Demi-vagues utilisant des r-opérateurs : Applications et Terminaison

Bertrand Ducourthial
Laboratoire de Recherche en Informatique
Institut d'Electronique Fondamentale
Université Paris-Sud FRANCE
ducourth@lri.fr

26 juin 1998

Résumé

Nous présentons de nouveaux opérateurs assurant la terminaison des demi-vagues, des algorithmes distribués constitués d'une cascade de calculs locaux lancés depuis certains sites dans le réseau. Nous proposons diverses applications.

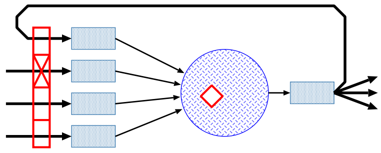
RenPar 10. 9-12 juin 1998. Strasbourg, France

Plan

- Entité calculante, réseau
- Vagues, état de l'art
- Algèbre modifiée
  - hypothèses, condition nécessaire
  - r-opérateurs
  - propriétés
  - propriétés des r-opérateurs idempotents
- Applications
  - distance, arbre en largeur
  - arbre des chemins les plus légers
  - arbre en profondeur
- Complexité, sûreté
- Conclusion

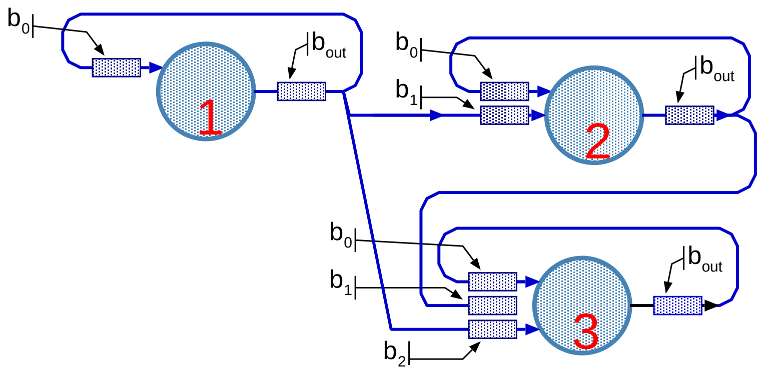
Entité calculante, Réseau

Entité



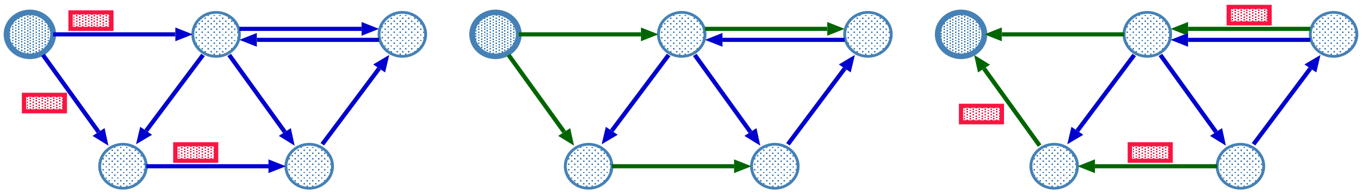
- $x_{\text{out}} \leftarrow x_0 \diamond \cdots \diamond x_{\delta^-(v)}$
- $x_{\text{out}} \leftarrow \diamond\left(x_0, \ldots, x_{\delta^-(v)}\right)$

Réseau



- système asynchrone / ABD (Tel 1994)
- communications one-to-many
- hypothèses de sûreté faibles selon l'opérateur
- topologie dynamique à partir d'un graphe de base
- détection de terminaison

Vagues et demi-vagues



- Echo algorithms (Chang, 1982)
- PI / PIF (Segall, 1983)
- réseau orienté (Tel, 1987)
- vague, étude sur différentes topologies (Raynal et Hélary, 1988)
- Total algorithms (Tel, 1991)
- Wave algorithms (Tel, 1994)

$\rightsquigarrow$ unification : s-opérateur (infimum)

- associatif, commutatif, idempotent
- ordre partiel $x \preceq_\star y \Leftrightarrow x \star y = x$
- minimum
- $\wedge$, $\vee$, $\mathbf{min}$, $\mathbf{max}$, $\mathbf{gcd}$, $\mathbf{lcm}$, $\cap$, $\cup$
- Théorème $b_{\text{out}}(v) \leftarrow \star \left\{ b_0^0(u), u \in \widehat{\Gamma_G^{-1}}(v) \right\}$

Algèbre modifiée 1. Hypothèses

Hypothèses de base

- A : ensemble des données
- loi interne sur A :

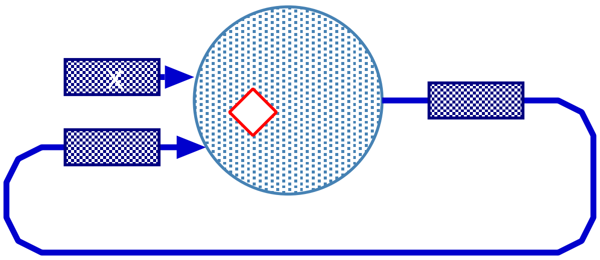
  $\forall \diamond \in \Delta, \forall x, y \in A, \quad \exists! z \in A$ tel que $x \diamond y = z$
- associativité à gauche :

  $\forall \diamond \in \Delta \quad (x \diamond y) \diamond z = x \diamond y \diamond z$
- élément neutre à droite :

  $\forall \diamond \in \Delta \quad \exists e_\diamond \in A,$ tel que $\forall x \in A, \quad x \diamond e_\diamond = x$
- simplification à gauche (fidélité)

  $\forall \diamond \in \Delta, \forall y, z \in A, \quad (\forall x \in A, \quad x \diamond y = x \diamond z) \quad \Leftrightarrow \quad (y = z)$

Condition nécessaire : idempotence (d'ordre k)



Algèbre modifiée 2. r-opérateurs

- Nouvelles propriétés

r-associativité	$r : A \to A$ $(x \diamond y) \diamond r(z) = x \diamond (y \diamond z)$
exemple :	dans $\mathbb{Z}$, $x \oplus y \equiv x + 2y$ avec $r(z) = 2z$
r-commutativité	$r : A \to A$ $r(x) \diamond y = r(y) \diamond x$
exemple :	$\mathbf{op}(x) - y = -x - y = \mathbf{op}(y) - x$
r-idempotence	$r : A \to A$ $r(x) \diamond x = r(x)$
exemple :	$x\mathbf{p}y = 0$ si x et y de même parité, $r(2k) = 0$, $r(2k+1) = 1$, $k \in \mathbb{Z}$

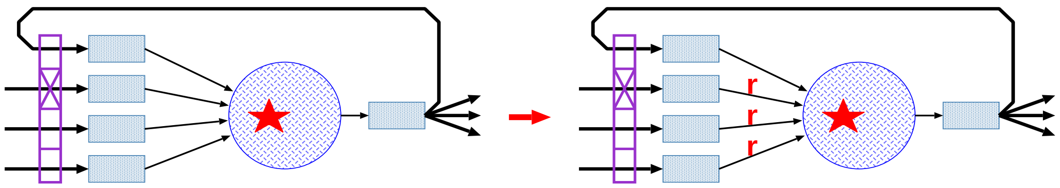
- r-opérateurs

$\triangleleft$ est un r-opérateur sur A s'il existe $r : A \to A$ bijective tel que $\triangleleft$ soit :

r-associatif	$(x \triangleleft y) \triangleleft r(z)$	$=$	$x \triangleleft (y \triangleleft z)$
r-commutatif	$r(x) \triangleleft y$	$=$	$r(y) \triangleleft x$
r-idempotent	$r(x) \triangleleft x$	$=$	$r(x)$

Algèbre modifiée 3. Propriétés

- Propriétés des r-opérateurs :
  - $r(x) = e_\triangleleft \triangleleft x$
  - $\mathrm{Ker}(r) = \{t \in A, r(t) = e_\triangleleft\} = \{e_\triangleleft\}$
  - r isomorphisme de $(A, \triangleleft)$: $r(x \triangleleft y) = r(x) \triangleleft r(y)$
  - $\diamond$ r-associatif et r-idempotent avec r bijective $\Rightarrow$ $x \diamond y \diamond y = x \diamond y$
  - $\triangleleft$ r-opérateur $\Rightarrow$ 2-commutatif : $x \triangleleft y \triangleleft z = x \triangleleft z \triangleleft y$
- s-opérateur associé :
  - Théorème $\triangleleft$ r-opérateur sur A avec la bijection $r : A \to A \Rightarrow \star$ defini par $x \star y = x \triangleleft r^{-1}(y)$ est un s-opérateur de Δ.
  - $\triangleleft$ r-opérateur $\rightsquigarrow$ $\preceq_\star$ défini par $x \triangleleft r^{-1}(y) = x$
  - r est un isomorphisme de $(A, \star)$: $r(x \star y) = r(x) \star r(y)$
  - $e_\triangleleft = e_\star$
- Intérêt :



Algèbre modifiée 4. Propriétés (suite)

r-opérateurs idempotents

- $\triangleleft$ est idempotent $\Rightarrow \forall x \in A,\ \forall k \in \mathbb{N},\ x \preceq_\star r^k(x)$
- $\forall x \in A, x \preceq_\star r(x) \Leftrightarrow \star\ (r^{-1})$-idempotent
  $\Leftrightarrow \triangleleft$ idempotent

Construction des r-opérateurs

Théorème $\triangleleft$ et $\star$ opérateurs binaires sur A,

$$r : A \to A,\ x \triangleleft y = x \star r(y)$$

alors équivalence entre

- r est surjective, $\triangleleft$ admet un élément neutre à droite $e_\triangleleft \in A$ et la simplification à gauche, et est r-associatif, r-commutatif et r-idempotent sur A
- $\triangleleft$ est un r-opérateur sur A qui admet la simplification à gauche et un élément neutre à droite $e_\triangleleft \in A$
- $\star$ est un s-opérateur sur A qui admet un élément neutre $e_\star$, et r est un isomorphisme de $(A, \star)$

Exemple

dans $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\star = \mathbf{min}$ et $r(x) = x + 1$

Algèbre modifiée 5. Théorème

- Théorème Toute vague basée sur un r-opérateur idempotent $\triangleleft$ termine sur tout réseau, quelques soient les valeurs initiales.

$$\forall v \in V, \quad b_{\text{out}}(v) = \star \left\{ r^{\mathrm{d}_G(u,v)}\left(b_0^0(u)\right), u \in \widehat{\Gamma_G^{-1}}(v) \right\}$$

- Lemme *suppression des doubles*
  $x \triangleleft x = x$, $x \triangleleft r^k(x) = x$, ...
  $a \triangleleft r^p(x) \triangleleft r^q(x) = a \triangleleft r^{\mathbf{min}(p,q)}(x)$, ...

- Lemme *distance*
  $u \in \widehat{\Gamma_G^{-1}}(v), \mathrm{d}_G(u,v) = k$
  $\Leftrightarrow$ l'expression résultat en v contient $r^k\left(b_0^0(u)\right)$

Applications 1. Possibilités

- s-opérateurs

  $$b_{\text{out}}(v) \leftarrow \star\left\{b_0^0(u), u \in \widehat{\Gamma_G^{-1}}(v)\right\}$$

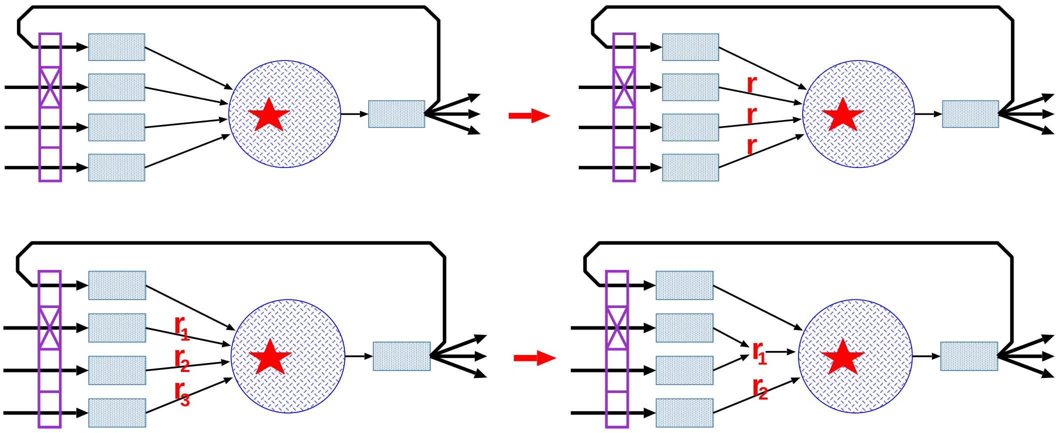
- r-opérateurs

  $$b_{\text{out}}(v) = \star\left\{r^{\mathrm{d}_G(u,v)}\left(b_0^0(u)\right), u \in \widehat{\Gamma_G^{-1}}(v)\right\}$$

- r-opérateurs n-aires

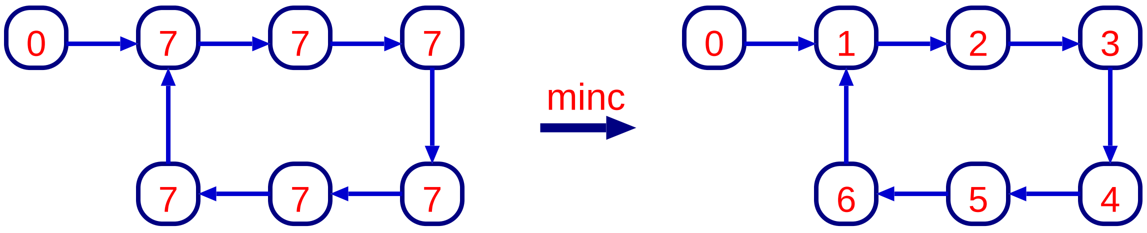
  $$b_{\text{out}}(v) = \star\left\{r_P\left(b_0^0(u)\right), u \in \widehat{\Gamma_G^{-1}}(v), P \text{ chemin de } u \text{ à } v\right\}$$

- r-opérateurs généralisés
- Nouvelles possibilités pour les vagues

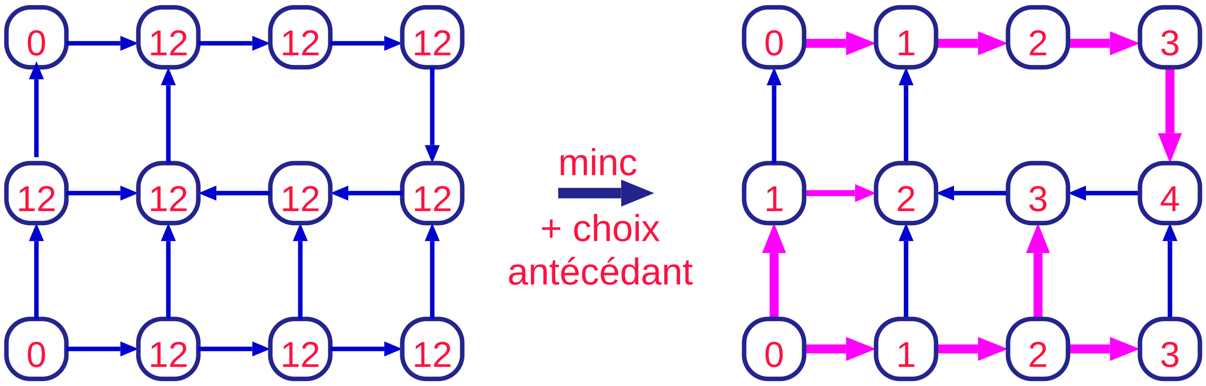


Application 2. Distance, arbre en largeur

- $\mathbf{minc}(x, y) = \mathbf{min}(x, y + 1)$ dans $\overline{\mathbb{Z}}$



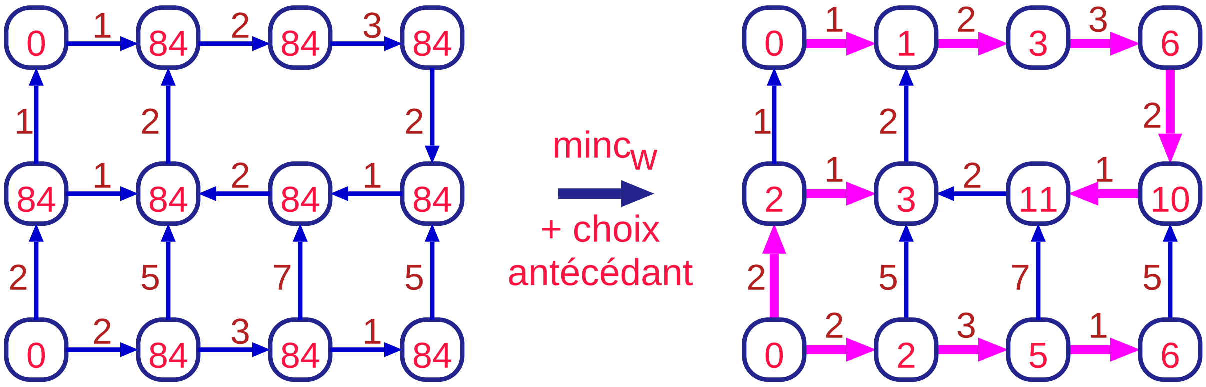
- Arbre en largeur, plusieurs sources



Application 3. Arbre des chemins les plus légers

- Single source shortest path
  - graphe avec pondération des arêtes $w\left((u,v)\right)$
  - $\mathbf{minc}_w[x_0, \ldots, x_n] = \mathbf{min}[x_0, r_v^{u_1}(x_1), \ldots, r_v^{u_n}(x_n)]$
    $r_v^{u_i}(x) = x + w\left((u_i, v)\right)$

- Exemple

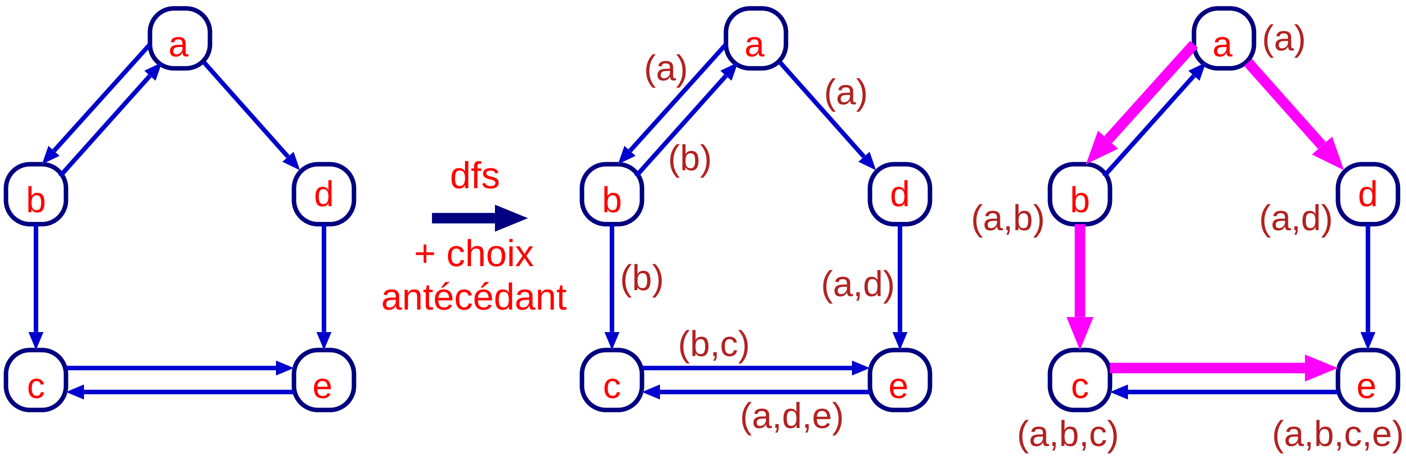


Application 4. Arbre en profondeur

Opérateur dfs :

- sommets complètement ordonnés (calcul non anonyme)
- A : ensemble des listes de sommets
- $\star$: ordre lexicographique sur les listes
  exemples : $(a, b, d) \star (a, b, c, d) = (a, b, c, d)$
  $(a, a) \star (a) = (a)$
- $r : A \to A$, $r(l) = l \cup (v)$ sur le sommet v
- $l \star r(l) = l$ donc $\lhd$ défini par $l \lhd l' = l \star r(l')$ est idempotent

Application :



Complexité, Sûreté

- Temps de convergence (ABD) :
  - fabrication du résultat de v sur u
  - acheminement du résultat jusqu'en v
- En règle générale, lié à l'opérateur
  exemples : $\mathbf{min}(x+1, y+1, 100)$, contention
  - s-opérateur : ordre total / ordre partiel
  - r-opérateur : idem (même calcul de base)

- Complexité en message : complexité en temps $\times|E|/$ temps minimum pour émettre un message.

- Propriété des liens
  - Boucles dans le réseau
  - Duplication (idempotence)
  - Désordonnement (asynchronisme supporté)
  - $\rightsquigarrow$ perte facilement supportée (ABD)

Conclusion

- Nouveaux opérateurs : les r-opérateurs
- $\{$ s-opérateurs $\} \subsetneq \{$ r-opérateurs $\}$
- Condition nécessaire : idempotence (d'ordre k)
- Les r-opérateurs idempotents assurent encore la terminaison des vagues.
- $\rightsquigarrow$ extension des vagues
- Extension aux r-opérateurs n-aires et généralisés
- Applications :
  - distance, arbre des plus courts chemins
  - arbre des chemins les plus légers
  - arbre en profondeur
  - etc.
- Intérêts
  - Algorithmes distribués sous le formalisme simple des vagues
  - Simplification du protocole, hypothèses de sûreté faibles
  - Auto-stabilisation