Facteurs d'importance imprécis : quelques idées pour les exploiter

Sébastien Destercke et Mohamed Sallak
Université de Technologie de Compiègne,
UMR CNRS 7253, Heudiasyc, France
Email : {sebastien.destercke, mohamed.sallak}@utc.fr

***Résumé*—Le calcul des facteurs d'importance des composants d'un système joue un rôle important dans les analyses de fiabilité. Lorsque les probabilités de défaillance des composants sont mal connues, soit à cause d'un retour d'expérience insuffisant ou parce qu'elles sont estimées par des experts sous forme d'intervalles, les outils issus des fonctions de croyance permettent de gérer ce manque de connaissance. Dans ce cas, les facteurs d'importance usuels (Birnbaum, RAW, RRW) deviennent imprécis et sont représentés sous forme d'intervalles. Dans cet article, nous proposons des solutions pour exploiter ces facteurs d'importance imprécis afin d'établir un ordre d'importance des composants en terme de fiabilité.**

***Index Terms*—Facteurs d'importance, Fonctions de croyance, Dempster-Shafer, Incertitude épistémique, Imprécision.**

I. Introduction

Lors de l'analyse de fiabilité des systèmes, il est essentiel de pouvoir identifier les composants qui jouent un rôle plus important que d'autres en terme de fiabilité. En pratique, cette identification se fait au moyen des facteurs d'importance, qui cherchent à mesurer l'effet du fonctionnement ou de la défaillance d'un composant sur la défaillance ou le fonctionnement du système complet. Les facteurs d'importance d'un composant cherchent donc à mesurer l'amplitude de modification de la probabilité de fonctionnement ou de défaillance du système, conditionnellement à l'état du composant étudié.

La notion de facteur d'importance a été introduite par Birnbaum [4] et développée par de nombreux auteurs. Lambert dans [10] en a dressé une liste assez complète. Les facteurs d'importance suivent donc le même principe que les analyses de sensibilité. Il existe de nombreux facteurs d'importance dans la littérature. Dans ce papier, nous allons étudier trois facteurs couramment utilisés, et dont les définitions en terme de fiabilité sont données par :

– Le facteur d'importance de Birnbaum (B) qui représente la variation de la fiabilité du système en fonction de la fiabilité du composant i.
– Le facteur de diminution du risque (Risk Reduction Worth, RRW) qui représente l'effet du remplacement d'un composant i par un composant parfait sur la fiabilité du système complet. Il indique ainsi la diminution maximum de la défiabilité du système que l'on peut réaliser en améliorant la fiabilité du composant i.
– Le facteur d'augmentation du risque (Risk Achievement Worth, RAW) qui représente une mesure de la participation de la défaillance du composant à la défaillance du système complet. Il représente ainsi, l'importance qu'il y a à maintenir le niveau de fiabilité du composant i pour maintenir la fiabilité du système complet. Lorsque le facteur d'importance RAW d'un composant est élevé cela veut dire qu'il y a une mauvaise immunité du système vis-à-vis de la défaillance de ce composant.

Notons que ces trois facteurs peuvent être aussi définis en terme de disponibilité ou de maintenabilité. Dans ce papier, on s'intéresse uniquement aux définitions en terme de fiabilité.

Lorsque l'information concernant les composants est pauvre (manque de données, retour d'expérience,ce insuffisant, défaillances rares, etc.), il est nécessaire d'intégrer cette méconnaissance à l'analyse des systèmes. L'incertitude générée par ce manque d'information est souvent appelée épistémique, par opposition à l'incertitude aléatoire qui caractérise le comportement intrinsèquement aléatoire des composants. De nombreux auteurs ont reconnu le fait que les probabilités ne sont pas très bien adaptées à la modélisation de la notion de méconnaissance et l'incertitude épistémique [2, 1]. Ils ont donc proposé des cadres mélangeant théorie des ensembles et probabilités, afin de pouvoir mieux gérer l'incertitude épistémique. La théorie des fonctions de croyance, qui représente un cadre plus générale que la théorie des probabilités classique, est la théorie qui sera utilisée pour gérer les imprécisions dans ce papier.

Les fonctions de croyance présentent en effet un compromis intéressant entre complexité de calcul et flexibilité de représentation : elles peuvent tirer avantage des calculs probabilistes et ensemblistes, tout en incluant comme cas particulier de nombreuses représentations d'incertitudes (possibilités, probabilités, ensembles, . . .). Il devient alors nécessaire d'étendre les calculs classiques de l'analyse des systèmes aux fonctions de croyance.

En particulier, les facteurs d'importance deviennent dans ce cas des intervalles plutôt que des valeurs précises (l'imprécision de l'intervalle reflétant notre manque d'information), et il est nécessaire de revoir la manière de classer les composants par ordre d'importance. C'est le sujet de ce papier, qui propose diverses manières d'exploiter ces facteurs d'importance imprécis.

Les pré-requis sont rappelés dans la Section II. Dans la Section III, nous abordons divers moyens de traiter les facteurs d'importance quand ces derniers sont imprécis. Finalement, la Section IV traite d'un problème relié qui apparait en présence d'imprécision : l'effet de la réduction d'incertitudes épistémiques.

II. Préliminaires

Dans cette section, nous rappelons les éléments nécessaires pour étudier le traitement des facteurs d'importance imprécis.

A. Fonctions de croyances

Les fonctions de croyance [13] ont été introduites, entre autre, pour pouvoir modéliser l'incertitude épistémique, et plus particulièrement l'incertitude dûe à l'incomplétude ou à un manque de connaissance.

Une fonction de croyance [13] sur un espace $\mathscr{X}$ est une fonction m de l'ensemble des parties $2^{\mathscr{X}}$ dans l'intervalle unité $[0,1]$ t.q. $\sum_{E\subseteq\mathscr{X}} m(E)=1$, $m(E)\geq 0$ et $m(\emptyset)=0$ et $\mathscr{X}$ représente le cadre de discernement. Par exemple, si on considère un composant binaire i à deux états :

– état de fonctionnement noté 1_i ;
– état de défaillance noté 0_i.

Son cadre de discernement est donné par : $\mathscr{X}_i=\{1_i,0_i\}$.

Les ensembles E ayant une masse positive ($m(E)>0$) sont appelés ensembles focaux. Nous noterons $\mathscr{F}_m$ les ensembles focaux d'une fonction de croyance m. A partir de cette fonction, deux fonctions d'ensembles duales, les mesures de plausibilité et de crédibilité, sont définies comme [13]

$$Bel(A)=\sum_{E,E\subseteq A} m(E); \quad Pl(A)=\sum_{E,E\cap A} m(E)=1-Bel(A^c)$$

où la fonction de crédibilité mesure la quantité d'information qui étaye forcément A, et la fonction de plausibilité la quantité d'information qui pourrait étayer A.

Par exemple, un expert peut exprimer son degré de croyance vis-a-vis du fonctionnement d'un composant (l'état de fonctionnement est noté 1_i) par l'intervalle $[Bel(1_i),Pl(1_i)]=[0.7,0.9]$. la valeur 0.7 indique la certitude de l'expert vis-a-vis du fonctionnement du composant alors que 0.9 indique la valeur plausible qu'affecte l'expert vis-a-vis du fonctionnement du composant. La largeur de l'intervalle $Pl(1_i)-Bel(1_i)=0.2$ représente l'incertitude épistémique (ou l'imprécision) que l'expert exprime par rapport à l'état du composant.

Dans le modèle des croyances transférables, les mesures *Bel* et *Pl* sont des mesures de croyances, pas forcément associées à des probabilités mal connues. Néanmoins, une masse m peut être considérée comme un ensemble aléatoire [6], et dans ce cas *Bel* et *Pl* peuvent être associées à un ensemble (convexe) de probabilités $\mathscr{P}(m)$ tel que

$$\mathscr{P}(m)=\{P\in\mathbb{P}_{\mathscr{X}} | \forall A\subseteq\mathscr{X}, P(A)\geq Bel(A)\}$$

où $\mathbb{P}_{\mathscr{X}}$ est l'ensemble de probabilités sur $\mathscr{X}$. $\mathscr{P}(m)$ est donc l'ensemble des probabilités qui dominent *Bel* (ou, du fait de la dualité $Pl(A)=1-Bel(A^c)$, qui sont dominées par *Pl*). On peut donc interpréter les fonctions de croyances comme modélisant une probabilité mal connue.

B. Fiabilité des systèmes

Nous supposons que l'information est donnée sur un ensemble de composants binaires $\mathscr{X}_i$, $i=1,\ldots,N$: un composant $\mathscr{X}_i=\{1_i,0_i\}$ peut fonctionner (1_i) ou pas (0_i). Nous noterons $\mathscr{X}=\mathscr{X}_1\times\ldots\times\mathscr{X}_N$ le produit Cartésien des espaces $\mathscr{X}_i$, correspondant à l'ensemble des configurations du système.

De même, le système global peut fonctionner (1) ou pas (0). La *fonction de structure* [3] relie l'état des composants individuels à celui du système global : c'est une fonction $\phi:\mathscr{X}\to\{0,1\}$ telle que $\phi(\cdot)=1$ si le système fonctionne (étant donné l'état des composants) et $\phi(\cdot)=0$ sinon. Nous supposons que les systèmes étudiés sont cohérents ($\phi(1_1,\ldots,1_N)=1$, $\phi(0_1,\ldots,0_N)=0$ et la fonction de structure ϕ est croissante).

Nous supposons également qu'une fonction de croyance $m_i:2^{\mathscr{X}_i}\to[0,1]$ est donnée pour chaque composant. Nous supposons les composants indépendants, la fonction de croyance m sur l'ensemble des configurations du système est donc construite via l'hypothèse d'indépendance des ensembles aléatoire (ou l'hypothèse d'indépendance crédibiliste, les deux étant mathématiquement équivalentes [5]). m est positive seulement pour des produits Cartésiens $E=E_1\times\ldots\times E_N$ avec E_i et la masse

$$m(E)=\prod_{i=1}^{N} m_i(E_i) \tag{1}$$

est le produit des masses marginales.

Notons que le modèle joint obtenu peut être vu comme un modèle robuste incluant toutes les probabilités jointes obtenues par hypothèse d'indépendance stochastique entre les probabilités des ensembles $\mathscr{P}(m_1),\ldots,\mathscr{P}(m_N)$. Afin de calculer le fonctionnement globale du système, il est alors nécessaire de calculer la masse $m_\phi:2^{\{0,1\}}\to[0,1]$ telle que

$$m_\phi(A)=\sum_{E\subseteq\mathscr{X},\phi(E)=A} m(E) \tag{2}$$

où $\phi(E)=\{\phi(x)|x\in E\}$ est la fonction de structure calculée pour chaque configuration dans E.

Le problème est alors d'évaluer $Bel_\phi(1)=1-Pl_\phi(0)$ et $Bel_\phi(0)=1-Pl_\phi(1)$ à partir de m ($\phi^{-1}(1)$) et m ($\phi^{-1}(0)$) qui correspondent aux états de composants pour lesquels le système fonctionne et ne fonctionne pas, respectivement. Notons que contrairement au cas probabiliste, nous avons en général $Bel_\phi(0)<Pl_\phi(0)$, et nous retrouvons le cas probabiliste $Bel_\phi(0)=Pl_\phi(0)$ lorsque chaque masse m_i est équivalente à une probabilité (n'est positive que sur des singletons).

Par exemple, considérons un système S à deux composants 1 et 2 en série indépendants, on dispose d'avis d'un expert donnés dans la Table I. Les configurations possibles du système S sont données dans la Table II. Notre objectif est de calculer la fiabilité du système S donnée par $[Bel_\phi(1),Pl_\phi(1)]$.

En utilisant les equations (1) et (2), on obtient :

$$\begin{aligned} m_\phi(1) &= m(1_1).m(1_2) \\ &= 0.56 \end{aligned}$$

Composant i	1	2
$m(0_i)$	0.7	0.8
$m(1_i)$	0.2	0.05
$m(\{0_i,1_i\})$	0.1	0.15

TABLE I
MASSES AFFECTÉS PAR L'EXPERT AUX COMPOSANTS DE S

E_1	E_2	S
0_1	0_2	0
0_1	1_2	0
0_1	$\{0_2,1_2\}$	0
1_1	0_2	0
1_1	1_2	1
1_1	$\{0_2,1_2\}$	$\{0,1\}$
$\{0_1,1_1\}$	0_2	0
$\{0_1,1_1\}$	1_2	$\{0,1\}$
$\{0_1,1_1\}$	$\{0_2,1_2\}$	$\{0,1\}$

TABLE II
CONFIGURATIONS POSSIBLES DU SYSTÈME S

$$\begin{aligned} m_\phi(0) &= m(0_1).m(0_2)+m(0_1).m(1_2)+ \\ &\quad m(1_1).m(0_2)+m(\{0_1,1_1\}).m(0_2)+ \\ &\quad m(0_1).m(\{0_2,1_2\}) \\ &= 0.24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_\phi(\{0,1\}) &= 1-m_\phi(1)-m_\phi(0) \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

Finalement, la fiabilité du système S est donnée par :

$$\begin{aligned} [Bel_\phi(1),Pl_\phi(1)] &= [m_\phi(1),m_\phi(1)+m_\phi(\{0,1\})] \\ &= [0.56,0.76] \end{aligned}$$

Le calcul de l'intervalle de fiabilité de systèmes plus complexes à partir des intervalles de fiabilité des composants est largement décrit dans nos précédents papiers [12]. Ici, on s'intéresse au problème de l'exploitation des facteurs d'importance imprécis pour classer les composants en fonction de leurs fiabilités.

C. Facteurs d'importances

Les facteurs d'importances cherchent à mesurer l'importance du rôle d'un composant dans la fiabilité du système. Nous noterons $m_{\phi|1_i}$ ou $m_{\phi|0_i}$ (et pareillement pour Bel et Pl) les fonctions de croyances obtenues par les deux hypothèses : $m_i(\{1_i\})=1$ (le composant i est parfait) ou par $m_i(\{0_i\})=1$ (le composant i est toujours défaillant).

Comme pour les estimations globales de défaillance/fonctionnement, les facteurs d'importance deviennent imprécis quand l'incertitude est modélisée par des fonctions de croyance. Nous rappelons ici les extensions des principaux facteurs d'importance :

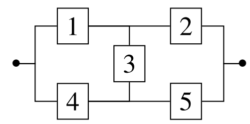

FIGURE 1. Système en pont

Composant	Bel_i	Pl_i
X_1	0.9	0.95
X_2	0.7	0.78
X_3	0.98	0.99
X_4	0.45	0.5
X_5	0.95	0.99

TABLE III
VALEURS DES FONCTIONS DE CROYANCES

– Birnbaum :

$$B(i) = [Bel_{\phi|1_i}(1),Pl_{\phi|1_i}(1)] - [Bel_{\phi|0_i}(1),Pl_{\phi|0_i}(1)]$$

– RAW :

$$RAW(i) = \frac{[Bel_{\phi|0_i}(0),Pl_{\phi|0_i}(0)]}{[Bel_\phi(0),Pl_\phi(0)]}$$

– RRW :

$$RRW(i) = \frac{[Bel_\phi(0),Pl_\phi(0)]}{[Bel_{\phi|1_i}(0),Pl_{\phi|1_i}(0)]}$$

où soustractions et divisions sont faites par arithmétique d'intervalle [9]. Notons que ces intervalles sont en général assez conservatifs, vu qu'il ne prenne pas en compte les dépendances entre les valeurs $Bel_{\phi|1_i}, Bel_{\phi|0_i}, Bel_\phi$, etc.

III. TRAITEMENT DES FACTEURS D'IMPORTANCE

Dans le cas précis, chaque facteur d'importance induit sur les composants un ordre unique. Par exemple, si nous notons $X_1,\dots,X_N$ nos composants alors le choix d'un facteur F induit l'ordre $<_F$ tel que $X_j <_F X_k$ si $F(j) <_F F(k)$. Notons que ces ordres peuvent être, et sont en général conflictuels, c'est-à-dire il est possible d'avoir $X_j <_{F_1} X_k$ et $X_j >_{F_2} X_k$ pour deux facteurs d'importance F_1 et F_2 différents.

Dans cette section, nous étudions comment cet ordonnancement peut être traité dans le cas imprécis. Nous considérons un système complexe en pont constitué de 5 composants, illustré par la figure 1 comme exemple. La table spécifie, pour chaque composant X_i, les valeurs $Bel_i(\{1_i\}) = m_i(\{1_i\})$ et $Pl_i(\{1_i\}) = m_i(\{1_i\}) + m_i(\mathscr{X}_i) = 1 - m_i(\{0_i\})$.

A. Ordres partiels

Soit F un facteur ($F \in \{B, RAW, RRW\}$), et $[F(i)] = [\underline{F}(i), \overline{F}(i)]$. Dans ce cas, les conclusions les plus prudentes que nous pouvons tirer de l'importance des composants est que $X_i \le_F X_j$ si et seulement si $\overline{F}(i) \le \underline{F}(j)$, c'est à dire s'il est certain que l'importance de X_i est inférieure à X_j, ce qui veut dire que $\le_F$ est en général un ordre total. Nous appellerons de tels critères par *dominance d'intervalles* et noterons $\le_{\mathscr{DI},F}$ l'ordre obtenu avec ce critère et selon le facteur F.

Les valeurs obtenues pour les indices sont indiquées dans la Table IV. Les intervalles et le graphe de l'ordre partiel

Composant	$\underline{B}(i)$	$\overline{B}(i)$	$\underline{RAW}(i)$	$\overline{RAW}(i)$	$\underline{RRW}(i)$	$\overline{RRW}(i)$
X_1	0.48	0.55	6.9	19.8	1.6	21.9
X_2	0.	0.09	0.5	4	0.5	2.9
X_3	0.06	0.185	1.8	7.5	0.4	2.7
X_4	0.04	0.12	0.75	4.2	1.8	32.6
X_5	0.18	0.31	3.3	12	0.5	2.8

TABLE IV
VALEURS DES FACTEURS

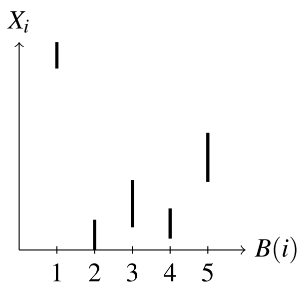

FIGURE 2. Facteur de Birnbaum

obtenus pour les indices de Birnbaum sont respectivement représentés dans les Figures 2 et 3. Le graphe obtenu pour le facteur *RAW* est illustré Figure 4. Pour le facteur *RRW*, aucune comparaison selon le critère $\overline{F}(i) \leq \underline{F}(j)$ n'est réalisable (le graphe ne contient pas d'arcs). Notons que l'ensemble des ordres partiels induits sont ici tous cohérents (en fait, dans le cas présent, Birnbaum est un raffinement de tous les ordres obtenus, ce qui n'est pas forcément le cas en général), et que le facteur de Birnbaum indique que les plus importants sont sans doute les composants X_1 et X_5, sans pouvoir dire plus.

Il est clair que les ordres obtenus par *dominance d'intervalle* peuvent être très imprécis et peu informatifs, ce qui est souvent le prix à payer pour obtenir des conclusions robustes et qui peuvent difficilement être remises en question. Une alternative est de choisir l'ordre correspondant au treillis généré par

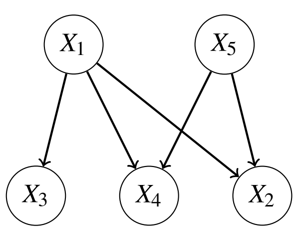

FIGURE 3. Ordre partiel de Birnbaum

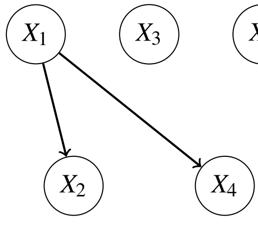

FIGURE 4. Ordre partiel induit par RAW

les opérateurs max et min sur les intervalles, auquel cas $X_i \leq_{\mathscr{T},F} X_j$ si et seulement si $\overline{F}(i) \leq \overline{F}(j)$ et $\underline{F}(i) \leq \underline{F}(j)$, qui correspond à un raffinement des ordres par critère de *dominance d'intervalles*. Nous appellerons de tels critères de *treillis*. Dans notre cas, ce raffinement est assez fort et conduit à des ordres complets en conflits.

Dans la suite, nous revoyons diverses manières de raffiner les ordres partiels obtenus selon les critères de *dominance d'intervalles* ou de *treillis*. Comme nous le verrons, certains de ces raffinements consistent à ajouter aux informations $[F(i)] = [\underline{F}(i), \overline{F}(i)]$

B. *Raffinements par dominance*

Un premier moyen de raffiner les ordres partiels obtenus est de mettre en place un algorithme qui construit, à chaque itération, une classe d'équivalence en sélectionnant soit les éléments non-dominés (l'algorithme commençant alors par les éléments les plus importants), soit les éléments qui n'en dominent aucun autre (l'algorithme commençant alors par les élements les moins importants) [11, 7]. Soit un ensemble $E \subseteq \{X_1, \ldots, X_N\}$, notons alors

$$pess(\mathscr{D}\mathscr{I}, F, E) = \{X_i \in F | \nexists X_j \in F \text{ tel que } X_i \leq_{\mathscr{I}\mathscr{B},F} X_j\}$$

l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dominés au sens de $\mathscr{D}\mathscr{I}$ via le facteur F. Il est alors possible de construire récursivement un ensemble de classes ordonnées $\{P_1, \ldots, P_D\}$ où $P_i \subseteq \{X_1, \ldots, X_N\}$ et

$$P_i = pess(\mathscr{D}\mathscr{I}, F, \left(\{X_1, \ldots, X_N\} \setminus \bigcup_{j=0}^{i} -1 P_j\right))$$

avec $P_0 = \emptyset$. A chaque étape i, les éléments non-dominés sont placés dans P_i puis supprimés des éléments à sélectionner dans les itérations suivantes. P_1 est alors l'ensemble des éléments potentiellement les plus importants, et P_D l'ensemble de ceux nécessairement les moins importants. Par exemple, l'application de cette méthode au graphe de la Figure 4 donne

$$P_1 = \{X_1, X_3, X_5\}, \quad P_2 = \{X_2, X_4\}.$$

Le second moyen consiste à définir, à partir de E, l'opérateur

$$opt(\mathscr{D}\mathscr{I}, F, E) = \{X_j \in F | \nexists X_i \in F \text{ tel que } X_j \geq_{\mathscr{D}\mathscr{I},F} X_i\}$$

qui est très proche de l'opérateur *pess*, mais sélectionne parmi les éléments E tous ceux qui n'en dominent aucun autre. On peut alors définir récursivement les ensembles $\{O_1, \ldots, O_D\}$ tels que

$$O_i = opt(\mathscr{D}\mathscr{I}, F, \left(\{X_1, \ldots, X_N\} \setminus \bigcup_{j=0}^{i} -1 O_j\right))$$

avec $O_0 = \emptyset$. P_1 est alors l'ensemble des élements potentiellement les moins importants, et O_D l'ensemble des éléments nécessairement les plus importants. Dans le cas de la Figure 4 nous obtenons

$$O_1 = \{X_2, X_4, X_3, X_5\}, \quad O_2 = \{X_1\}.$$

Les deux méthodes reviennent à transformer les incomparabilités des ordres partiels ($\geq_{\mathscr{D}\mathscr{I}}$ ou $\geq_{\mathscr{T}}$) en relations d'indifférences. dans le cas des P_i, elles sont résolues en considérant qu'un composant incomparable est potentiellement important, alors que dans le second cas elles sont résolues en considérant qu'un composant incomparable est potentiellement sans importance. Clairement, la première méthode peut être considérée comme prudente ou pessimiste, puisqu'elle va avoir tendance à considérer plus de composants comme importants et essentiels à la bonne tenue du système.

C. Raffinements par critère d'Hurwicz

Un second moyen est de choisir un point représentatif dans chaque intervalle, c'est-à-dire étant donné $[F(i)] = [\underline{F}(i), \overline{F}(i)]$, utiliser un paramètre $\alpha \in [0,1]$ et calculer $F(i)_\alpha = \alpha\underline{F}(i) + (1-\alpha)\overline{F}(i)$, et ordonnancer selon ces valeurs. En théorie de la décision, et en analyse de risque, ce critère s'appelle critère d'Hurwicz, et la valeur α est souvent considéré comme une mesure de l'optimisme : plus α est proche de 1, moins le composant est considéré comme ayant un impact important [8].

Si $\alpha = 1$, cela revient à considérer les bornes inférieures des intervalles, et les bornes supérieures si $\alpha = 0$. En fait, l'ordre partiel obtenu en utilisant $\leq_{\mathcal{T},F}$ revient à considérer l'ensemble des ordres totaux obtenus en utilisant tous les $\alpha \in [0,1]$, et choisir un α revient à raffiner $\leq_{\mathcal{T},F}$. Dans notre exemple, $\leq_{\mathcal{T},F}$ est toujours un ordre complet pour tout F, et donc les raffinements d'Hurwicz donneront tous les mêmes résultats.

D. Raffinement probabiliste

Un autre moyen de raffiner les ordres obtenus en utilisant m_ϕ est de choisir une distribution de probabilité représentative, en prenant par exemple une des distributions incluses dans $\mathcal{P}(m_\phi)$. Deux choix qui sont souvent faits sont la probabilité pignistique, justifiée par Smets [14] dans le modèle des croyances transférables et proche du centre de gravité de $\mathcal{P}(m_\phi)$, et le maximum d'entropie. Dans le cas binaire $\{0,1\}$, la probabilité pignistique P_{Pig} revient à prendre $P_{Pig}(0) = {}^{(Bel(0)+Pl(0))}/_2$, tandis que dans le cas du maximum d'entropie, cela revient à prendre $P_{Entr}(0) = 0.5$ si $0.5 \in [Bel(0), Pl(0)]$, $P_{Entr}(0) = Bel(0)$ si $Bel(0) > 0.5$ et $P_{Entr}(0) = Pl(0)$ si $Pl(0) < 0.5$. Le tableau V résume les chiffres obtenus pour notre exemple.

Puisque ces probabilités sont dans l'ensemble $\mathcal{P}(m_\phi)$, il est garanti que les facteurs d'importance calculés avec ces probabilités seront dans les intervalles du tableau IV. Ce qui veut dire que les ordres obtenus pour un facteur F seront des raffinements de l'ordre $\leq_{\mathcal{D}\mathcal{I},F}$

Notons que si les chiffres selon le choix de P_{Pig} ou P_{Entr} peuvent être assez différents, ils conduisent, à facteur F donné, aux mêmes ordonnancements. Dans le cas de systèmes binaires, la relativement faible sensibilité au choix n'est pas surprenante, néanmoins dans le cas multi-état, on peut s'attendre à plus de sensibilité.

Le raffinement probabiliste suppose, implicitement, qu'il existe une probabilité sous-jacente et se base sur cette dernière pour faire un choix, alors que les méthodes des sections précédentes ne font pas de telles hypothèses.

	$B_{Pig}(i)$	$B_{Entr}(i)$	$RAW_{Pig}(i)$	$RAW_{Entr}(i)$	$RRW_{Pig}(i)$	$RRW_{Entr}(i)$
X_1	0.52	0.55	10.5	19.8	4.7	8.6
X_2	0.03	0.01	1.5	1.4	1.3	1.1
X_3	0.12	0.10	3.4	4.6	1.	1.03
X_4	0.08	0.05	1.7	1.9	5.8	12.8
X_5	0.24	0.21	5.8	8.5	1.19	1.08

TABLE V
VALEURS DES FACTEURS PROBABILISTES

E. Que choisir ?

Clairement, de nombreuses options sont possibles pour construire des ordres entre composants quand les facteurs d'importance ou les modèles d'incertitude deviennent imprécis. Clairement, le choix d'une option plutôt qu'une autre dépend en partie des hypothèses qu'elles font :

- les méthodes construisant des ordres partiels ou des classes d'équivalences à partir de ces ordres partiels (Sections III-A et III-B) sont plus robustes et produisent plus souvent des conclusions cohérentes entre les différents facteurs d'importances ;
- les méthodes consistant à choisir une attitude optimistes/pessimistes (Section III-C) ne supposent pas d'existence d'un comportement aléatoire sous-jacent, mais se basent plutôt sur une décision subjective. Leur utilisation dans le cadre de la fiabilité paraît, à première vue, moins bien justifiée que dans le cas de la théorie de la décision ;
- les méthodes consistant à faire un choix probabiliste (Section III-D) supposent, implicitement, le choix d'une probabilités et basent leurs conclusions sur ces dernières. Cette hypothèse peut souvent se faire dans le cas de la fiabilité ;
- les méthodes produisant des ordres complets produisent souvent des conclusions contradictoires entre les différents facteurs d'importance, et sont donc moins robustes que les méthodes des Sections III-A et III-B.

Notons enfin que, dans le cas binaire, les méthodes des Sections III-D et III-C produiront souvent, à facteur fixé F, les mêmes résultats. Il est peu vraisemblable que cela reste vrai dans le cas multi-états, où l'augmentation de complexité s'accompagnera sans doute de plus de sensibilité.

IV. AU-DELÀ DE L'IMPORTANCE : LE GAIN D'INFORMATION

En général, l'incertitude aléatoire des composants est irréductible, cependant il n'en va pas de même pour l'incertitude épistémique, qui peut en principe être réduite par l'apport d'information (e.g., par recueil de données). Dans le cas où il est possible de recueillir davantage plus d'information concernant un composant i, deux questions peuvent se poser :

- pour quel composant le gain d'information va provoquer le plus grand gain d'information sur la connaissance du comportement du système et
- que deviennent les facteurs d'importance si seule l'incertitude épistémique est supprimée, mais que l'incertitude aléatoire est conservée ?

Nous donner quelques idées (préliminaires) concernant chacune de ces questions.

A. Gain d'information

Globalement, supprimer l'incertitude épistémique revient à transformer une masse m_i en une probabilité, de préférence incluse dans $\mathscr{P}(m_i)$. Ici, nous optons pour la probabilité pignistique (les idées s'étendent facilement à d'autres choix).

Nous noterons $m_{\phi|pig_i}$ (similairement pour Bel, Pl) la masse décrivant le comportement le système quand m_i est transformée en sa probabilité pignistique, qui correspond à prendre le centre de gravité (un bon point représentatif d'un ensemble).

L'imprécision (maximale) initiale du système peut se mesurer par la valeur $Imp = Pl(0) - Bel(0)$, alors que l'imprécision résultant d'une réduction d'incertitude épistémique de l'incertitude du composant m_i est $Imp(i) = Pl_{\phi|pig_i}(0) - Bel_{\phi|pig_i}(0)$. Nous pouvons alors définir le gain relatif d'information comme :

$$GI(i) = 1 - \frac{Imp(i)}{Imp}.$$

Par exemple, la réduction d'information sur les composants 1 et 4 (dont les imprécisions initiales sont comparables) issus du tableau III sont

$$GI(1) = 1 - \frac{0.0179}{0.0438} = 0.5911;$$
$$GI(4) = 1 - \frac{0.0399}{0.0438} = 0.0887.$$

Malgré le fait que les deux composants aient une imprécision comparable ($Pl(1_i) - Bel(1_i) = 0.05$ pour les deux), réduire l'imprécision sur le composant 1 est nettement plus intéressant que réduire l'imprécision sur le composant 4, et les efforts de collecte de données devraient donc porter sur ce dernier. En effectuant ce calcul pour chaque composant, il est possible de savoir sur quel composant concentrer le recueil de données. Notons que, dans un tel figure, il serait également nécessaire de prendre en compte le coût de réduction de cette incertitude : réduire l'incertitude épistémique sur le composant 3, déjà très faible, peut demander de nombreuses données et donc être plus couteuse qu'une réduction de l'incertitude concernant les composants 1 et 4

B. Facteurs d'importance

De même, on peut chercher à étendre les facteurs d'importance dans le cas où l'on chercher uniquement à supprimer l'incertitude épistémique (notons que changer m_i en 1_i ou 0_i revient à supprimer tout type d'incertitude).

Nous pouvons, par exemple, s'inspirer du facteur de Birnbaum (B), pour définir notre facteur d'incertitude BI comme suit :

$$BI(i) = [Bel_{\phi|pig_i}(1), Pl_{\phi|pig_i}(1)] - [Bel_{\phi||pig_i}(0), Pl_{\phi|pig_i}(0)] \tag{3}$$

De la même façon, on peut aussi définir des facteurs d'importance d'incertitude RRW et RAW comme suit :

$$RAWI(i) = \frac{[Bel_{\phi|0_i}(0), Pl_{\phi|0_i}(0)]}{[Bel_{\phi|pig_i}(0), Pl_{\phi|pig_i}(0)]} \tag{4}$$

$$RRWI(i) = \frac{[Bel_{\phi|pig_i}(0), Pl_{\phi|pig_i}(0)]}{[Bel_{\phi|1_i}(0), Pl_{\phi|1_i}(0)} \tag{5}$$

Notons que comme les intervalles $[Bel_{\phi|pig_i}(1), Pl_{\phi|pig_i}(1)]$ et $[Bel_{\phi||pig_i}(0), Pl_{\phi|pig_i}(0)]$ sont inclus dans les intervalles $[Bel_\phi(1), Pl_\phi(1)]$ et $[Bel_\phi(0), Pl_\phi(0)]$, les intervalles $RAWI(i)$ et $RRWI(i)$ seront également inclus dans les intervalles $RAW(i)$, RRW, et les ordres partiels dérivés utilisant $RAWI(i)$ et $RRWI(i)$ seront donc potentiellement plus raffinés. Ces extensions nous permettent donc de mesurer le gain d'information sur les facteurs d'importance, en terme d'ordonnancement, si de l'information est obtenue sur un composant i. Notons que rien ne garantit que $BI(i)$ soit inclut dans $B(i)$.

Une autre extension des équations des facteurs d'importance RRW et RAW est la suivante :

$$RAWI_2(i) = \frac{[Bel_{\phi|pig_i}(0), Pl_{\phi|pig_i}(0)]}{[Bel_\phi(0), Pl_\phi(0)]} \tag{6}$$

$$RRWI_2(i) = \frac{[Bel_\phi(0), Pl_\phi(0)]}{[Bel_{\phi|pig_i}(0), Pl_{\phi|pig_i}(0)} \tag{7}$$

Notons que vu que la réduction d'incertitude est ici moins sévère (m_i devient une probabilité et plus une valeur fixe), on peut s'attendre a ce que ces extensions soit plus imprécises que les originales. Il n'est pas forcément très clair quelle est l'interprétation qu'on peut apporter à de tels facteurs.

V. CONCLUSIONS

Ce papier concerne la gestion des facteurs d'importance imprécis, qui sont en général obtenu lors de l'utilisation de modèles probabilistes robustes ou encore en présence d'incertitude épistémique modélisée au moyen de modèles probabilistes imprécis (fonctions de croyance, possibilités, prévisions inférieures). Ce papier propose plusieurs pistes pour exploiter ces mesures afin d'établir un ordre total ou partiel sur l'importance des composants.

RÉFÉRENCES

[1] T. Aven. A risk concept applicable for both probabilistic and non-probabilistic perspectives. *Safety Science*, 49(8-9) :1080–1086, 2011.

[2] T. Aven. Interpretations of alternative uncertainty representations in a reliability and risk analysis context. *Reliability Engineering & System Safety*, 96 :353–360, 2011.

[3] R. Barlow and F. Proschan. *Statistical theory of reliability and life testing : probability models*. To Begin With, 1981.

[4] Z. W. Birnbaum. *On the importance of different components in a multicomponent system.* Academic Press, p. krishnaiam edition, 1969.

[5] I. Couso. Independence concepts in evidence theory. In *Proc. of the 5th Int. Symp. on Imprecise Probability : Theories and Applications*, 2007.

[6] A. Dempster. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, 38 :325–339, 1967.

[7] G. V. Destercke S., Buche P. A flexible bipolar querying approach with imprecise data and guaranteed results. *Fuzzy sets and Systems*, 169 :51–64, 2011.

[8] L. Hurwicz. Optimality criteria for decision making under ignorance. cowles commission discussion paper. *Statistics*, 370, 1951.

[9] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter. *Applied Interval Analysis*. London, 2001.

[10] H. E. Lambert. *Measures of importance of events ancut sets in fault trees*. R. e. barlow, j. b. fussell, and n. d. singpurwalla edition, 1969.

[11] K. S. *Working with preferences, Less is more*. Springer, 2011.

[12] M. Sallak, W. Schön, and F. Aguirre. The Transferable Belief Model for reliability analysis of systems with data uncertainties and failure dependencies. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O : Journal of Risk and Reliability*, 40 :266–278, 2010.

[13] G. Shafer. *A mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, New Jersey, 1976.

[14] P. Smets. Decision making in the tbm : the necessity of the pignistic transformation. *I.J. of Approximate Reasoning*, 38 :133–147, 2005.