RenPar'9,
Lausanne. Suisse, 20–23 mai 1997.

Plongement de Graphes dans la Maille Associative

Bertrand Ducourthial[ab] et Alain Mérigot[b]

[a]Laboratoire de Recherche en Informatique, bât. 490 Université Paris-Sud 91405 ORSAY.

[b]Institut d'Electronique Fondamentale, bât. 220 Université Paris-Sud 91405 ORSAY.
email : ducourth@ief.u-psud.fr, merigot@ief.u-psud.fr

Résumé

Les *réseaux associatifs* constituent un modèle de calculs parallèles basé sur des calculs sur des graphes. La mise en œuvre de ce modèle, étudiée dans le cadre de la machine *Maille Associative d'Orsay*, utilise une topologie en grille avec diagonale : *la maille*. Nous montrons dans cet article que tout graphe peut être plongé dans une maille, sous des hypothèses acceptables par le modèle. Ainsi le modèle des réseaux associatifs peut être utilisé avec la Maille Associative d'Orsay sans restrictions dues à la topologie de cette machine.

Mots clés :

modèle de calculs parallèles, plongement de graphes, maille, réseaux associatifs, Maille Associative d'Orsay.

1. Introduction

Un modèle de calculs parallèles, qui exprime une méthode pour réaliser des calculs simultanément, doit répondre à deux exigences. Tout d'abord, il doit présenter une définition de haut niveau, englobant un grand nombre de cas pratiques, tout en restant simple à utiliser. Ensuite, il doit pouvoir être mis en œuvre efficacement pour que l'avantage gagné d'un côté ne soit pas perdu de l'autre. Or, il s'avère que ces deux exigences, l'une concernant la facilité d'utilisation par le programmeur, l'autre concernant la mise en œuvre au niveau de la machine, ne sont pas faciles à concilier, et peuvent parfois sembler contradictoires.

Les *réseaux associatifs* apparaissent comme une solution intéressante pour concilier ces deux exigences, et ce, pour trois raisons principales. Premièrement, étant définis à partir de calculs sur des graphes, ils autorisent un grand nombre de calculs parallèles, et permettent d'exprimer simplement un grand nombre d'algorithmes [2]. Deuxièmement, sur certains types de graphes (incluant une grande partie des graphes utilisés dans la pratique), ils peuvent être mis en œuvre de façon fortement parallèle par un réseau de cellules calculantes, offrant un parallélisme maximal. Enfin, tout graphe peut être plongé dans une grille à 2 dimensions avec toutes les diagonales (cf. figure 1), c'est-à-dire une *maille* (en anglais : *mesh*), de taille adéquate, tout en respectant les contraintes fortes, nécessaires pour une réalisation performante.

Les deux derniers points assurent une mise en œuvre efficace dans le multi-processeur SIMD Maille Associative d'Orsay [4]. Dans cet article, nous nous focaliserons sur le dernier point, concernant les plongements, et qui garantit que la topologie de la Maille Associative d'Orsay ne limite pas le type de graphes qu'il est possible d'utiliser. Nous commençons par expliciter brièvement les deux premiers points : définition et mise en œuvre des réseaux associatifs. Puis, nous définissons un plongement de graphes adapté et nous montrons que tout graphe peut ainsi être plongé dans la maille. Enfin, nous donnons des plongements ayant une meilleure expansion pour les graphes butterfly et hypercube. Le lecteur trouvera d'autres compléments dans [3].

2. Le modèle

2.1. Définitions

Un graphe orienté $G(S, A)$ est un ensemble de *sommets* S et une relation binaire sur S^2 définie par l'ensemble A des *arcs*. Un *graphe fortement connexe* est tel qu'il existe un chemin (une suite d'arcs consécutifs) de tout sommet vers tout autre. Un *ensemble connexe* du graphe orienté $G(S, A)$ est un sous-ensemble de S tel que le graphe induit par ces sommets est fortement connexe. Enfin, $\Gamma(s)$ est l'ensemble des *antécédants* du sommet s, c'est-à-dire l'ensemble des sommets s' tel qu'il existe un chemin de s' vers s.

2.2. Les réseaux associatifs

Les réseaux associatifs [6] sont définis à partir d'un graphe $G(S, A)$ et d'une application f de S vers un ensemble quelconque, par exemple $\mathbb{N}$, qui associe à chaque sommet une valeur. La principale opération du modèle est la $\triangle$-*association* — où $\triangle$ désigne un opérateur binaire associatif et commutatif — qui transforme l'application f en une application f', de S vers $\mathbb{N}$, telle que, pour tout sommet s du graphe, $f'(s) = \triangle\Gamma(s)$. Autrement dit, la valeur du sommet s devient le résultat du calcul de $\triangle$ sur tous les antécédants de s.

Ce modèle peut aisément être mis en œuvre par un réseau de cellules calculant sans interruption leur valeur en fonction de celles de leurs antécédantes respectives. Le calcul global ainsi réalisé se termine lorsque les résultats ne varient plus. Pour détecter cette stabilité globale du réseau, on s'assure de la stabilité de chaque résultat pendant un délai supérieur à celui nécessaire à la propagation d'une donnée entre deux cellules voisines. La Maille Associative d'Orsay [4] utilise ce principe. Cette mise en œuvre garantit un résultat conforme aux réseaux associatifs pour les opérations idempotentes sur n'importe quel graphe, pour les opérations non-idempotentes sur les graphes préfixes[1] et sur les graphes fortement connexes en utilisant une primitive de plongement d'arbre recouvrant (qui est un graphe préfixe). Ainsi, pour d'importantes classes de graphes, qui recouvrent une grande partie des cas pratiques, les réseaux associatifs admettent une mise en œuvre fortement parallèle et efficace.

3. Plongement

3.1. Type de plongement

Les réseaux associatifs étant définis pour un graphe quelconque, il est important de savoir si une réalisation matérielle, qui nécessairement se base sur une topologie figée, ne limite pas la portée du modèle. La réalisation matérielle étudiée étant basée sur une maille, une grille avec toutes les diagonales (cf. figure1), cette question se formalise de la façon suivante : quels sont les graphes qui peuvent se plonger dans la maille? (nous renvoyons le lecteur à [1, 7] pour une présentation des plongements).

Pour que les associations puissent être faites en une seule étape, le plongement doit répondre à certaines exigences : premièrement, un sommet de la maille (le "graphe physique") ne peut gérer plus d'un sommet du graphe plongé (le "graphe logique") ; ensuite, un chemin physique de la maille représentant un arc logique ne doit pas passer par des sommets physiques représentant un sommet logique, ni entrer en conflit avec d'autres chemins du même type au niveau d'un arc physique. Cela conduit à utiliser dans certains cas plusieurs sommets physiques pour un

1. Un *graphe préfixe* est un graphe orienté tel que pour toute paire non ordonnée de sommets (s, s'), il existe au plus un chemin entre s et s'.

seul sommet logique, car dans la maille un sommet physique ne peut avoir plus de 8 chemins attenants. En conclusion, le plongement est de type "un vers ensemble connexe" (en anglais *one-to-connected set*), avec les hypothèses de charge 1 et de sommet et d'arc congestion 1 [3].

3.2. Théorème d'existence

Nous montrons dans cette section le théorème suivant :

Théorème 1 (d'existence) *Il existe un plongement de type "un vers ensemble connexe", avec charge, arc-congestion et sommet-congestion égaux à un, pour tout graphe orienté* $G(S, A)$ *dans une maille* $m \times (m-1)$*, avec* $m = \sum_{s \in S}(\delta^-(s)+1)$*, où* $\delta^-(s)$ *désigne le nombre d'arcs entrants du sommet* s*.*

Preuve. Remarquons tout d'abord que $\sum_{s\in S}(\delta^-(s) + 1) = \sum_{s\in S}(\delta^+(s) + 1)$, où $\delta^+(s)$ désigne le nombre d'arcs sortants du sommet s. Considérons une maille de côté m. A chaque sommet s du graphe logique, on associe un ensemble $E^+(s)$ de $\delta^+(s)+1$ sommets physiques sur le bord gauche de la maille, et un ensemble $E^-(s)$ de $\delta^-(s)+1$ sur le bord droit.

S'il est possible de connecter, par des chemins distincts ne se croisant que sur les diagonales, les sommets du bord gauche de la maille à ceux du bord droit, pour toutes les configurations possibles, alors le théorème est vrai. En effet, pour chaque sommet logique s, on connecte l'un des sommets physiques de $E^+(s)$ du bord gauche de la maille à l'un des sommets de $E^-(s)$ sur le bord droit. Les sommets de $E^+(s)$, de $E^-(s)$ et ceux du chemin reliant $E^+(s)$ à $E^-(s)$ constituent l'image du sommet logique s. Il reste dans chacun des ensembles $E^+(s)$ et $E^-(s)$ respectivement $\delta^+(s)$ et $\delta^-(s)$ sommets libres. Cela permet d'établir, pour tous les sommets s et s', autant de chemins de $E^+(s)$ vers $E^-(s')$ qu'il y a d'arcs dans le graphe logique partant de s pour rejoindre s'. Ces chemins constituent les images des arcs du graphe logique (cf. figure 1). Le plongement obtenu est de type un vers plusieurs voisins ; il est de charge 1 et de sommet et arc congestion 1.

Montrons maintenant qu'il est possible d'établir de tels chemins, quel que soit le graphe logique. Numérotons les sommets logiques de 1 à N. Puis, associons à chaque sommet physique de la colonne de gauche de la maille un numéro de $\{1, \ldots, N\}$ tel que le sommet physique de $E^-(s_i)$ devant être relié à $E^-(s_j)$, reçoive le numéro j. Le problème revient alors à trier les numéros de la colonne de gauche de la maille par des échanges de valeurs voisines, chaque colonne intermédiaire de la maille correspondant à une étape de ce tri. Le tri pair-impair [3, 5] permet de trier n valeurs en n étapes, ce qui donnerait une maille de taille $(n+1) \times (n+1)$ dans notre cas. Mais nous pouvons remarquer qu'il est toujours possible de relier l'ensemble $E^+(s_1)$ à l'ensemble $E^-(s_1)$ par une ligne droite en utilisant la première ligne de la maille. De même, les ensembles $E^-(s_N)$ et $E^+(s_N)$ peuvent être reliés par une ligne droite dans le bas de la maille. Cela revient donc à considérer un tri de $m-2$ valeurs, qui nécessite une maille de largeur $m-1$.

$\square$

3.3. Améliorations

L'expansion d'un plongement donné par le théorème d'existence est de l'ordre de $\frac{m^2}{|S|} = \frac{(|S|+|A|)^2}{|S|}$, ce qui n'en permet pas une utilisation pratique. Aussi avons nous cherché de meilleurs plongements pour les graphes courants tels que les hypercubes et les butterflies [3].

Le plongement de l'hypercube se fonde sur la *technique des faisceaux* qui attribue à chaque partition d'un graphe biparti un faisceau de diagonales, c'est-à-dire une série de diagonales ayant la même direction et espacées les unes des autres par une diagonale non-utilisée. L'image d'un sommet logique est une diagonale de la maille. Toute diagonale d'un faisceau peut être reliée à toutes les diagonales de l'autre faisceau par une seule arête physique. Par cette méthode,

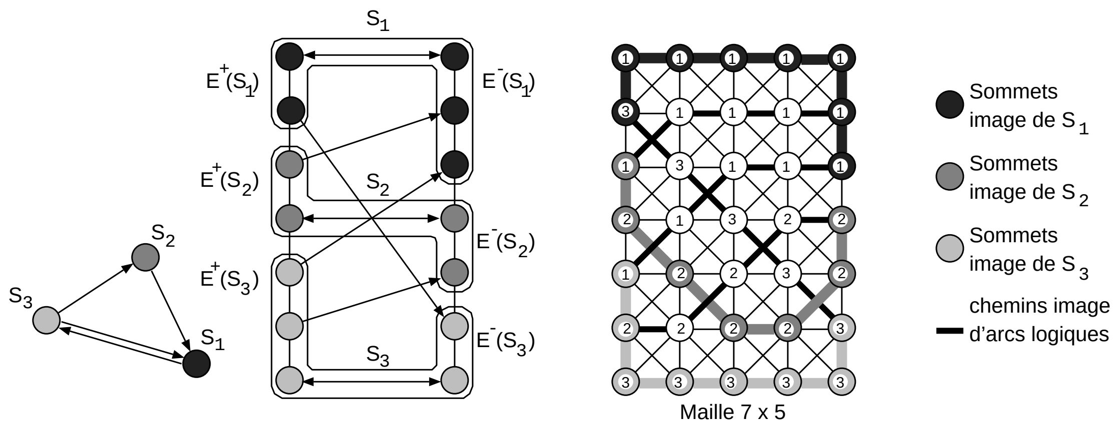

FIG. 1 –. Construction du théorème d'existence.

l'hypercube $H(n)$ peut être plongé, en respectant les conditions énoncées en 3.1, dans une maille de côté $2^n - 2$.

Le plongement du Butterfly est basé sur le tri pair-impair évoqué dans la preuve du théorème 1. Pour le Butterfly, on trie de cette façon une permutation pour chaque étage de ce graphe. On peut ainsi plonger $B(n)$ dans une maille de taille $2^{n+1} \times (2^{n+1} - n)$, ce qui constitue le plongement optimal de ce graphe, en respectant les conditions données en 3.1.

4. Conclusion

Les réseaux associatifs constituent un modèle de calculs parallèles de haut niveau, permettant d'exprimer un grand nombre d'algorithmes. Il peut être mis en œuvre avec un fort parallélisme par un réseau de cellules calculantes : la Maille Associative d'Orsay. Mais cette réalisation matérielle fige la topologie du réseau de processeurs : il s'agit d'une maille, c'est-à-dire d'une grille à 2 dimensions avec toutes ses diagonales. Nous avons montré dans cet article que cette topologie ne limitait pas le type de graphes qu'il est possible d'utiliser avec cette machine parallèle.

Bibliographie

1. J. de Rumeur. *Communication dans les réseaux de processeurs.* Masson, France, 1994.
2. B. Ducourthial. *Généralisation du modèle des Réseaux Associatifs. Mémoire de DEA Architecture Parallèle.* Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France, 1995.
3. B. Ducourthial and A. Mérigot. Graph embedding in the associative mesh model. Technical report, Institut d'Electronique Fondamentale, U. Paris-Sud, 91405 Orsay, France, 1996.
4. D. Dulac. *Contribution au Parallélisme Massif en Analyse d'Images : Une Architecture SIMD Fondée sur la Reconfigurabilité et l'Asynchronisme.* PhD thesis, U. Paris-Sud, 1996.
5. F. T. Leighton. *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures : Arrays, Trees, Hypercubes.* Morgan-Kaufmann, San Mateo, CA, USA, 1992.
6. A. Mérigot. Associative nets: A new parallel computing model. *IEEE Trans. on Computers*, may 1997 (to appear).
7. B. Monien and H. Sudborough. Embedding one interconnection network in another. *Computing Suppl.*, pages 7.257–282, 1990.