Programmation Par Contraintes

Présentation générale

David Savourey

CNRS, École Polytechnique

inspiré des cours de Philippe Baptiste et Ruslan Sadykov

Organisation du cours

- 2 intervenants : David Savourey, Éric Nespoulous (IBM)
- vendredi 26 janvier : Généralités (DS)
- vendredi 02 février : Consistances (DS)
- vendredi 09 février : Apprentissage (DS)
- vendredi 16 février : Solveur PPC IBM (EN)
- vendredi 23 février : Étude d'un article (DS)
- vendredi 01 mars : Soutenances de projet (DS)

Généralités sur la PPC

- Problème de décision : la réponse est “oui” ou “non”
- Problème d’optimisation : minimiser ou maximiser une certaine fonction objectif
- PPC naturellement faite pour la décision

- trouver une solution (décision)
- trouver toutes les solutions
- trouver une solution optimale (optimisation)

- ex : trouver un plus court chemin
- on résout successivement plusieurs problèmes de décision (un chemin de moins de 60 ? de 58 ? de 40 ? de 52 ? de 55 ? etc.)
- en général par dichotomie

Méthodes pour résoudre les problèmes combinatoires

- Programmation mathématique :
  - linéaire
  - linéaire en nombres entiers
  - quadratique
  - etc.
- Méta-heuristiques :
  - recherche locale
  - algos génétiques
  - méthodes tabous
  - recuit simulé
  - etc.
- Programmation Par Contraintes

- on travaille sur un problème de décision
- le langage d'expression est très peu contraint
- on se sert des contraintes pour accélerer la résolution

PPC : Définitions

- En PPC, on cherche à résoudre un CSP. Ce dernier est donné par le triplet $\langle X, D, C \rangle$ où :
  - X est un ensemble de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$;
  - D est un ensemble de domaines $D_1, D_2, \ldots, D_n$;
  - C est un ensemble de contraintes $C_1, C_2, \ldots, C_m$.
- Le domaine D_i est l'ensemble des valeurs possibles pour la variable x_i.
- Chaque contrainte C_j se définit par :
  - son arité : le nombre de variable sur lesquelles elle porte ;
  - la liste de ces variables ;
  - l'ensemble des tuples qui la satisfont.

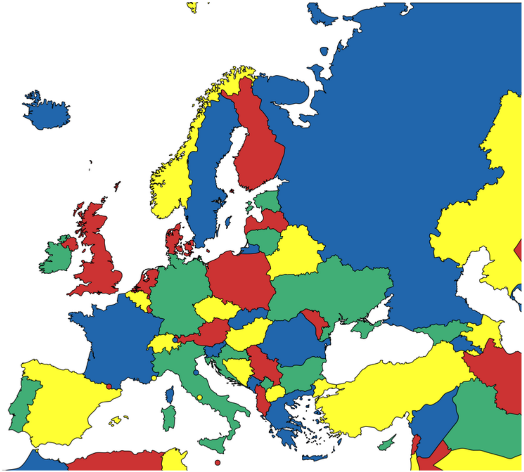
- variables : A, B, C, D
- domaines :
  - $D_A = \{1, 4, 5, 8\}$
  - $D_B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$
  - $D_C = \{4, 8, 7, 9\}$
  - $D_D = \{1, 4, 5, 7, 8, 9\}$
- contraintes :
  - $C_1(A, C) : \{(1, 7), (1, 9), (5, 9)\}$
  - $C_2(A, D) : \{(1, 1), (1, 5), (5, 5), (5, 9), (8, 9)\}$
  - $C_3(C, D) : \{(4, 1), (8, 1), (9, 7)\}$
  - $C_4(B, D) : \{(2, 7), (2, 9), (5, 8), (7, 9), (9, 9)\}$
- Ce CSP est binaire : toutes les contraintes portent sur exactement 2 variables.

- Il est toujours possible de coder les contraintes “en extension”, c’est-à-dire par un ensemble de tuples.
- Les solveurs de PPC utilisent par défaut un codage en extension.
- Définir une contrainte en intension veut dire utiliser des opérateurs dont la sémantique est connue.
- Par exemple, si $D_x = [1,5]$ et $D_y = [2,4]$, alors la contrainte en intension “$x \neq y$” est équivalente à $\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(4,2),(4,3),\ (5,2),(5,3),(5,4)\}$.

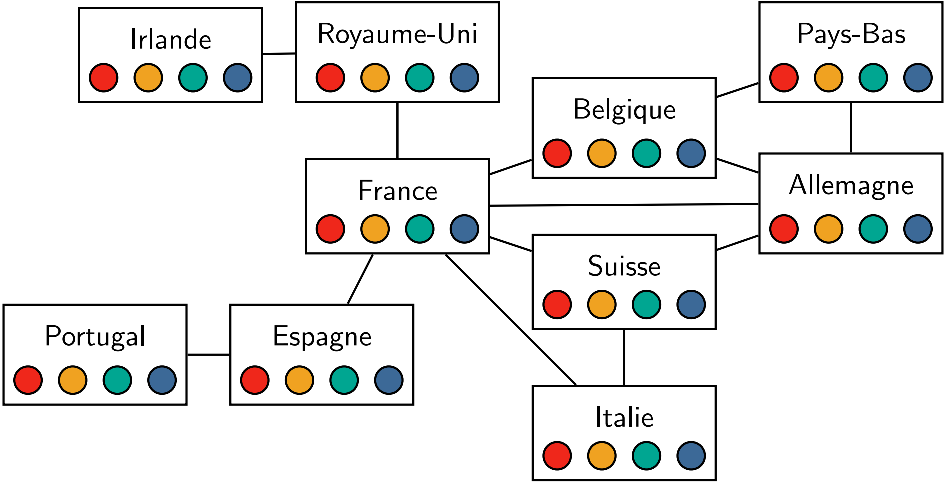
- Une instanciation est une affectation complète de valeurs aux variables. Par exemple, pour le CSP précédent, $\{\langle A, 1\rangle, \langle B, 7\rangle, \langle C, 4\rangle, \langle D, 9\rangle\}$.
- Une instanciation est une solution valide si les valeurs données aux variables sont telles que toutes les contraintes sont vérifiées.

Modélisations en CSP

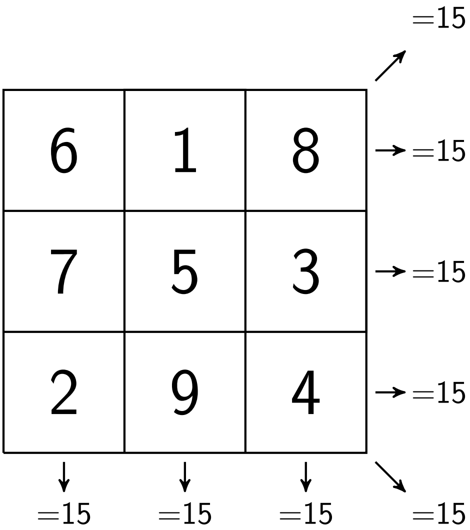
- graphe planaire
- 2 voisins doivent avoir des couleurs différentes
- trouver une solution avec 4 couleurs seulement



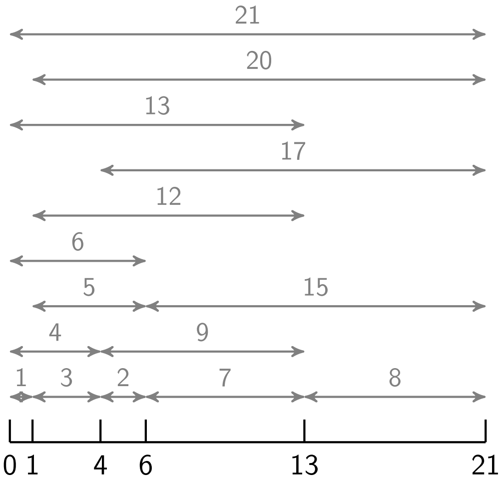
- une variable par pays
- toutes les variables ont pour domaine $\{R, B, J, V\}$.
- si 2 pays x et y sont voisins, on met la contrainte $x \neq y$.


Irlande
Royaume-Uni
Pays-Bas
Belgique
France
Allemagne
Suisse
Portugal
Espagne
Italie

- sur un carré de $n \times n$
- placer les nombres de 1 à n^2
- toutes les rangées de sommes égales
- quel modèle ?

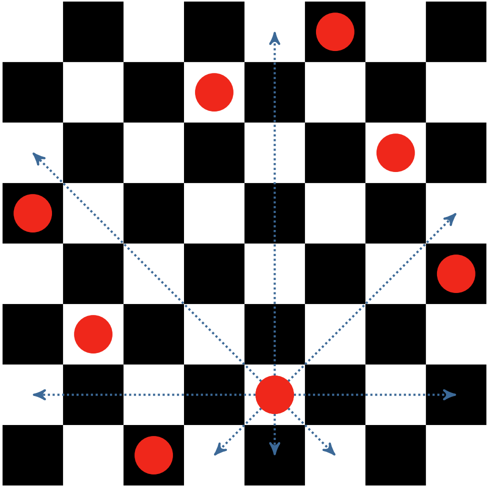


- $x_1, x_2, \ldots, x_{n^2}$
- $D_1 = D_2 = D_{n^2} = [1, 2, \ldots, n^2]$
- $\forall i \neq j \in [1, n^2]^2, x_i \neq x_j$
- $\forall r \in \{L, C, D\}, \sum_{x_i \in r} x_i = n(n^2 + 1)/2$



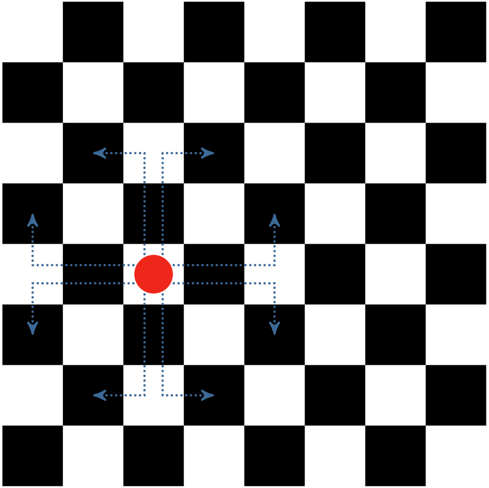
- fabriquer une régle avec n marques
- toutes les distances entre les marques doivent être différentes
- version optim : en minimisant la valeur de la plus grande marque.

- variable x_i : valeur de la ième plus petite marque
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- $D_1, D_2, \ldots, D_n = [1, UB(n)]$
- $x_1 = 1$
- $\forall i \in [2, n], x_i > x_{i-1}$
- $\forall (i < j) \neq (k < l), x_j - x_i \neq x_l - x_k$



- sur une grille de $n \times n$ cases
- placer n reines
- aucune reine ne doit pouvoir manger une autre reine

- variable c_i : indice de la colonne occupée par la reine qui se trouve sur la ième ligne
- $c_1, c_2, \ldots, c_n$
- $D_1, D_2, \ldots, D_n = [1, n]$
- $\forall i \neq j \in [1, n]^2, c_i \neq c_j$
- $\forall i < j \in [1, n]^2, c_j - c_i \neq j - i$
- $\forall i < j \in [1, n]^2, c_i - c_j \neq j - i$



Le problème dit du cavalier d'Euler peut s'énoncer comme suit : Comment faire visiter par un cavalier chaque case d'un échiquier pour le faire revenir à son point de départ sans jamais repasser sur la même case ?

- on numérote les cases de 1 à n
- on note p_i la position du cavalier à la ième étape
- $p_1, p_2, \ldots, p_n$
- $D_1, D_2 \ldots, D_n = [1, n]$
- $\forall i \neq j \in [1, n]^2, p_i \neq p_j$
- $\forall i \in [2, n], p_i \in V(p_{i-1})$
- $p_n \in V(p_1)$
- La relation $x \in V(y)$ est décrite en extension :

$$\{(1, 11), (1, 18), (2, 12), (2, 17), (2, 19), \ldots\}$$

Binarisation

CSP binaire, CSP booléen

On dira qu'un CSP est binaire lorsque toutes les contraintes sont d'arité 2.

On dira qu'un CSP est booléen lorsque tous les domaines des variables sont $\{0, 1\}$.

- on peut toujours binariser un CSP
- la plupart des techniques développées travaillent sur des CSP binaires
- dans la suite, on considèrera des CSP binaires uniquement

Soit le CSP suivant :

- A, B, C, D
- $D_A = D_B = D_C = D_D = \{0, 1, 2\}$
- $A + B + C = 2,\ B + C + D = 5$

Version binaire équivalente :

- A, B, C, D, X, Y
- $D_A = D_B = D_C = D_D = \{0, 1, 2\}$, $D_X = \{011, 101, 110, 002, 020, 200\}$ et $D_Y = \{122, 221, 212\}$
- $C(A, X) = \{(0, 011), (0, 002), (0, 020), (1, 101), (1, 110), (2, 200)\}$
  $C(B, X) = \{(1, 011), (0, 002), (2, 020), (0, 101), (1, 110), (0, 200)\}$
  $C(C, X) = \{(1, 011), (2, 002), (0, 020), (1, 101), (0, 110), (0, 200)\}$
  $C(B, Y) = \{(1, 122), (2, 221), (2, 212)\}$ $C(C, Y) = \{(2, 122), (2, 221), (1, 212)\}$
  $C(D, Y) = \{(2, 122), (1, 221), (2, 212)\}$

Soit le CSP suivant :

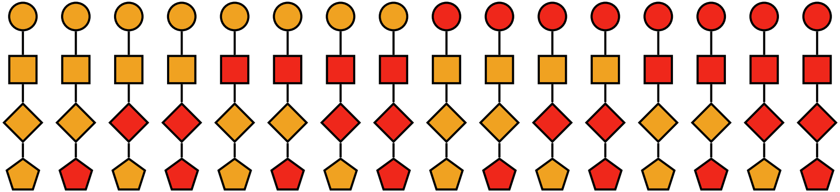
- A, B, C, D
- $D_A = D_B = D_C = D_D = \{0, 1, 2\}$
- $A + B + C = 2,\ B + C + D = 5$

Version binaire équivalente :

- $X_1, X_2,$
  $D_1 = [002, 011, 020, 101, 110, 200]$ $A + B + C = 2$
  $D_2 = [122, 212, 221]$ $B + C + D = 5$
- $C(X_1, X_2) = [(011, 122), (110, 122), (020, 212), (020, 221)]$ B
- $C(X_1, X_2) = [(002, 122), (002, 221), (011, 212), (101, 212)]$ C

Méthodes de résolution

pour chaque instantiation complète *i* **faire**
  si *i* respecte toutes les contraintes **alors**
    Retourner *VRAI* ;
Retourner *FAUX* ;



Données : Une instantiation partielle i

si i **viole une contrainte alors**

  Retourner *FAUX* ;

si i **est complète alors**

  Retourner *VRAI* ;

Choisir une variable x non instanciée ;

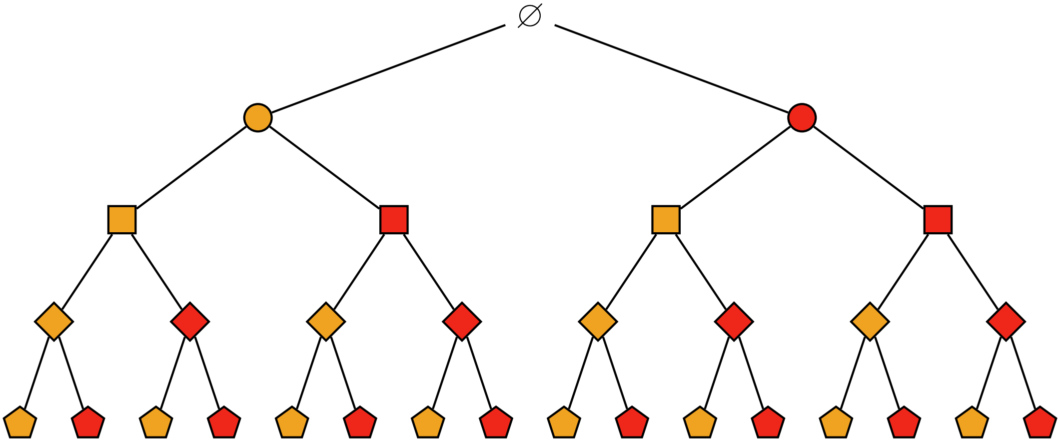
pour chaque valeur v **dans** D_x **faire**

  $j \leftarrow i \cup \langle x, v \rangle$;

  si $Backtrack(j)$ **alors**

    Retourner *VRAI* ;

Retourner *FAUX* ;



Exercices

```
  S E N D
+ M O R E
---------
M O N E Y
```

- chaque lettre correspond à un chiffre compris entre 0 et 9 différent
- les nombres ainsi formés ne peuvent pas commencer par 0

Deux modèles possibles

Modèle sans retenues :

- variables : S,E,N,D,M,O,Y,R
- domaines : [0,9]
- alldiff sur les variables
- $S \neq 0,\ M \neq 0$
- 1000S+100E+10N+D+1000M+100O+10R+E= 10000M+1000O+100N+10E+Y

Modèle avec retenues :

- variables : S,E,N,D,M,O,Y,R,r_1,r_2,r_3,r_4
- domaines lettres : [0,9], domaines retenues : [0,1]
- alldiff sur les lettres
- $D + E = Y + 10r_1$
- $r_1 + N + R = E + 10r_2$
- $r_2 + E + O = N + 10r_3$
- $r_3 + S + M = O + 10r_4$
- $r_4 = M$

Cinq maisons consécutives, de couleurs différentes, sont habitées par des hommes de différentes nationalités. Chacun possède un animal différent, a une boisson préférée différente et fume des cigarettes différentes. De plus, on sait que :

- Le norvégien habite la première maison,
- La maison à coté de celle du norvégien est bleue,
- L'habitant de la troisième maison boit du lait,
- L'anglais habite la maison rouge,
- L'habitant de la maison verte boit du café,
- L'habitant de la maison jaune fume des kools,
- La maison blanche se trouve juste après la verte,
- L'espagnol a un chien,
- L'ukrainien boit du thé,
- Le japonais fume des cravens,
- Le fumeur de old golds a un escargot,
- Le fumeur de gitanes boit du vin,
- Le voisin du fumeur de Chesterfields a un renard,
- Le voisin du fumeur de kools a un cheval.

Qui boit de l'eau ? À qui appartient le zèbre ?