Correction des exercices du TD 3

Rappel : des aides vous sont fournies sur le site « www4.utc.fr /~mt21/» à la fin des fichiers consacrés aux chapitre de cours. N'hésitez pas à les consulter pour refaire les exercices avant de regarder la correction.
Nota : Lorsque la démonstration d'une question a déjà été présentée (typiquement comme dans l'exercice 1, il se peut que le rédacteur fasse quelques raccourcis ; cela ne vous autorise bien sûr pas à en faire dans vos copies.

Exercice A.2.1

i) $u_n = \dfrac{\cos(n.\pi)}{n}$, $n \in \mathbb{N}^{\times}$

on peut borner par $\dfrac{1}{n}$ et $-\dfrac{1}{n}$ car cos() est toujours compris entre –1 et 1 ; on sait que $\dfrac{1}{n}$ converge vers 0. $u_n \to 0$

ii) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$
Multiplions par $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$:
$u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) / (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = ((n+1) - n) / (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 / (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$
$u_n \to 0$

iii) $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$, $n \in \mathbb{N}$
$n+1 > n \Rightarrow \ln(n+1) > \ln(n) \Rightarrow \ln(n+1) - l(n) > 0 \Rightarrow$ suite toujours positive.
On a : $n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \Rightarrow (n+2) < (n+1)^2 \Rightarrow \dfrac{n+2}{n+1} < \dfrac{n+1}{n} \Rightarrow \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) < \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ $u_{n+1} - u_n < 0$
donc la suite est décroissante et bornée inférieurement, donc elle converge.
La limite se trouve en écrivant : $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

iv) $u_n = \dfrac{a^n + b^n}{a^n - b^n} = \dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n + 1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n - 1}$ $0 \leqslant a \leqslant b$

(on a divisé par b^n) ; on utilise alors les résultats sur la convergence de K^n, la somme et le quotient de suites convergentes. $u_n \to -1$

v) $u_n = \sum_{k=0}^{n} k$, $n \in \mathbb{N}$
Faire la somme de u_n avec u_n .
cette somme est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$;
La suite diverge.

vi) $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{5^k}$, $n \in \mathbb{N}$

Il s'agit d'une série géométrique de raison r = -1/5 ; on a donc le résultat suivant : $S_n = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} = \dfrac{1-\left(\dfrac{-1}{5}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{5}}$

$u_n \rightarrow \dfrac{5}{6}$

vii) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}$

on a immédiatement $u_n \geqslant 0$

$u_n = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{2}{n} \times \ldots \times \dfrac{n}{n} \Rightarrow u_n < \dfrac{1}{n}$ car $\dfrac{2}{n} \times \ldots \times \dfrac{n}{n} \leq 1$

La suite est bornée inférieurement par 0 et supérieurement par une suite décroissante vers 0, elle converge vers 0.

viii) $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$

on a immédiatement $u_n \geqslant 0$

$u_n = \dfrac{2}{1} \times \dfrac{2}{2} \times \ldots \times \dfrac{2}{n} \Rightarrow u_n = \dfrac{2}{2} \times \ldots \times \dfrac{4}{n} \Rightarrow u_n < \dfrac{4}{n}$ car $\dfrac{2}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \ldots \times \dfrac{2}{n-1} \leq 1$

La suite est bornée inférieurement par 0 et supérieurement par une suite décroissante vers 0, elle converge vers 0.

ix) $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$

Cette suite converge vers 0 car c'est le produit des deux précédentes.

Exercice A.2.2

Q1

$u_2 = 1/2$; $u_3 = 0$; $u_4 = 3/4$; $u_5 = 2/3$;

Q2 : Borne supérieure

La borne supérieure s est le plus petit des majorants, ce qu'on peut traduire par :

$\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $u_n \leq s$, $\forall$ c $\in \mathbb{R}$, c < s, $\exists$ u_n tel que $c \leq u_n \leq s$

Si on n'arrive pas à trouver un u_n immédiatement, on peut raisonner à l'envers en utilisant des équivalences.

On veut (prenons n pair n = 2p p $\neq$ 0) :

$c \leq u_{2p} \Leftrightarrow c \leq 1 - \dfrac{1}{2p} \Leftrightarrow c - 1 \leq -\dfrac{1}{2p} \Leftrightarrow 1 - c \geq \dfrac{1}{2p} \Leftrightarrow p \geq \dfrac{1}{2(1-c)}$

On peut donc maintenant écrire :

Soit un c quelconque, si on prend $p \geq \dfrac{1}{2(1-c)}$ alors on a un $u_n = u_{2p}$ tel que $c \leq u_{2p}$, qui est ce qu'on veut démontrer.

Q3 : Limite de la suite

On voit que la limite de la suite a de forte chance d'être 1. On va le démontrer rigoureusement. On va pour ce faire montrer que la sous-suite composée par n pair à la même limite que la sous-suite composée par n impair.

D'une façon générale, la limite l existe si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$

> Si vous n'y arrivez pas directement, raisonnez à l'envers ; c'est valable tant que vous passez d'une étape à l'autre par équivalence.

n pair :

Cherchons une valeur de N avec n $\geqslant$ N tel que $n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$

soit $\varepsilon > 0$; on pose $N = E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$; on a donc : $N \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ et par la même : $n \geqslant N \Rightarrow n \geqslant N \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \dfrac{1}{n} \leq \varepsilon$

Calculons maintenant : $|u_n - l| = \left|1-\frac{1}{n}-1\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$ et par hypothèse $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ dès que n $\geqslant$ N (On a donc trouvé un N qui dépend de ε et qui répond à la question).

n impair : soit ε > 0 ; on pose N = $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+3$; on a donc : N $\geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ +2 et alors n $\geqslant$ N $\Rightarrow \frac{1}{n-2} \leqslant \varepsilon$

Calculons : $|u_n - l| = \left|1-\frac{1}{n-2}-1\right| = \left|-\frac{1}{n-2}\right| = \frac{1}{n-2}$ et par hypothèse $\frac{1}{n-2} \leq \varepsilon$ dès que n $\geqslant$ N (On a donc trouvé un N qui répond à la question).

Les deux sous-suites convergent vers la même limite l = 1 ; Il suffit de choisir pour un p donné (tel que n = 2p ou n = 2p+1) le maximum de la valeur de N obtenue dans le cas pair et dans le cas impair pour écrire la propriété qui montre que la suite complète converge vers 1.

<u>Q4</u>

Pour vérifier si la suite est croissante, il faut vérifier que $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n. Dans notre cas il faut le vérifier pour un nombre pair et l'impair suivant (qui joue le rôle de n+1), et si ça marche, pour un impair et le pair suivant (qui joue le rôle de n+1). Prenons 2p et 2p+1 (p ≠ 0) comme indice et comparons les deux termes de la suite :

2p > 2p –1 $\Leftrightarrow \frac{1}{2p} \leq \frac{1}{2p-1} \Leftrightarrow -\frac{1}{2p} \geq -\frac{1}{2p-1} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2p} \geq 1-\frac{1}{2p-1} \Leftrightarrow u_{2p} \geq u_{2p+1}$

On n'a donc pas ici $u_{n+1} \geq u_n$, la suite n'est donc pas croissante (et on n'a pas besoin de vérifier pour la succession impair et pair suivant).

Exercice A.2.3

Soit la suite : $u_0 > 1$, $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1}$, n ∈ $\mathbb{N}$

a) Montrer que u_n est définie pour tout n.
On procède par récurrence : on a P(0) qui est vraie ($u_0 > 1$).

Vérifions que si P(n) est vraie, alors P(n+1) est vraie.
P(n) : $u_n > 1 \Rightarrow u_n - 1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{u_n - 1}$ existe et $\sqrt{u_n - 1} \geq 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{u_n - 1} \geq 1 \Rightarrow$ P(n+1) vraie
On a P(0) vraie, et P(n+1) vraie si P(n) vraie. Donc P(n) est vraie (donc u_n définie) pour tout n ∈ $\mathbb{N}$.

b) Soit $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$, x ∈ $[1;+\infty[$
Etudions cette fonction. On a sa dérivée égale à :
x ∈ $]1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$; donc $f(x)$ est strictement croissante sur tout l'ensemble de définition.

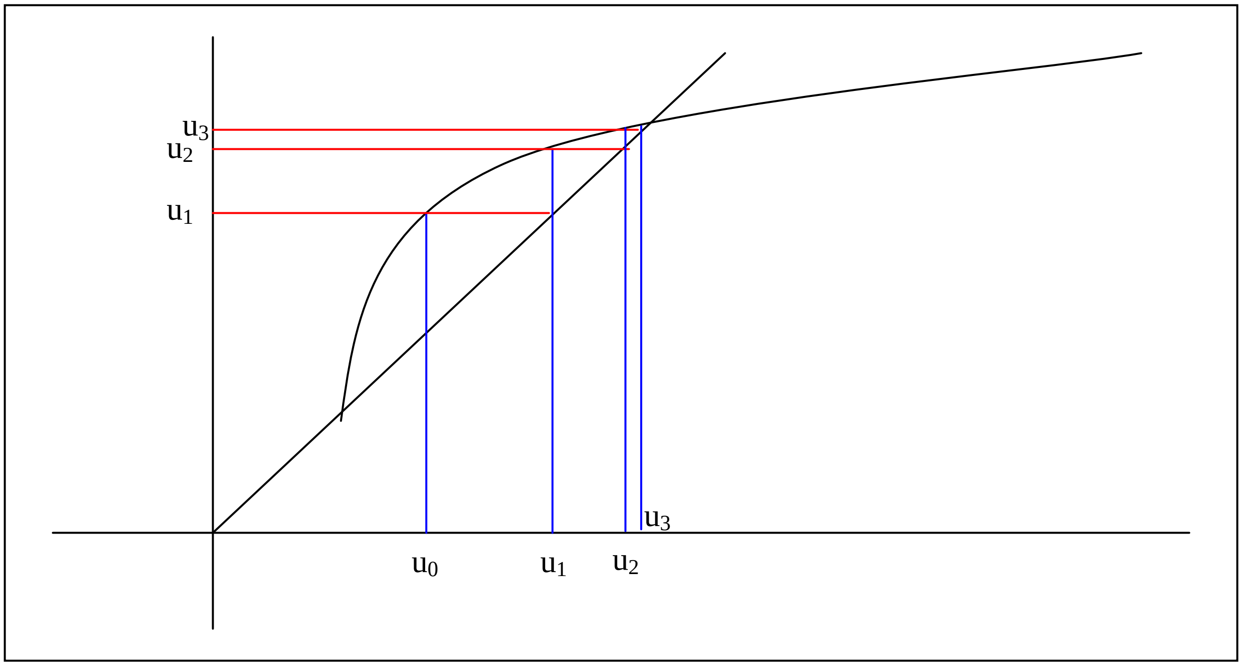
Etudions le signe de $f(x) - x$.
$f(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x-1} - x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq x - 1 \Leftrightarrow x - 1 \geq (x-1)^2$ et $(x \geq 1) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0$
Or le polynôme du second degré $x^2 - 3x + 2$ est négatif dans l'intervalle compris entre ses deux racines. Celles-ci sont données par : Δ = 9 – 8 = 1 ; $x_1 = (3 + \sqrt{1})/2 = 2$ et $x_2 = (3 - \sqrt{1})/2 = 1$; On a :

	1 2	2 +∞
$x^2 - 3x + 2$	-	+
$f(x) - x$	+	-

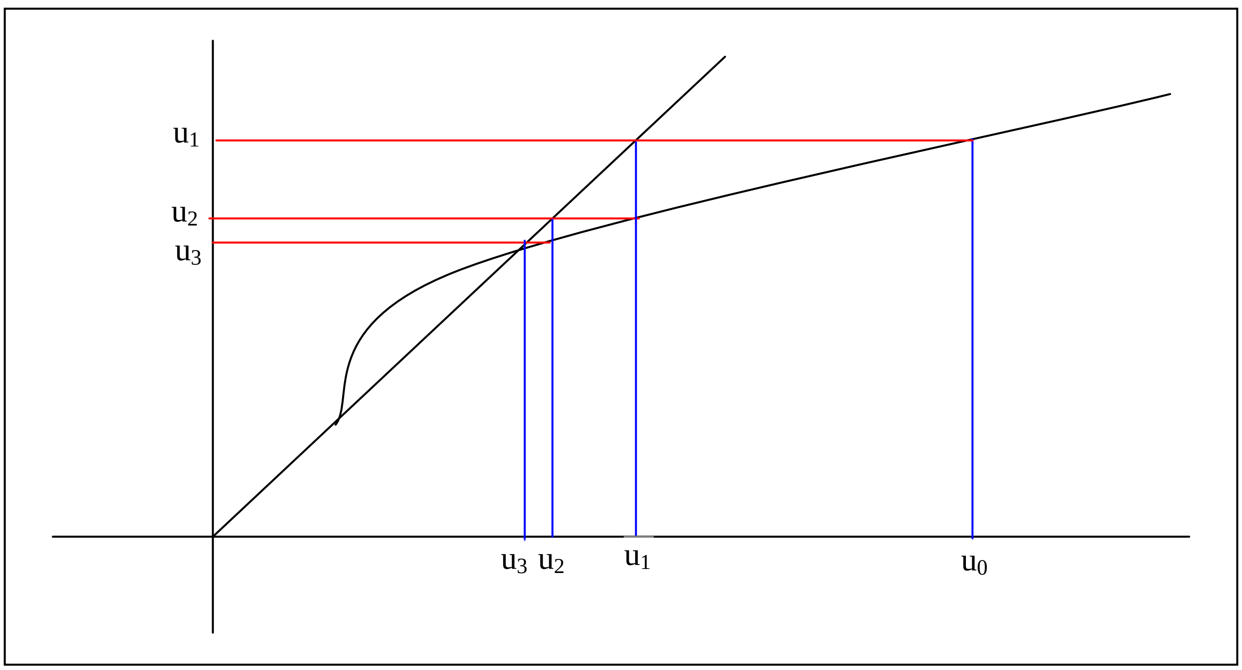
En cherchant le signe de $f(x) - x$, on trouve deux racines solutions de $f(x) = x$ (ces solutions sont des points fixes) mais on ne garde que $x_1 = 2$ car on cherche ce point fixe dans $]1;+\infty[$.

c) Etude graphique de la suite (u_n)
1er cas : $u_0 < x_1$

Attention, pour des raison pratique (et informatique) ce dessin n'est pas à l'échelle. Il est juste là pour illustrer la façon dont on construit graphiquement la suite.



2ème cas : $u_0 > x_1$



On observe que dans le cas $u_0 < x_1$, la suite est croissante et semble majorée par le point fixe. Dans le cas $u_0 > x_1$, la suite est décroissante et semble minorée par le point fixe.

d) Démonstration directe des résultats

1er cas : $1 < u_0 < x_1$ avec $x_1 = 2$;

On a vu sur le graphique que la suite est croissante et majorée ; essayons de le démontrer. On a:

$u_0 < x_1$ donc la proposition P : $u_n < x_1$ est vraie au rang 0.

Supposons que P(n) est vraie et montrons que P(n+1) est vraie.

On a : $u_n < x_1 \Rightarrow f(u_n) < f(x_1)$

$\Rightarrow f(u_n) < x_1$

$\Rightarrow u_{n+1} < x_1$

La fonction *f* est croissante.
x_1 est un point fixe.

Si P(n) est vraie alors P(n+1) est vraie, et P(0) est vraie, donc P(n) est vraie pour tout n. La suite est majorée.

Passons maintenant à la croissance de la suite (u_n). On veut montrer que $u_{n+1} > u_n$. Or on a trouvé que :

$\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $1 < u_n < x_1$.

Or, entre 1 et x_1, on a vu que $f(x) - x > 0$ quelque soit x. Donc :

$f(u_n) - u_n > 0 \Rightarrow f(u_n) > u_n \Rightarrow u_{n+1} > u_n$ quelque soit u_n avec $1 < u_n < x_1$.

Donc (u_n) croissante.

Attention, le fait d'avoir démontré P(n) est essentiel. Si on ne l'a pas fait, il faut effectuer une récurrence.

2ème cas : $u_0 > x_1$ avec $x_1 = 2$;

On a vu sur le graphique que la suite est décroissante et minorée ; essayons de le démontrer. On a :

$u_0 > x_1$ donc la proposition P : $u_n > x_1$ est vraie au rang 0.

Supposons que P(n) est vraie et montrons que P(n+1) est vraie.

On a : $u_n > x_1 \Rightarrow f(u_n) > f(x_1)$

$\Rightarrow f(u_n) > x_1$

$\Rightarrow u_{n+1} > x_1$

La fonction *f* est croissante.
x_1 est un point fixe.

Si P(n) est vraie alors P(n+1) est vraie, et P(0) est vraie, donc P(n) est vraie pour tout n. La suite est minorée.

Passons maintenant à la décroissance de la suite (u_n). On veut montrer que $u_{n+1} < u_n$. Or on a trouvé que :

$\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $u_n > x_1$.

Or, entre x_1 et $+\infty$, on a vu que $f(x) - x < 0$ quelque soit x. Donc :

$f(u_n) - u_n < 0 \Rightarrow f(u_n) < u_n \Rightarrow u_{n+1} < u_n$ quelque soit u_n avec $u_n > x_1$. Donc (u_n) décroissante.

Sachant que la suite est convergente (quelque soit le point de départ), on peut écrire :

$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1}) = l$. Si on utilise cette propriété sur la l'expression $f(x) = x$, on obtient $f(l) = l$, ce qui revient à dire que la limite de la suite est égale à un des points fixes de la fonction *f*, c'est à dire soit 1 soit 2. Connaissant le comportement de la suite (croissante dans $\left[1;2\right]$ et minorée dans $\left[2;+\infty\right[$) on peut immédiatement éliminer 1, et il ne reste plus que 2 qui est la limite de la suite (u_n).

<u>Q2</u> : $u_0 \geqslant -9$; $u_{n+1} = \sqrt{9+u_n}$, n $\in \mathbb{N}$

De la même manière que pour la question précédente (mais les calculs sont plus compliqués), vous montrerez que :

– Tous les termes de la suite sont bien définis car $u_n \geqslant 0$ pour n $\geqslant$ 1.

– Il suffit, d'après la question précédente, d'étudier $f(x) = \sqrt{9 + x}$ et le signe de $f(x) - x$ sur $[0; +\infty]$ (Attention, α n'est pas "simple").

– La suite se démontre de la même manière.

<u>Q3</u> : $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = 1 - \exp(-u_n)$, n $\in \mathbb{N}$

Cette question est laissée à votre réflexion. Les résultats sont :

- si $u_0 > 0$: la suite converge vers 0;
- si $u_0 = 0$: la suite est constante;
- si $u_0 < 0$: la suite diverge.

Exercice A.2.4

Soit f la fonction définie sur] 0 ; +∞ [par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$, où $a \in \mathbb{R}_*^+$.

<u>Q1</u> : Etudier les variations de f. En déduire que $\sqrt{a} < f(x) < x$ si $x > \sqrt{a}$
Etudions cette fonction. On a sa dérivée égale à :
x ∈] 0 ; +∞ [, $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) > 0$; $\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$ est positif si :

$1 - \frac{a}{x^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{a}{x^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow x^2 \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{a}$ et $x \in$] 0 ; +∞ [. La fonction f est croissante sur] $\sqrt{a}$; +∞ [.

Etudions le signe de $f(x) - x$.
$f(x) - x \geq 0$ et $x \in$] 0 ; +∞ [$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) - x \geq 0$ et $x \in$] 0 ; +∞ [$\Leftrightarrow$ $x + \frac{a}{x} \geq 2x$ et $x \in$] 0 ; +∞ [

$\Leftrightarrow$ $\frac{a}{x} \geq x$ et $x \in$] 0 ; +∞ [$\Leftrightarrow x^2 \leqslant a$ et $x \in$] 0 ; +∞ [$\Leftrightarrow x \leqslant \sqrt{a}$ et $x \in$] 0 ; +∞ [
On a donc :

	0 $\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$ +∞
$x - \sqrt{a}$	-	+
$f(x) - x$	+	-
$f(x)$	$\searrow$ $\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$ $\nearrow$

En étudiant $f(x) - x$, on voit que $\sqrt{a}$ est un point fixe (donc $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$), que $f(x)$ est strictement croissante sur] $\sqrt{a}$; +∞ [(et par la même $\sqrt{a} < f(x)$), et que $f(x) - x$ est négative sur] $\sqrt{a}$; +∞ [(donc $f(x) < x$).

On a donc la propriété : $\sqrt{a} < f(x) < x$ si $x > \sqrt{a}$

Q2 : (u_n) : $u_1 > \sqrt{a}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$
Montrer que la suite est convergente. Pour montrer qu'elle est convergente, on peut essayer de montrer quelle est soit croissante et majorée, soit décroissante et minorée. En prêtant un peu d'attention à la propriété que l'on a démontrée dans la question précédente, on peut avoir l'intuition que c'est décroissante et minorée qui est démontrable.

Montrons d'abord que la suite est minorée.
$u_1 > \sqrt{a}$ donc la proposition P : $u_n > \sqrt{a}$ est vraie au rang 1.
Supposons que P(n) est vraie et montrons que P(n+1) est vraie.
On a : $u_n > \sqrt{a} \Rightarrow f(u_n) > f(\sqrt{a})$
$\Rightarrow f(u_n) > \sqrt{a} \Rightarrow u_{n+1} > \sqrt{a}$

La fonction f est croissante.
$\sqrt{a}$ est un point fixe.

Si P(n) est vraie alors P(n+1) est vraie, et P(1) est vraie, donc P(n) est vraie pour tout n.
La suite est minorée.
Passons maintenant à la décroissance de la suite (u_n). On veut montrer que $u_{n+1} < u_n$.
Or on a trouvé que :
$\forall$ n $\in \mathbb{N}_*$, $u_n > \sqrt{a}$.
Or, entre $\sqrt{a}$ et +∞, on a vu que $f(x) < x$ quelque soit x. Donc :
$f(u_n) < u_n \Rightarrow f(u_n) < u_n \Rightarrow u_{n+1} < u_n$ quelque soit u_n avec $u_n > \sqrt{a}$. Donc (u_n) décroissante.

Sachant que la suite est convergente, on peut écrire :
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1}) = l$. Si on utilise cette propriété sur la l'expression $f(u_n) = u_n$, on obtient $f(l) = l$, ce qui revient à dire que la limite de la suite est égale à un des points fixes de la fonction f, c'est à dire $\sqrt{a}$ qui est le seul dans] 0 ; +∞ [.

Q3 : On pose $\varepsilon_n = u_n - \sqrt{a}$

Montrer que $\varepsilon_{n+1} = \dfrac{\varepsilon_n^2}{2u_n} \leqslant \dfrac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}}$. On a :

$$\varepsilon_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_n + \sqrt{a} + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{\left(\varepsilon_n + \sqrt{a}\right)^2 + a - 2\sqrt{a}\left(\varepsilon_n + \sqrt{a}\right)}{2u_n} = \frac{\varepsilon_n^2}{2u_n}$$

Or on connaît un minorant du dénominateur puisqu'on connaît un minorant de la suite (u_n). On a :

$u_n < \sqrt{a} \Leftrightarrow 2\,u_n < 2\sqrt{a} \Leftrightarrow 1/(2\,u_n) < 1/(2\sqrt{a}) \Leftrightarrow \dfrac{\varepsilon_n^2}{2u_n} < \dfrac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}}$ car $\varepsilon_n \geqslant 0$ CQFD

Q4 : On pose $b = 2\sqrt{a}$

On peut écrire : $\dfrac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}} = \dfrac{\varepsilon_n^2}{b} = b\left(\dfrac{\varepsilon_n}{b}\right)^2$. On a donc : $\varepsilon_{n+1} \leqslant b\left(\dfrac{\varepsilon_n}{b}\right)^2$

Remplaçons ε_n par sa valeur fonction de ε_{n-1}. On obtient :

$$\varepsilon_{n+1} \leqslant b\left(\frac{\varepsilon_n}{b}\right)^2 = b\left(\frac{\frac{\varepsilon_{n-1}^2}{2u_{n-1}}}{b}\right)^2 = b\left(\frac{\varepsilon_{n-1}^2}{2u_{n-1}\,b}\right)^2 \leqslant b\left(\frac{\varepsilon_{n-1}^2}{b\,b}\right)^2$$

N'oublions pas que l'on connaît un minorant de u_n

$$\varepsilon_{n+1} \leqslant b\left(\frac{\varepsilon_{n-1}}{b}\right)^4 = b\left(\frac{\varepsilon_{n-1}}{b}\right)^{2^2}$$

On peut effectuer ce remplacement avec ε_{n-2} ; on trouve :

$$\varepsilon_{n+1} \leqslant b\left(\frac{\varepsilon_{n-2}}{b}\right)^8 = b\left(\frac{\varepsilon_{n-2}}{b}\right)^{2^3}$$ et ainsi de suite ;

$$\varepsilon_{n+1} \leqslant b\left(\frac{\varepsilon_{n-3}}{b}\right)^{2^4} = b\left(\frac{\varepsilon_{n-3}}{b}\right)^{2^{(3+1)}}$$

$$\varepsilon_{n+1} \leqslant b\left(\frac{\varepsilon_{n-4}}{b}\right)^{2^5} = b\left(\frac{\varepsilon_{n-4}}{b}\right)^{2^{(4+1)}}$$

-
-
-

$$\varepsilon_{n+1} \leqslant b\left(\frac{\varepsilon_{n-(n-1)}}{b}\right)^{2^n} = b\left(\frac{\varepsilon_1}{b}\right)^{2^{((n-1)+1)}} = b\left(\frac{\varepsilon_1}{b}\right)^{2^n}$$

On obtient donc le résultat désiré.

On peut démontrer ce résultat par récurrence en disant que P(0) est vraie : $\varepsilon_{n+1} \leqslant b\left(\dfrac{\varepsilon_{n-0}}{b}\right)^{2^{0+1}}$ et que si P(k-1) est vraie : $\varepsilon_{n+1} \leqslant b\left(\dfrac{\varepsilon_{n-(k-1)}}{b}\right)^{2^{((k-1)+1)}}$ alors P(k) est vraie : $\varepsilon_{n+1} \leqslant b\left(\dfrac{\varepsilon_{n-(k+1-1)}}{b}\right)^{2^{(k+1)}}$

Q5 : Application numérique

La majoration de $\dfrac{2-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} < \dfrac{1}{10}$ est équivalente à $12\sqrt{a} > 20$ qui est équivalent à $a > \dfrac{25}{9} = 2.77777$ (or $a = 3$).

Le calcul d'erreur montre qu'après le calcul de 4 itérés (u_2 , u_3 , u_4 , u_5), l'erreur entre u_5 et $\sqrt{a}$ est inférieur à 10^{-15} !

Exercice A.2.5

(u_n) : $u_{n+1} = \dfrac{2\,u_n + 3}{u_n + 4}$; u_0 judicieusement choisi.

Soit la fonction f : $f(x) = \dfrac{2\,x+3}{x+4}$; $x \neq -4$

a) Montrer que f admet 2 points fixes

$\dfrac{2\,x+3}{x+4} = x \Leftrightarrow 2\,x^2 + 3 = x^2 + 4\,x \Leftrightarrow x^2 + 2\,x - 3 = 0$

Calculons : $\Delta' = 1 + 3 = 4$

$x_1 = \alpha = 1$ et $x_2 = \beta = -3$

b) i) Montrer que $\dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \lambda \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$

Remplaçons u_{n+1} par sa valeur : $\dfrac{\dfrac{2\,u_n + 3}{u_n + 4} - \alpha}{\dfrac{2\,u_n + 3}{u_n + 4} - \beta} = \dfrac{2\,u_n + 3 - \alpha(u_n + 4)}{2\,u_n + 3 - \beta(u_n + 4)} = \dfrac{(2-\alpha)u_n + (3-4\alpha)}{(2-\beta)u_n + (3-4\beta)} = \dfrac{(2-\alpha)}{(2-\beta)} \dfrac{u_n + \dfrac{(3-4\alpha)}{(2-\alpha)}}{u_n + \dfrac{(3-4\beta)}{(2-\beta)}}$

Il reste à vérifier que $\dfrac{(3-4\alpha)}{(2-\alpha)} = -\alpha$ et $\dfrac{(3-4\beta)}{(2-\beta)} = -\beta$, par exemple, en remplaçant α et β par leur valeur respective.

le résultat est immédiat si on sait faire du calcul. $\dfrac{(3-4)}{(2-1)} = -1$ et $\dfrac{(3+4*3)}{(2+3)} = \dfrac{15}{5} = 3$.

On a donc $\lambda = \dfrac{1}{5}$, pour le choix de α et β que l'on a fait. (si on prend $\alpha = -3$ et $\beta = 1$, on trouve $\lambda = 5$).

ii) En déduire une relation entre u_n et n

Remplaçons dans l'équation précédente u_n par sa valeur en u_{n-1}, on trouve :

$$\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \lambda \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \lambda\left(\lambda \frac{u_{n-1} - \alpha}{u_{n-1} - \beta}\right) = \lambda^2 \frac{u_{n-1} - \alpha}{u_{n-1} - \beta} = \lambda^{(n+1)-(n-1)} \frac{u_{n-1} - \alpha}{u_{n-1} - \beta}$$

On peut effectuer ce remplacement avec u_{n-2} ; on trouve :

$$\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \lambda^2\left(\lambda \frac{u_{n-2} - \alpha}{u_{n-2} - \beta}\right) = \lambda^3 \frac{u_{n-2} - \alpha}{u_{n-2} - \beta} = \lambda^{(n+1)-(n-2)} \frac{u_{n-2} - \alpha}{u_{n-2} - \beta}$$ et ainsi de suite ;

$$\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \lambda^4 \frac{u_{n-3} - \alpha}{u_{n-3} - \beta} = \lambda^{(n+1)-(n-3)} \frac{u_{n-3} - \alpha}{u_{n-3} - \beta}$$

- •
- •
- •

$$\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \lambda^{(n+1)-(n-n)} \frac{u_{n-n} - \alpha}{u_{n-n} - \beta} = \lambda^{n+1} \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$$

Ce qui revient à écrire : $\dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \lambda^n \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$

iii) Condition sur u_0

En modifiant l'équation précédente, et en posant $K_n = \lambda^n \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$, on obtient :

$\dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = K_n$ et $u_n \neq \beta \Leftrightarrow u_n - \alpha = K_n\,(u_n - \beta)$ et $u_n \neq \beta \Leftrightarrow u_n = \dfrac{\alpha - \beta\,K_n}{1 - K_n}$ et $1 - K_n \neq 0$ et $u_n \neq \beta$.

Regardons d'abord ce qui se passe pour $u_n \neq \beta$.

$u_n \neq \beta \Leftrightarrow \dfrac{\alpha - \beta K_n}{1 - K_n} \neq \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta K_n \neq \beta - \beta K_n \Leftrightarrow \alpha \neq \beta$

C'est vrai donc pour tout n ⩾ 1.

Pour n = 0, si $u_0 = \beta$, alors $\dfrac{2u_0 + 3}{u_0 + 4} = u_0$ car β est un point fixe ; Dans ce cas , la suite est constante. On peut faire la même remarque si $u_0 = \alpha$; alors la suite est constante.

Il faut aussi que $1 - K_n$ soit différent de 0.

$1 - K_n \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^n \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \neq 1 \Leftrightarrow \lambda^n (u_0 - \alpha) \neq u_0 - \beta \Leftrightarrow u_0 \neq \dfrac{\alpha \lambda^n - \beta}{\lambda^n - 1}$ pour n ⩾ 1.

c) Montrer que u_n converge et donner sa limite.

On a vu que si $u_0 = \beta$ ou $u_0 = \alpha$, alors la suite est constante, et donc convergente.

Si $u_0 \neq \dfrac{\alpha \lambda^n - \beta}{\lambda^n - 1}$ alors $u_n = \dfrac{\alpha - \beta K_n}{1 - K_n} = \dfrac{\alpha - \beta \lambda^n \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}}{1 - \lambda^n \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}}$

On $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda^n = 0$, car |λ| < 1 (ici λ = 1/5). On peut en déduire que : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 1}$

Q2

La solution est : $\alpha = 0$, $\beta = 1$, λ = 1/3 , $u_0 \neq \dfrac{3^n}{3^n - 1}$ (n ⩾ 1) et (u_n) converge vers 0 si $u_0 \neq 1$ et la suite est constante si $u_0 = 1$.

Q3

La solution est : $\alpha = -1$, $\beta = 3$, λ = 2, $u_0 \neq \dfrac{2^n + 3}{1 - 2n}$ (n ⩾ 1) et (u_n) converge vers 3 si $u_0 \neq 1$ et la suite est constante si
$u_0 = -1$.

Q4

La solution est : $\alpha = \beta = 2$, $\dfrac{1}{u_{n+1} - 2} = \dfrac{1}{u_n - 2} - \dfrac{1}{6}$; $u_0 \neq \dfrac{6}{n}$ +2n (n ⩾ 1) et (u_n) converge vers 2.

Exercice A.2.6

Q1

Soient les suites de termes généraux : $v_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $u_n = v_n + \dfrac{1}{nn!}$ pour $n \in \mathbb{N}^\times$. Montrer qu'elles sont adjacentes.

Il faut montrer qu'une des deux croît, que l'autre décroît, et que la limite de $u_n - v_n$ est zéro. Ici il est assez facile de voir que c'est la suite (v_n) qui croît ; en effet, c'est une somme de termes positifs qui ne fait qu'augmenter. On peut écrire :

$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=0}^{n+1} \dfrac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{(n+1)!} \right) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{(n+1)!}$

On a donc : $v_{n+1} - v_n > 0$

Il faut maintenant vérifier que (u_n) décroît. Calculons $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = v_{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - (v_n + \dfrac{1}{nn!}) = \left(\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{(n+1)!}\right) + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - (\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{nn!})$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - \dfrac{1}{nn!} = \dfrac{1}{n!}(\dfrac{1}{(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)} - \dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{n!}(\dfrac{n(n+1)+n-(n+1)(n+1)}{n(n+1)(n+1)})$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n!}(\dfrac{n^2+n+n-n^2-2n-1}{n(n+1)(n+1)}) = \dfrac{1}{n!}(\dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)})$

On a donc : $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite décroît.

Calculons maintenant la limite $u_n - v_n$. On a : $u_n - v_n = \dfrac{1}{nn!}$

Sachant que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$, on a : $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{nn!} = 0$

Pour montrer que la limite l n'est pas un rationnel, on va raisonner par l'absurde en utilisant l'encadrement $v_n < l < u_n$, qui est vrai car (v_n) est strictement croissante et (u_n) strictement décroissante.

Supposons que l est un rationnel, on peut écrire $l = \dfrac{p}{q}$. On a :

$v_n < l < v_n + \dfrac{1}{nn!} \Rightarrow v_n\,(n!) < \dfrac{p}{q}\,(n!) < v_n\,(n!) + \dfrac{1}{n} \Rightarrow q\,v_n\,(n!) < p\,(n!) < q\,v_n\,(n!) + \dfrac{q}{n}$

Or en regardant la structure de v_n, on voit que $q\,v_n\,(n!) \in \mathbb{N}$, ainsi que $p\,(n!) \in \mathbb{N}$. Or q est constant ; on a donc un entier $(p\,(n!))$ qui est compris entre un entier M = $q\,v_n\,(n!)$ et ce même entier M plus une quantité $\dfrac{q}{n}$ qui va devenir plus petite que 1 quand n va augmenter. On arrive à une absurdité, puisqu'un entier ne peut être compris qu'entre deux entiers consécutifs (en fait égal à un des deux). La limite l n'est donc pas un rationnel.

Q2

Soient les suites de termes généraux :

$u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{2\,u_n\,v_n}{u_n + v_n}$, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_0 > 0$, $v_0 > 0$. Montrer qu'elles sont adjacentes.

Il faut montrer qu'une des deux croît, que l'autre décroît, et que la limite de $u_n - v_n$ est zéro. Regardons ce que donne $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \qquad (1)$$

Il nous faudrait connaître le signe de $(v_n - u_n)$. Regardons ce que donne $v_{n+1} - v_n$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2\,u_n\,v_n}{u_n + v_n} - v_n = \frac{2\,u_n\,v_n - v_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \frac{v_n(u_n - v_n)}{u_n + v_n} \qquad (2)$$

Encore une fois, il nous faudrait connaître le signe de $(v_n - u_n)$, ainsi que celui de u_n et v_n. On va donc les étudier.
On a :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2\,u_n\,v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4\,u_n\,v_n}{2\,(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2\,(u_n + v_n)} \qquad (3)$$

On voit que si u_n et v_n sont strictement positifs, alors $u_{n+1} - v_{n+1} > 0$ et on pourra conclure. On va étudier le signe de u_n et v_n en faisant une récurrence.

Soit $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, et $u_1 = \dfrac{u_0 + v_0}{2}$ et $v_1 = \dfrac{2\,u_0\,v_0}{u_0 + v_0}$.

On voit immédiatement que la stricte positivité de u_0 et v_0 entraîne la stricte positivité de u_1 et v_1. La propriété P(1) est donc vraie.

Supposons maintenant que P(n) soit vraie, c'est à dire $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Alors, on constate immédiatement que $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0$, et $v_{n+1} = \frac{2\,u_n\,v_n}{u_n + v_n} > 0$ (c'était l'idée de la démonstration). La propriété est vraie au rang 1, elle est vraie au rang n+1 si elle est vraie au rang n, alors P(n) est vraie pour tout n.
P(n) ($u_n > 0$ et $v_n > 0$) étant vraie, alors on a directement $u_n - v_n > 0$ pour tout n, et donc $u_n > v_n$ pour tout n. Cela entraîne, étant donnés les relation (1) et (2) que l'on a écrit plus haut, que :
$u_{n+1} - u_n < 0$ donc (u_n) est décroissante.
$v_{n+1} - v_n > 0$ donc (v_n) est croissante.

Montrons maintenant la convergence de $u_n - v_n$ vers zéro. On ne peut y arriver directement. Par contre, on peut écrire grâce aux relations précédentes :
$u_1 > u_n > v_n > v_1$ (Croissance de (v_n), décroissance de (u_n)).
Donc (v_n) est majorée par u_1 et croissante donc elle converge (vers l); (u_n) est minorée par v_1 et décroissante donc elle converge (vers L). Cela implique que la différence $u_n - v_n$ converge. Il reste à montrer que c'est vers zéro. Pour cela, considérons la relation (3) à la limite, on obtient :

$$L - l = \frac{(L-l)^2}{2(L+l)} \Leftrightarrow L^2 + 2\,L\,l - 3\,l^2 = 0$$

On résout cette équation en posant l comme paramètre et L comme inconnue, on obtient :
$\Delta' = 4\,l^2$; $L_1 = -3\,l$; $L_2 = l$
La valeur L_1 est impossible car les deux suites ont des limites strictement positives. C'est donc la seconde possibilité qui est la bonne. Les deux suites ont la même limite, donc leur différence converge vers zéro.
Pour calculer l, on va utiliser la suite $w_n = u_n\,v_n$.

$$w_{n+1} = u_{n+1}\;v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}\;\frac{2\,u_n\,v_n}{u_n + v_n} = u_n\;v_n$$

cette suite est constante et donc $w_n = u_0\;v_0$, et à la limite on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = l^2 = u_0 v_0$

Donc $l = \sqrt{u_0 v_0}$

<u>Q3</u>
Soient les suites de termes généraux :
$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n\;v_n}$, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_0 > 0$, $v_0 > 0$. Montrer qu'elles sont adjacentes.
Comme pour la question précédente, pour déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n < 0$ et $v_{n+1} - v_n > 0$, il faut étudier le signe de $u_n - v_n$. Il faut montrer qu'une des deux croît, que l'autre décroît, et que la limite de $u_n - v_n$ est zéro. Regardons ce que donne $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \qquad (1)$$

Il nous faudrait connaître le signe de $(v_n - u_n)$. Regardons ce que donne $v_{n+1} - v_n$.

$$v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_n\;v_n} - v_n$$ (difficile de donner le signe à priori).

On peut très facilement montrer par récurrence que si $u_0 > 0, v_0 > 0$ alors $u_n > 0$, $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le signe de $v_{n+1} - v_n$ est le même que celui de $v_{n+1}^2 - v_n^2$ (car la mise au carré est une fonction croissante).

$$v_{n+1}^2 - v_n^2 = u_n\;v_n - v_n^2 = v_n(u_n - v_n)$$

Encore une fois, il nous faudrait connaître le signe de $(v_n - u_n)$, ainsi que celui de u_n et v_n. On va donc les étudier.

Soit $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n\;v_n}$ on veut connaître son signe.

$$\frac{u_n + v_n}{2} > \sqrt{u_n\;v_n} \Leftrightarrow \frac{(u_n + v_n)^2}{4} > u_n\;v_n \Leftrightarrow \frac{u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n}{4} > u_n\;v_n \Leftrightarrow \frac{(u_n - v_n)^2}{4} > 0$$ (ce qui est toujours vrai)

Donc $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $v_n < u_n$, et donc $u_{n+1} - u_n < 0$, et $v_{n+1} - v_n > 0$. On en déduit donc comme à la question précédente que v_n croît et u_n décroît, qu'elles sont bornées et donc convergentes. Le même type d'astuce permet de vérifier que la limite de la différence est nulle.

Exercice A.2.8

Q1

Chercher toutes les suites géométriques de la forme q^n vérifiant la relation

$$3u_n = 10u_{n-1} - 3u_{n-2}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$$

On remplace u_n par q^n dans la définition de la suite.

$$3q^n = 10q^{n-1} - 3q^{n-2} \Leftrightarrow q^{n-2}\left(3q^n - 10q + 3\right) = 0$$

Si on résout on obtient : $\Delta' = 5^2 - 3*3 = 25 - 9 = 16$

$$q_1 = \frac{5-4}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$q_2 = \frac{5+4}{3} = 3$$

Q2

Montrer que $C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$ est solution de cette équation.

Si $u_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$ est solution on peut écrire :

$$\begin{aligned} 3u_n &= 3\left(C_1 q_1^n + C_2 q_2^n\right) = 3C_1 q_1^n + 3C_2 q_2^n = C_1\left(3q_1^n\right) + C_2\left(3q_2^n\right) \\ &= C_1\left(10q_1^{n-1} - 3q_1^{n-2}\right) + C_2\left(10q_2^{n-1} - 3q_2^{n-2}\right) \\ &= 10\left(C_1 q_1^{n-1} + C_2 q_2^{n-1}\right) - 3\left(C_1 q_1^{n-2} + C_2 q_2^{n-2}\right) \\ &= 10u_{n-1} - 3u_{n-2} \end{aligned}$$

Q3

Exprimer C_1 et C_2 en fonction de u_0 et u_1.

On a : $u_0 = C_1 q_1^0 + C_2 q_2^0$ et $u_1 = C_1 q_1^1 + C_2 q_2^1$ avec $q_1 = -\frac{1}{3} \quad et \quad q_2 = 3$

$u_0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = u_0 - C_1$

$u_1 = C_1 q_1^1 + C_2 q_2^1 \quad \Rightarrow u_1 = \frac{-1}{3}C_1 + 3C_2 \Rightarrow u_1 = \frac{-1}{3}C_1 + 3\left(u_0 - C_1\right) \Rightarrow \frac{10}{3}C_1 = 3u_0 - u_1$

$\Rightarrow C_1 = \frac{9}{10}u_0 - \frac{3}{10}u_1$

$C_2 = u_0 - C_1 \quad \Rightarrow C_2 = u_0 - \frac{9}{10}u_0 + \frac{3}{10}u_1$

$\Rightarrow C_2 = \frac{1}{10}u_0 + \frac{3}{10}u_1$

Pour que la suite $C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$ converge il faut que $C_2 = 0$ car $q_2 = 3$ mis à la puissance *n* diverge si *n* tend vers l'infini.

On veut donc $C_2 = \frac{1}{10}u_0 + \frac{3}{10}u_1 = 0$ soit $u_0 = -3u_1$ pour que la suite converge.