)

Q2 : Montrer que $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

Etant donné la pauvreté de Word en ce qui concerne la typographie mathématique, on note ici : complémentaire de A = $\complement A$

On va utiliser les complémentaires pour répondre à la question. On a :

$A \cup B = A$

$\Leftrightarrow \complement(A \cup B) = \complement A$

$\Leftrightarrow \complement A \cap \complement B = \complement A$

Or, si on utilise la relation (1) démontrée dans Q1, on peut écrire :

$\complement A \cap \complement B = \complement A \Leftrightarrow \complement A \subset \complement B$

$\Leftrightarrow B \subset A$ (voir le cours sur les complémentaires) CQFD

Exercice A.2.7

Soient A, B, C, trois sous-ensembles de E. On rappelle que $A \backslash B = \{x \in A \,;\, x \notin B\}$.

Q1 : Montrer que $(A \cap C) \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cap C$

Partons du membre de gauche de l'égalité :

$x \in (A \cap C) \backslash (B \cap C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ et } \neg(x \in B \text{ et } x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \notin C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in C \text{ et } x \notin B) \text{ ou } \boxed{(x \in A \text{ et } x \in C \text{ et } x \notin C)}$ (1)

Distributivité du *et* par rapport au *ou*

Toujours faux car x ne peut pas à la fois être dans C et ne pas être dans C

Etant donné que le deuxième terme du *ou* est faux on a :

N'oublions pas que (P *ou Faux*) est équivalent à P

(1) $\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in C \text{ et } x \notin B$

$\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ et } x \in C$

$\Leftrightarrow (A \backslash B) \cap C$ CQFD

Q2

On pose : $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ (2)

Montrer que : $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C)\, \Delta\, (B \cap C)$

On part de la partie gauche de l'égalité, et on remplace Δ par sa valeur :

$(A \Delta B) \cap C = (\, (A \backslash B) \cup (B \backslash A)\,) \cap C$

$\Leftrightarrow (A \Delta B) \cap C = (\, (A \backslash B) \cap C\,) \cup (\, (B \backslash A) \cap C\,)$ Distributivité du $\cap$ par rapport au $\cup$

$\Leftrightarrow (A \Delta B) \cap C = (\, (A \cap C) \backslash (B \cap C)\,) \cup (\, (B \cap C) \backslash (A \cap C)\,)$ On utilise le résultat de la question 1

$\Leftrightarrow (A \Delta B) \cap C = (A \cap C)\, \Delta\, (B \cap C)$ On utilise le (2)

Exercice A.2.8

Q1 : Récurrence

Montrer que $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$ est vrai

On commence par montrer que la relation est vraie pour un rang donné. On voit aisément que $P(0)$ est vrai (1>0) et $P(1)$ vraie (2>1).

Il faut maintenant montrer que si $P(n)$ vraie au rang n, alors on a $P(n+1)$ vraie. On a :

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n$$
$$\Rightarrow 2^{n+1} > 2 \times n$$
$$\Rightarrow 2^{n+1} > n + 1 \quad \text{car } 2\,n \geqslant n + 1 \text{ dès que } n \geqslant 1$$
$$\Leftrightarrow P(n+1) \text{ vraie}$$

On utilise le fait que $P(n)$ vraie au rang n, c'est à dire que $2^n > n$
si $n \geqslant 1 \Rightarrow n + n \geqslant 1 + n$

On a montré que $P(n)$ vraie au rang 0 et au rang 1, et que $P(n)$ vraie au rang n+1 si $P(n)$ vraie au rang n et que $n \geqslant 1$, alors, on peut affirmer que $P(n)$ vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Q2 : Récurrence

Montrer que $P(n)$: $\forall n \geqslant p$, $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$, $2^n > n^2$ est vrai.

Ici, on ne connaît pas le rang où on doit commencer la récurrence. Il faut donc le trouver (intuition ?). Allons-y à tâtons. Est-ce vrai pour le rang 1 : oui mais restons méfiant ; (il se peut qu'apparaissent des contraintes dans le reste de la démo)

Est-ce vrai pour le rang 2 : non ($2^2 > 2^2$?)

Est-ce vrai pour le rang 3 : non ($2^3 > 3^2$?)

Est-ce vrai pour le rang 4 : non ($2^4 > 4^2$?)

Est-ce vrai pour le rang 5 : oui ($2^5 > 5^2$?)

Il faut maintenant montrer que si $P(n)$ vraie au rang n, alors on a $P(n+1)$ vraie. On a :

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n$$
$$\Rightarrow 2^{n+1} > 2 \times n^2$$

On utilise le fait que $P(n)$ vraie au rang n, c'est à dire que $2^n > n^2$

Il faut maintenant comparer $2\,n^2$ avec $(n + 1)^2$, ce qui revient à étudier le signe d'un trinôme : $2\,n^2 > n^2 + 2\,n + 1$? (1)

$$2\,x^2 > x^2 + 2\,x + 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2\,x - 1 > 0$$

Le coefficient du terme n^2 étant positif, cela est vrai à l'extérieur des racines du polynôme. On a :

$$\Delta' = 1^2 - 1 \times (-1) = 2$$
$$\Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{2}\ ;\ x_2 = 1 - \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow n \geqslant 3 \quad \text{pour que (1) soit vrai}$$

Ce dernier résultat explique pourquoi il fallait être prudent avec $P(1)$ vraie (1<3).

On a montré que $P(n)$ vraie au rang 5, et que $P(n)$ vraie au rang n+1 si $P(n)$ vraie au rang n et que $n \geqslant 5$ (en fait 3, mais comme seul $P(5)$ est vraie …), alors, on peut affirmer que $P(n)$ vraie $\forall n \geqslant 5$.

Exercice A.2.9

Q1 : négation de proposition

On ne s'éternisera pas sur l'obtention des solutions : voir exercice 1

a) $\neg(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, \neg P(x)$
b) $\neg(\exists x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E, \neg P(x)$
c) $\neg(\exists! x \in E, P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \neg P(x))$ *ou* $(\exists x \in E, \exists y \in E, x \neq y$ *et* $P(x)$ *et* $P(y))$

Q2 : négation de proposition, avec f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

a) $\neg(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 2) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 2$
b) $\neg(\forall x \geqslant 2, f(x) \geqslant 2) \Leftrightarrow \exists x \geqslant 2, f(x) < 2$
c) $\neg(\forall x \leqslant 2, f(x) \leqslant 2) \Leftrightarrow \exists x \leqslant 2, f(x) > 2$
d) $\neg(\exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = 2) \Leftrightarrow (\forall x \in E, f(x) \neq 2)$ *ou* $(\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \neq y$ *et* $f(x) = f(y) = 2)$

Les liens logiques sont : a) $\Rightarrow$ b)

Exercice A.2.10

On cherche à déterminer la véracité des proposition suivantes :

<u>Q1</u> : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$
Pour montrer l'existence d'un élément, il suffit de l'exhiber. Si on pose $y = -x$ (qui peut s'écrire pour tout x), on obtient le résultat voulu : donc la proposition est vraie.

<u>Q2</u> : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 0$
Il n'existe pas de réel, tel que en y ajoutant n'importe quel réel, on obtienne 0. Si cela ne vous parait pas logique, on peut aussi montrer que la négation de cette proposition est toujours vraie ($\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x + y \neq 0$; ce qui est simple car il suffit de trouver x qui répond à la question), ce qui montre que la proposition est toujours fausse.

<u>Q3</u> : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x\, y = 1$
Cette proposition est fausse car il existe un x pour lequel elle est fausse (on demande $\forall x \in \mathbb{R}$) ; il s'agit de $x = 0$ pour lequel on ne sait pas calculer $1/x$.

<u>Q4</u> : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x\, y = 1$
Effectuons la négation de cette proposition :

$$\neg(\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x\, y = 1\ ) \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x\, y \neq 1$$

Cette proposition est toujours vrai ; il suffit de prendre $x = 2 / y$ si $y \neq 0$ et $x = 1$ si $y = 0$.
Cela prouve que la proposition de départ est toujours fausse (puisque sa négation est toujours vraie).

<u>Q5</u> : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = x$
Il suffit de choisir $y = 0$ et on a trouvé notre y.

Exercice A.2.11

<u>Q1</u>

a) Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriétés des éléments de $\mathbb{R}$.

i. $\forall x \in \mathbb{R}, (P(x)$ ***ou*** $Q(x)\ )$

ii. $(\forall x \in \mathbb{R}, P(x)\ )$ ***ou*** $(\forall x \in \mathbb{R}, Q(x)\ )$

Qui implique qui ?
En fait, c'est la proposition (ii) qui implique la proposition (i). Pour cela, il faut visualiser que si (ii) est vrai, soit tous les réel vérifie P, soit tous les réel vérifie Q (il peut aussi y en avoir qui vérifie à la fois P et Q), et donc, on est sur qu'un réel quelconque vérifie soit P soit Q. On peut aussi écrire :

$(\forall x \in \mathbb{R}, P(x)\ )$ ***ou*** $(\forall x \in \mathbb{R}, Q(x)\ )$
$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ ***ou*** $Q(x)\ )$ ***ou*** $(\forall x \in \mathbb{R}, Q(x)$ ***ou*** $P(x)\ )$
$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ ***ou*** $Q(x)\ )$

> si La première proposition est vrai, par exemple, on peut lui faire un « *ou* » avec n'importe quoi ; idem pour Q

b) $P(x) : x \geqslant 0$
$Q(x) : x \leqslant 1999$

On voit que i est vrai et que (ii) est fausse ; donc c'est un exemple qui montre que (i) n'implique pas (ii).

<u>Q2</u>

a) Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriétés des éléments de $\mathbb{R}$.

i. $\exists x \in \mathbb{R}, (P(x)$ ***et*** $Q(x)\ )$

ii. $(\exists a \in \mathbb{R}, P(a)\ )$ ***et*** $(\exists b \in \mathbb{R}, Q(b)\ )$

Qui implique qui ?
On a i $\Rightarrow$ ii. En effet, si i est vrai, alors il existe un réel x pour lequel $P(x)$ ***et*** $Q(x)$ sont vraies en même temps, et en posant $a = b = x$, ii est vraie.

b) Prenons par exemple :

$P(x) : x > 0$

$Q(x) : x < 0$

i est fausse et ii est vraie. c'est un exemple qui montre que ii n'implique pas i.

c) Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriétés des éléments de $\mathbb{R}$.

i. $\exists x \in \mathbb{R}, (P(x)$ ***et*** $Q(x)$)

ii. $(\exists x \in \mathbb{R}, P(x)$) ***et*** $(\exists x \in \mathbb{R}, Q(x)$)

sont-elles équivalentes ?

NON car $(\exists x \in \mathbb{R}, P(x))$ est identique à $(\exists a \in \mathbb{R}, P(a))$ car x est une variable muette ; on a donc les mêmes propositions que dans a).

Q3

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriétés des éléments de $\mathbb{R}$.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, (P(x)$ ***et*** $Q(x)$)

(b) $(\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$) ***et*** $(\forall x \in \mathbb{R}, Q(x)$)

sont-elles équivalentes ?

On travaille par double implication.

1) (a) $\Rightarrow$ (b)

$\forall x \in \mathbb{R}, (P(x)$ ***et*** $Q(x)$)

$\Rightarrow \forall x_1 \in \mathbb{R}, (P(x)$ ***et*** $Q(x)$) et $\forall x_2 \in \mathbb{R}, (P(x)$ ***et*** $Q(x)$)

si une proposition est vraie, on peut l'associer à une autre proposition vraie par un *et* et cela reste vrai.

$\Rightarrow \forall x_1 \in \mathbb{R}, P(x)$ ***et*** $\forall x_1 \in \mathbb{R}, Q(x)$ *et* $\forall x_2 \in \mathbb{R}, P(x)$ ***et*** $\forall x_2 \in \mathbb{R}, Q(x)$

si on supprime des éléments d'un *et* vrai, ce qui reste est vrai

$\Rightarrow \forall x_1 \in \mathbb{R}, P(x)$ ***et*** $\forall x_2 \in \mathbb{R}, Q(x)$

$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$) ***et*** $(\forall x \in \mathbb{R}, Q(x)$)

2) (b) $\Rightarrow$ (a)

soit x_1 quelconque et x_2 quelconque

$\Rightarrow$ pour x_1, $P(x)$ et pour x_2, $Q(x)$ (d'après l'hypothèse (b))

Posons $x_1 = x_2$ alors :

pour x_1, $P(x)$ et pour x_1, $Q(x)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (P(x)$ ***et*** $Q(x)$)

<u>Q4</u>

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriétés des éléments de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$\forall x \in \mathbb{R}, (P(x)$ ***ou*** $Q(x)$) $\Rightarrow$ $(\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$) ***ou*** $(\exists x \in \mathbb{R}, Q(x)$)

Notons A l'ensemble des x tels que $P(x)$ est vraie.

Notons B l'ensemble des x tels que $Q(x)$ est vraie. Alors B est au moins égal au complémentaire de A dans $\mathbb{R}$ union une partie de A (la partie gauche de l'implication nous dit que quelque soit x on va avoir soit $P(x)$ vraie soit $Q(x)$ vraie, mais il n'y a pas de « trou » ; par contre, on peut avoir $P(x)$ et $Q(x)$ pour le même x, d'où l'union qui apparaît dans B).

Donc, si $\forall x \in \mathbb{R}, (P(x)$ ***ou*** $Q(x)$) ***vraie***

$\Rightarrow \forall x \in A, P(x)$ ***vraie***

$\Rightarrow \forall x \in A, P(x)$ *ou* $\exists x \in \mathbb{R}, Q(x)$ ***vraie***

A quelque chose de vrai, on peut ajouter ce qu'on veut par un *ou*, cela reste vrai.

De plus, si $x \notin A$, $P(x)$ ***faux,*** mais alors $x \in B$ et donc $Q(x)$ ***vraie,*** ce que l'on peut écrire : $\exists x \in \mathbb{R}, Q(x)$ ***vraie***. A cette valeur vraie, on peut ajouter ce qu'on veut par un *ou*. On a donc :

si $x \notin A$, $\exists x \in \mathbb{R}, Q(x)$ *ou* $(\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$) ***vraie***

Ayant balayé l'appartenance de x à A et l'appartenance de x au complémentaire de A, avec comme hypothèse $\forall x \in \mathbb{R}$, $(P(x)$ ***ou*** $Q(x)$), on a balayé tout $\mathbb{R}$. Dans les deux cas, on trouve la même conclusion $\exists x \in \mathbb{R}, Q(x)$ *ou* $(\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$)

Donc on peut en déduire :

$\forall x \in \mathbb{R}, (P(x)$ ***ou*** $Q(x)$) $\Rightarrow$ $(\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$) ***ou*** $(\exists x \in \mathbb{R}, Q(x)$)