Correction des exercices du TD 4

Rappel : des aides vous sont fournies sur le site « www4.utc.fr /~mt21/» à la fin des fichiers consacrés aux chapitre de cours. N'hésitez pas à les consulter pour refaire les exercices avant de regarder la correction.
Nota : Lorsque la démonstration d'une question a déjà été présentée, il se peut que le rédacteur face quelques raccourcis ; cela ne vous autorise bien sûr pas à en faire dans vos copies.

Exercice A.1.1

Les fonctions suivantes admettent-elles une limite ? Si oui laquelle ?

$f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x}$ quand $x \to +\infty$

La forme est indéterminée. On peut multiplier par la forme conjuguée $x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x}$ en haut et en bas pour obtenir : $f(x) = \dfrac{4}{x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x}}$

On a donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

$f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1} - \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 1}$ quand $x \to 0$

La forme est indéterminée. On peut multiplier par la forme conjuguée $\sqrt{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 1}$ en haut et en bas pour obtenir : $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 1}} = \dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}\left(1 + x + x^2\right)} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2}\left(1 + x - x^2\right)}}$

Il devient facile de voir que $\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 0}$

Exercice A.1.2

Étudier les limites suivantes :

$f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1}$ quand $x \to +\infty$

On factorise la plus grande puissance au numérateur et au dénominateur :

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1} = \frac{\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = x^{\frac{2}{3} - 1} \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = x^{-\frac{1}{3}} \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \text{ quand } x \to +\infty$$

On factorise la plus grande puissance au numérateur et au dénominateur :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x\left(1+\sqrt{\frac{x}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}\right)}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{x^{1/2}}{x^2}}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{3/2}}}}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=1}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} \text{ quand } x \to 0$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\frac{\left(\sqrt[6]{1+x}\right)^3-1}{\left(\sqrt[6]{1+x}\right)^2-1}=\frac{a^3-1}{a^2-1}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a-1)(a+1)}=\frac{(a^2+a+1)}{(a+1)} \text{ si } a\neq 1$$

Car on a l'identité remarquable $a^n-1=(a-1)(a^n+a^{n-1}+\cdots+a+1)$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{3}{2}}$$

$$f(x)=\frac{x}{x^2+\sin(x)} \text{ quand } x \to 0$$

$$f(x)=\frac{x}{x^2+\sin(x)}=\frac{1}{x+\frac{\sin(x)}{x}} \text{ avec } x\neq 0 \text{ et } \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x)=1}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\tan(x)} \text{ quand } x \to 0$$

$$f(x)=\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\tan(x)}=\frac{1}{\sin(x)}-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{x\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)}{\frac{\sin(x)}{x}} \text{ et } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x)=0}$$

$$f(x)=\frac{(1-\cos(x))\sin(x)}{x\tan^2(x)} \text{ quand } x \to 0$$

$$f(x)=\frac{(1-\cos(x))\sin(x)}{x\tan^2(x)}=\frac{(1-\cos(x))\cos^2(x)}{x\sin(x)}=\frac{\frac{(1-\cos(x))}{x^2}\cos^2(x)}{\frac{x\sin(x)}{x^2}}=\frac{\frac{(1-\cos(x))}{x^2}\cos^2(x)}{\frac{\sin(x)}{x}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}}$$

Exercice A.1.3

Étudier la limite en 0 des fonctions suivantes :

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ quand $x \to 0$

Le sin est continu, reste borné, mais son argument (ici $1/x$) varie trop rapidement au voisinage de 0. On se doute que $f(x)$ n'a pas de limite en 0. Pour le montrer, il suffit de trouver une suite x_n qui tende vers 0 et telle que $f(x_n)$ n'ait pas de limite.

Par exemple $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$. Cette suite converge vers 0. On a $f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$ qui n'a évidemment pas de limite quand $n \to +\infty$.

$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ quand $x \to 0$

$-x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x \quad si\ x \geq 0$ ou $-x \geq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x \quad si\ x \leq 0$

Par encadrement $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$

$f(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ quand $x \to 0$

$-x^2 \leq x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$

Par encadrement $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$

Exercice A.1.6

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Q1 : Montrer que l'équation *f(x)* = 0 admet au moins une solution réelle.

La continuité de la fonction *f* devrait permettre d'utiliser le théorème de la valeur intermédiaire ou la Proposition IV.2.3.
f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, il est donc possible de trouver un *a* tel que *f(a)* <0 en utilisant la propriété de divergence vers $-\infty$ quand $x \to -\infty$.
De même il est possible de trouver un *b* tel que *f(b)* >0 (toujours en utilisant la propriété de divergence) tel que *a* < *b*.
On a alors *f(a) f(b)* <0 et un intervalle I = [*a*,*b*]. En utilisant la Proposition, on a alors l'existence d'au moins un c $\in$ I tel que *f(c)* = 0.

Q2 : En déduire que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Un polynôme de degré impair s'écrit :

$g(x) = a_{2p+1}x^{2P+1} + a_{2p}x^{2P} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Que l'on peut réécrire :

$$g(x)=a_{2p+1}x^{2P+1}\left(\frac{a_{2p}x^{2P}}{a_{2p+1}x^{2P+1}}+\cdots+\frac{a_2x^2}{a_{2p+1}x^{2P+1}}+\frac{a_1x}{a_{2p+1}x^{2P+1}}+\frac{a_0}{a_{2p+1}x^{2P+1}}\right)$$
$$=a_{2p+1}x^{2P+1}\left(\frac{a_{2p}}{a_{2p+1}x}+\cdots+\frac{a_2}{a_{2p+1}x^{2P-1}}+\frac{a_1}{a_{2p+1}x^{2P}}+\frac{a_0}{a_{2p+1}x^{2P+1}}\right)$$

On obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=sign(a_{2p+1})\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-sign(a_{2p+1})\infty$$

De plus un polynôme est continu sur $\mathbb{R}$. Donc $g(x)$ (ou $-g(x)$) répond aux hypothèses de la question 1.

Exercice A.1.7

<u>Q1</u> : Soit f : [a ; b] $\longrightarrow$ [a ; b] une application continue, montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution (au moins). Cette solution est-elle unique ?

f est continue, donc la fonction $g(x) = f(x) - x$ est continue sur [a ; b].

$f(a) - a \geqslant 0$ car $f(a) \geqslant a$ par définition des ensembles de départ et d'arrivée.

$f(b) - b \leqslant 0$ car $f(b) \leqslant b$ par définition des ensembles de départ et d'arrivée.

Si $f(a) = a$ alors on a une solution. De même si $f(b) = b$.

Si $\begin{cases} f(a)\neq a \\ et \\ f(b)\neq b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a)-a>0 \\ et \\ f(b)-b<0 \end{cases} \Rightarrow (f(a)-a)(f(b)-b)<0$

D'après la Proposition IV.2.3, on peut dire : $\exists\ c \in\ ]a\ ;b[$, $f(c) - c = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$

<u>Q2</u> : Soit f : [a ; b] $\longrightarrow$ [a ; b] une application continue qui vérifie :

$\forall$ x1, x2 $\in$ [a ; b]; x1 $\neq$ x2 $\Rightarrow$ $|f(x_1)-f(x_2)| < |x_1-x_2|$

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

Prenons la contraposée :

$\forall$ x1, x2 $\in$ [a ; b]; $|f(x_1)-f(x_2)| \geqslant |x_1-x_2| \Rightarrow$ x1 = x2

D'après la question 1, on sait qu'il existe au moins 1 solution. Supposons qu'il en existe 2 :

$$\begin{cases} f(x_1)=x_1 \\ et \\ f(x_2)=x_2 \end{cases} \Rightarrow f(x_1)-f(x_2)=x_1-x_2 \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2| \underset{\substack{\text{En utilisant} \\ \text{la contraposé}}}{\Longrightarrow} x_1=x_2$$

<u>Q3</u> : Soit f f : [a ; b] $\longrightarrow$ [a ; b] une application continue et décroissante. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

Soient 2 solutions : $\begin{cases} f(x_1)=x_1 \\ et \\ f(x_2)=x_2 \end{cases}$

Si on suppose :

$$x_1 \le x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2) \quad et \quad f(x_1) \ge f(x_2) \quad \text{(par hyp. de décroissance)}$$
$$\Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \text{(voir hypothèse ci-dessus concernant 2 solutions)}$$

Exercice A.1.8

Soit *f* définie par $f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x = 1 \, ou \; x = -1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}-1} \; si \; |x| \neq 1 \end{cases}$

Étudier la continuité de *f*.

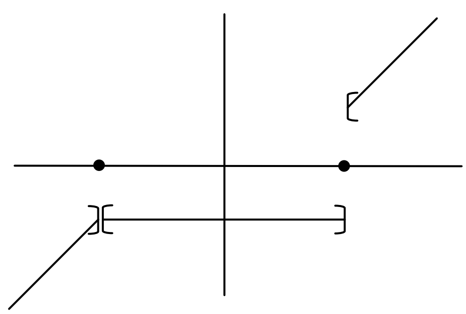
Il faut obtenir une expression plus simple de *f*. Pour chaque x fixé, on calcule la valeur de la limite de la suite.

Si $|x| < 1$ alors x^n converge vers 0 lorsque $n \to \infty$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}-1} = -1$

Si $|x| > 1$ alors x^n diverge vers 0 lorsque $n \to \infty$, $\dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}-1} = \dfrac{x^{2n+1}\left(1+\dfrac{1}{x^{2n+1}}\right)}{x^{2n}\left(1-\dfrac{1}{x^{2n}}\right)} = x\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x^{2n+1}}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{x^{2n}}\right)}$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}-1} = x$

On a donc au final : $f(x) = \begin{cases} 0 \quad si \; x = 1 \, ou \; x = -1 \\ -1 \quad si \; -1 < x < 1 \\ x \quad si \; x < -1 \, ou \; x > 1 \end{cases}$



Les limites sont simples à calculer sont simples. On constate que la fonction n’est pas continue en -1 et 1 (limite à droite, limite à gauche et valeur au point non égales)