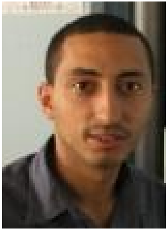
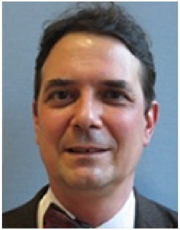
Les fonctions de croyance et le principe d'inclusion/exclusion

Felipe Aguire and **Sebastien Destercke** and Mohamed Sallak and Walter Schön

Heuristic and Diagnosis for Complex Systems (HEUDIASYC) laboratory, Compiegne, France

Rencontres francophones sur la logique floue et ses applications - 2012

Les acteurs

Incertitude et imprécision

Probabilités classiques modélisent mal la notion d'incomplétude

- données manquantes, imprécises ou en faible nombre
- incertitude subjective sur quantité fixe mais mal connue
- ...

à l'inverse, ensembles ne peuvent modéliser que l'imprécision

La solution, mélanger les deux :

- **Théorie des fonctions de croyance** $\simeq$probas sur des ensembles
- **Probabilités imprécises** $\simeq$ensemble de probas
- ...

Les deux peuvent se résumer par une mesure inférieure $\underline{P}$

Imprécision et calculs

Constat

Calcul avec fonctions de croyances et probas imprécises plus difficile

- Modèles plus complexes
- **Propriétés utiles des probas pas satisfaites en général**

Si $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_K | A_i \subseteq \mathcal{X}\}$ collection d'événement, P probabilité

$$P(\cup_{i=1}^{K} A_i) = \sum_{A_i \in \mathcal{A}} P(A_i) - \sum_{A_i, A_j \in \mathcal{A}} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{N+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_K)$$
$$= \sum_{\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{|\mathcal{I}|+1} P(\cap_{A \in \mathcal{I}} A)$$

Mais, dans le cas d'une mesure inférieure $\underline{P}$, on a seulement

$$\underline{P}(\cup_{i=1}^{K} A_i) \geq \sum_{\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{|\mathcal{I}|+1} \underline{P}(\cap_{A \in \mathcal{I}} A)$$

avec l'inégalité en général stricte.

The 64000 $ question

¿

Si $\underline{P}$ est une fonction de croyance, sous quelles conditions

$$\underline{P}(\cup_{i=1}^{K} A_i) \geq \sum_{\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{|\mathcal{I}|+1} \underline{P}(\cap_{A \in \mathcal{I}} A)$$

devient

$$\underline{P}(\cup_{i=1}^{K} A_i) = \sum_{\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{|\mathcal{I}|+1} \underline{P}(\cap_{A \in \mathcal{I}} A)$$

?

Cadre

- Espace $\mathcal{X}$ fini
- Masse $m : 2^{\mathcal{X}} \to [0,1]$ avec

$$\sum_{E \subseteq \mathcal{X}} m(E) = 1 \textbf{ et } m(\emptyset) = 0$$

- Si $m(E) > 0$, E est élément focal
- Deux mesures duales

$$\underline{P}(A) = \sum_{E, E \subseteq A} m(E)$$

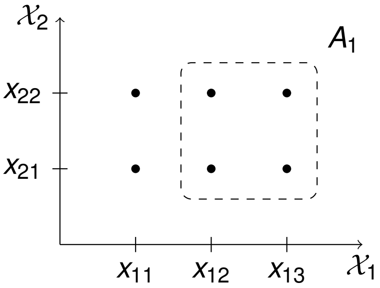
$$\overline{P}(A) = \sum_{E, E \cap A \neq \emptyset} m(E) = 1 - \underline{P}(A^c)$$

Hypothèses

- $\mathcal{X} = \mathcal{X}^1 \times \ldots \times \mathcal{X}^N$ produit Cartésien
- $m(A) > 0$ seulement pour ensemble

$$A = A^1 \times \ldots \times A^N$$

avec $A^i \subseteq \mathcal{X}^i \rightarrow$ éléments focaux=produits Cartésiens



$m(A_1) \geq 0$ $m(A_2) = 0$

(trop) restrictives ?

En pratique, m peut se construire à partir de

- $m_1, \ldots, m_N$ marginales sur dimensions $\mathcal{X}^1, \ldots, \mathcal{X}^N$ +
- hypothèses d'(in)dépendance des ensembles aléatoires

En particulier :

- **Fiabilité** : m_i concerne incertitude sur état du composant i
- Logique propositionnelle : m_i incertitude sur la valeur d'une variable i

N.B. : approche peut s'étendre au cas où $\underline{P}$ est une capacité 2-monotone

Résultat principal

Soit la collection $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_K | A_i \subseteq \mathcal{X}\}$, alors on a

$$\underline{P}(\cup_{i=1}^{K} A_i) = \sum_{\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{|\mathcal{I}|+1} \underline{P}(\cap_{A \in \mathcal{I}} A)$$

Si, pour toute paire A_i, A_j, il n'y a pas de sous-ensemble

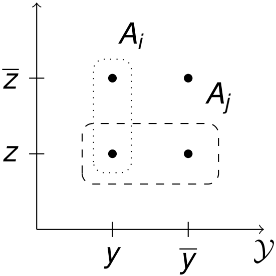
$$B_1 \in A_i \setminus A_j \text{ et } B_2 \in A_j \setminus A_i$$

tel que $B = B_1 \cup B_2$ soit un produit Cartésien

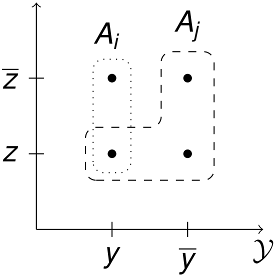
$$B = B^1 \times \ldots \times B^N$$

avec $B^i \subseteq \mathcal{X}^i$

Quelques exemples



Oui

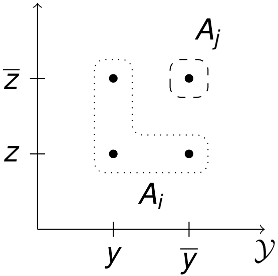


Non

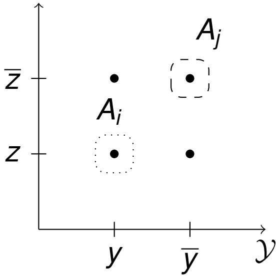
$(y, \overline{z}) \cup (\overline{y}, z)$ non Cartésien

$(y, \overline{z}) \cup (\overline{y}, \overline{z})$ Cartésien

Quelques exemples



Non



Oui

$(y, \overline{z}) \cup (\overline{y}, \overline{z})$ Cartésien

$(y, z) \cup (\overline{y}, \overline{z})$ non Cartésien

Un cas particulier : fiabilité et formules CNF

- chaque dimension $\mathcal{X}^i = \{x^i, \neg x^i\}$ binaire
- chaque élément A de $\mathcal{A}$ produit Cartésien

Theorem

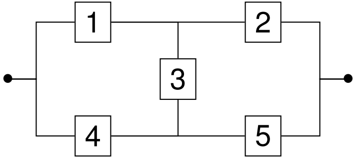
Egalité d'inclusion/exclusion pour $\underline{P}$ *ssi pour tout* $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ *soit*

- $A_i \cap A_j \neq \emptyset$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ *et* $\exists p, q$ *tels que* $A_i^p \neq A_j^p$ *et* $A_i^q \neq A_j^q$

Donnent contraintes sur formes normales conjonctives de logique

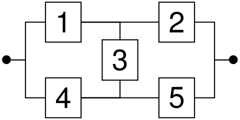
Fiabilité d'un système : problème

- $\mathcal{X}^i = \{x^i, \neg x^i\}$: composant X_i fonctionne x^i ou pas $\neg x^i$
- fonction $\phi : \mathcal{X} \to \{0, 1\}$ décrit état global selon état composants
- problème : évaluer $\underline{P}(\phi^{-1}(1))$ à partir de l'incertitude sur composants



Fiabilité d'un système : solution

- chemin minimal : ensemble minimal $\mathcal{P}$ de composant assurant $\phi() = 1$
- chaque chemin minimal $\mathcal{P}_i$ induit produit Cartésien $A_{\mathcal{P}_i}$
- puisque $\{x^1, \dots, x^N\} \in A_{\mathcal{P}_i}$, résultat s'applique



$$\mathcal{P}_1 = [1, 2] \quad \mathcal{P}_2 = [4, 5] \quad \mathcal{P}_3 = [1, 3, 5] \quad \mathcal{P}_4 = [2, 3, 4]$$

$$\begin{aligned}\underline{P}(\phi^{-1}(1)) = & \underline{P}(\{x^1, x^2\}) + \underline{P}(\{x^4, x^5\}) + \underline{P}(\{x^1, x^3, x^5\}) + \underline{P}(\{x^2, x^3, x^4\}) \\ & - \underline{P}(\{x^1, x^2, x^4, x^5\}) - \underline{P}(\{x^1, x^2, x^3, x^5\}) - \underline{P}(\{x^1, x^2, x^3, x^4\}) \\ & - \underline{P}(\{x^1, x^3, x^4, x^5\}) - \underline{P}(\{x^2, x^3, x^4, x^5\}) \\ & + 2\underline{P}(\{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\})\end{aligned}$$

Conclusions, résultats supplémentaires et perspectives

En conclusion

- Principe d'exclusion/inclusion pour fonctions de croyance
- Conditions contraignantes mais utiles (fiabilité)

Mais aussi

- Fiabilité : extension au chemin/coupe minimales en multi-états
- Egalité dépend de la syntaxe (exemple : Xor)

Et enfin

- Extension à événements $\{Y \leq r\}$ pour fonctions $f(X^1, \ldots, X^N) = Y$ monotones immédiat
- Méthode de décomposition syntaxique d'une formule propositionnelle en CNF pour appliquer ce principe ? (e.g., BDD donnent décomposition invalide)