# Facteurs d'importance imprécis : quelques idées pour les exploiter

Sébastien Destercke **Mohamed Sallak**

Université de Technologie de Compiègne (UTC)
Heudiasyc UMR CNRS 7253
https://www.hds.utc.fr/~sallakmo

QUALITA 2013
Compiègne, 19-22 Mars 2013

# Sommaire

# Introduction

- Lors de l'analyse de fiabilité des systèmes, il est essentiel de pouvoir identifier les composants qui jouent un rôle plus important que d'autres en terme de fiabilité.
- En pratique, cette identification se fait au moyen des facteurs d'importance.
- La notion de facteur d'importance a été introduite par Birnbaum et développée par de nombreux auteurs.
- Les facteurs d'importance d'un composant cherchent donc à mesurer l'amplitude de modification de la probabilité de fonctionnement ou de défaillance du système, conditionnellement à l'état du composant étudié.

# Introduction

- Il existe de nombreux facteurs d'importance dans la littérature. Dans nos travaux, nous allons étudier trois facteurs couramment utilisés :
- Le facteur d'importance de Birnbaum (B) qui représente la variation de la fiabilité du système en fonction de la fiabilité du composant $i$.
- Le facteur de diminution du risque (Risk Reduction Worth, RRW) qui représente l'effet du remplacement d'un composant $i$ par un composant parfait sur la fiabilité du système complet.
- Le facteur d'augmentation du risque (Risk Achievement Worth, RAW) qui représente une mesure de la participation de la défaillance du composant à la défaillance du système complet.

# Introduction

- Lorsque l'information concernant les composants est pauvre (manque de données, retour d'expérience insuffisant, défaillances rares, etc.), il est nécessaire d'intégrer cette méconnaissance à l'analyse des systèmes.
- L'incertitude générée par ce manque d'information est souvent appelée épistémique, par opposition à l'incertitude aléatoire qui caractérise le comportement intrinsèquement aléatoire des composants.
- De nombreux auteurs ont reconnu le fait que les probabilités ne sont pas très bien adaptées à la modélisation de la notion de méconnaissance et l'incertitude épistémique.
- Ils ont donc proposé des cadres mélangeant théorie des ensembles et probabilités, afin de pouvoir mieux gérer l'incertitude épistémique.

# Introduction

- La théorie des fonctions de croyance représente un cadre plus générale que la théorie des probabilités classique.
- Les fonctions de croyance présentent en effet un compromis intéressant entre complexité de calcul et flexibilité de représentation : elles peuvent tirer avantage des calculs probabilistes et ensemblistes, tout en incluant comme cas particulier de nombreuses représentations d'incertitudes (possibilités, probabilités, ensembles, . . . ).
- Les facteurs d'importance deviennent dans ce cas des intervalles plutôt que des valeurs précises (l'imprécision de l'intervalle reflétant notre manque d'information).
- Objectif de nos travaux : Revoir la manière de classer les composants par ordre d'importance.

# Théorie des fonctions de croyance

- Les fonctions de croyance ont été introduites par Dempster dans les années 60 puis développés par les travaux de Shafer en 1976.
- Une fonction de croyance sur un espace $\mathcal{X}$ est une fonction $m$ de $2^{\mathcal{X}}$ dans $[0,1]$ t.q. $\sum_{E \subseteq \mathcal{X}} m(E) = 1$, $m(E) \geq 0$ et $m(\emptyset) = 0$ et $\mathcal{X}$ représente le cadre de discernement.
- Si on considère un composant binaire $i$ à deux états :
  - état de fonctionnement noté $1_i$ ;
  - état de défaillance noté $0_i$.

  Son cadre de discernement est donné par : $\mathcal{X}_i = \{1_i, 0_i\}$.

# Théorie des fonctions de croyance

- A partir de cette fonction, on définit deux fonctions d'ensembles duales, les mesures de plausibilité et de crédibilité :

$$Bel(A) = \sum_{E, E \subseteq A} m(E); \quad Pl(A) = \sum_{E, E \cap A \neq \emptyset} m(E) = 1 - Bel(A^c)$$

- La fonction de crédibilité mesure la quantité d'information qui étaye forcément $A$ et la fonction de plausibilité mesure la quantité d'information qui pourrait étayer $A$.
- un expert peut exprimer son degré de croyance vis-a-vis du fonctionnement d'un composant par l'intervalle $[Bel(1_i), Pl(1_i)] = [0.7, 0.9]$.
- La valeur 0.7 indique la certitude de l'expert vis-a-vis du fonctionnement du composant alors que 0.9 indique la valeur plausible.
- La largeur de l'intervalle $Pl(1_i) - Bel(1_i) = 0.2$ représente l'imprécision par rapport à l'état du composant.

# Théorie des fonctions de croyance

- Une fonction de croyance $m_i : 2^{\mathcal{X}_i} \rightarrow [0,1]$ est donnée pour chaque composant.
- $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_N$ le produit Cartésien des espaces $\mathcal{X}_i$, correspondant à l'ensemble des configurations du système.
- $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \{0,1\}$ telle que $\phi(\cdot) = 1$ si le système fonctionne (étant donné l'état des composants) et $\phi(\cdot) = 0$ sinon.
- Afin de calculer le fonctionnement globale du système, il est alors nécessaire de calculer la masse $m_\phi : 2^{\{0,1\}} \rightarrow [0,1]$ telle que

$$m_\phi(A) = \sum_{E \subseteq \mathcal{X}, \phi(E) = A} m(E)$$

- Évaluer $Bel_\phi(1) = 1 - Pl_\phi(0)$ et $Bel_\phi(0) = 1 - Pl_\phi(1)$ à partir de $m\left(\phi^{-1}(1)\right)$ et $m\left(\phi^{-1}(0)\right)$.

# Liens entre fonctions de croyance et probabilités

- $m$ peut être considérée comme un ensemble aléatoire et dans ce cas *Bel* et *Pl* peuvent être associées à un ensemble (convexe) de probabilités $\mathcal{P}(m)$ tel que

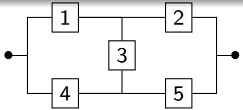
$$\mathcal{P}(m) = \{P \in \mathbb{P}_{\mathcal{X}} | \forall A \subseteq \mathcal{X}, P(A) \geq Bel(A)\}$$

- Les Bel sont des capacités qui vérifient la propriété de monotonie totale :

$$Bel(\cup_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} Bel(\cap_{i \in I} A_i)$$

- Les Pl sont des capacités qui vérifient la propriété d'altération totale de monotonie :

$$Pl(\cap_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} Pl(\cup_{i \in I} A_i)$$




| *Composant* | $Bel_i$ | $Pl_i$ |
|---|---|---|
| $X_1$ | 0.9 | 0.95 |
| $X_2$ | 0.7 | 0.78 |
| $X_3$ | 0.98 | 0.99 |
| $X_4$ | 0.45 | 0.5 |
| $X_5$ | 0.95 | 0.99 |

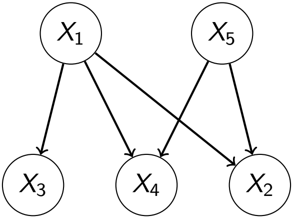
| *Composant* | $\underline{B}(i)$ | $\overline{B}(i)$ | $\underline{RAW}(i)$ | $\overline{RAW}(i)$ | $\underline{RRW}(i)$ | $\overline{RRW}(i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 0.48 | 0.55 | 6.9 | 19.8 | 1.6 | 21.9 |
| $X_2$ | 0. | 0.09 | 0.5 | 4 | 0.5 | 2.9 |
| $X_3$ | 0.06 | 0.185 | 1.8 | 7.5 | 0.4 | 2.7 |
| $X_4$ | 0.04 | 0.12 | 0.75 | 4.2 | 1.8 | 32.6 |
| $X_5$ | 0.18 | 0.31 | 3.3 | 12 | 0.5 | 2.8 |

# Ordres partiels

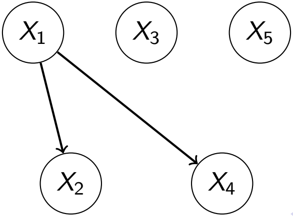
- $F$ un facteur ($F \in \{B, RAW, RRW\}$) et $[F(i)] = [\underline{F}(i), \overline{F}(i)]$.
- Critères par *dominance d'intervalles* $\leq_{\mathcal{DI},F}$ : ordre obtenu avec la règle $X_i \leq_F X_j$ si et seulement si $\overline{F}(i) \leq \underline{F}(j)$.
- Ordres obtenus par *dominance d'intervalle* peuvent être très imprécis et peu informatifs, ce qui est souvent le prix à payer pour obtenir des conclusions robustes.
- Critères de *treillis* : $X_i \leq_{\mathcal{T},F} X_j$ si et seulement si $\overline{F}(i) \leq \overline{F}(j)$ et $\underline{F}(i) \leq \underline{F}(j)$, qui correspond à un raffinement des ordres par critère de *dominance d'intervalles*.

# Ordres partiels

Ordre partiel de Birnbaum




Ordre partiel induit par RAW



# Raffinements par dominance

- Mettre en place un algorithme qui construit, à chaque itération, une classe d'équivalence en sélectionnant soit les éléments non-dominés, soit les éléments qui n'en dominent aucun autre.
- l'ensemble des éléments de $E$ qui ne sont pas dominés au sens de $\mathcal{DI}$ via le facteur $F$ :

$$pess(\mathcal{DI}, F, E) = \{X_i \in F | \nexists X_j \in F \text{ tel que } X_i \leq_{\mathcal{IB},F} X_j\}$$

- Il est alors possible de construire récursivement un ensemble de classes ordonnées $\{P_1, \ldots, P_D\}$ où $P_i \subseteq \{X_1, \ldots, X_N\}$ et

$$P_i = pess(\mathcal{DI}, F, \left(\{X_1, \ldots, X_N\} \setminus \bigcup_{j=0}^{i} -1 P_j\right))$$

- $$P_1 = \{X_1, X_3, X_5\}, \quad P_2 = \{X_2, X_4\}$$

# Raffinements par dominance

- On peut définir récursivement les ensembles $\{O_1, \dots, O_D\}$ tels que

$$O_i = opt(\mathcal{DI}, F, \left(\{X_1, \dots, X_N\} \setminus \bigcup_{j=0}^{i} -1 O_j\right))$$

  $P_1$ est alors l'ensemble des éléments potentiellement les moins importants.

- $$O_1 = \{X_2, X_4, X_3, X_5\}, \quad O_2 = \{X_1\}.$$

- Les deux méthodes reviennent à transformer les incomparabilités des ordres partiels ($\geq_{\mathcal{DI}}$ ou $\geq_{\mathcal{T}}$) en relations d'indifférences.
- Dans le cas des $P_i$, elles sont résolues en considérant qu'un composant incomparable est potentiellement important, alors que dans le second cas elles sont résolues en considérant qu'un composant incomparable est potentiellement sans importance.

# Raffinements par critère d'Hurwicz

- Choisir un point représentatif dans chaque intervalle : c'est-à-dire étant donné $[F(i)] = [\underline{F}(i), \overline{F}(i)]$, utiliser un paramètre $\alpha \in [0, 1]$ et calculer $F(i)_\alpha = \alpha\underline{F}(i) + (1 - \alpha)\overline{F}(i)$, et ordonnancer selon ces valeurs.
- En théorie de la décision (et en analyse de risque), ce critère s'appelle critère d'Hurwicz ($\alpha$ est une mesure de l'optimisme) : plus $\alpha$ est proche de 1, moins le composant est considéré comme ayant un impact important.
- Si $\alpha = 1$, cela revient à considérer les bornes inférieures des intervalles, et les bornes supérieures si $\alpha = 0$.
- En fait, l'ordre partiel obtenu en utilisant $\leq_{\mathcal{T},F}$ revient à considérer l'ensemble des ordres totaux obtenus en utilisant tous les $\alpha \in [0, 1]$, et choisir un $\alpha$ revient à raffiner $\leq_{\mathcal{T},F}$.

# Raffinement probabiliste

- Choisir une distribution de probabilité représentative, en prenant par exemple une des distributions incluses dans $\mathcal{P}(m_\phi)$.
- Deux choix qui sont souvent faits sont :
  - la probabilité pignistique (justifiée par Smets) et proche du centre de gravité de $\mathcal{P}(m_\phi)$.
  - le maximum d'entropie.
- la probabilité pignistique $P_{Pig}$ revient à prendre : $P_{Pig}(0) = \frac{(Bel(0)+Pl(0))}{2}$
- dans le cas du maximum d'entropie cela revient à prendre : $P_{Entr}(0) = 0.5$ si $0.5 \in [Bel(0), Pl(0)]$, $P_{Entr}(0) = Bel(0)$ si $Bel(0) > 0.5$ et $P_{Entr}(0) = Pl(0)$ si $Pl(0) < 0.5$.
- Puisque ces probabilités sont dans l'ensemble $\mathcal{P}(m_\phi)$, les ordres obtenus pour $F$ seront des raffinements de l'ordre $\leq_{\mathcal{DI},F}$.

# Que choisir ?

- les méthodes construisant des ordres partiels (ou classes d'équivalences) sont plus robustes et produisent plus souvent des conclusions cohérentes entre les différents facteurs d'importances ;
- les méthodes consistant à choisir une attitude optimistes/pessimistes ne supposent pas d'existence d'un comportement aléatoire sous-jacent, mais se basent plutôt sur une décision subjective. Leur utilisation dans le cadre de la fiabilité paraît, à première vue, moins bien justifiée que dans le cas de la théorie de la décision ;
- les méthodes consistant à faire un choix probabiliste supposent, implicitement, le choix d'une probabilités et basent leurs conclusions sur ces dernières (choix souvent fait dans les études de fiabilité) ;

# Au-delà de l'importance : le gain d'information

- l'incertitude aléatoire des composants est irréductible.
- l'incertitude épistémique peut en principe être réduite par l'apport d'information (e.g., par recueil de données).
- Dans le cas où il est possible de recueillir davantage plus d'information concernant un composant $i$, deux questions peuvent se poser :
  - pour quel composant le gain d'information va provoquer le plus grand gain d'information sur la connaissance du comportement du système ?
  - que deviennent les facteurs d'importance si seule l'incertitude épistémique est supprimée, mais que l'incertitude aléatoire est conservée ?

# Au-delà de l'importance : le gain d'information

- $m_{\phi|pig_i}$ : masse décrivant le comportement le système quand $m_i$ est transformée en sa probabilité pignistique (centre de gravité).
- l'imprécision initiale du système : $Imp = Pl(0) - Bel(0)$.
- l'imprécision résultant d'une réduction d'incertitude épistémique de l'incertitude du composant $m_i$ : $Imp(i) = Pl_{\phi|pig_i}(0) - Bel_{\phi|pig_i}(0)$.
- Gain relatif d'information :

$$GI(i) = 1 - \frac{Imp(i)}{Imp}$$

- $GI(1) = 0.5911$ et $GI(4) = 0.0887$
  Malgré le fait que les deux composants aient une imprécision comparable ($Pl(1_i) - Bel(1_i) = 0.05$ pour les deux), réduire l'imprécision sur le composant 1 est nettement plus intéressant que réduire l'imprécision sur le composant 4.

# Au-delà de l'importance : le gain d'information

- Nous pouvons, s'inspirer du facteur de Birnbaum (B), pour définir notre facteur d'incertitude BI :

$$BI(i) = [Bel_{\phi|pig_i}(1), Pl_{\phi|pig_i}(1)] - [Bel_{\phi||pig_i}(0), Pl_{\phi|pig_i}(0)]$$

De la même façon, on peut aussi définir des facteurs d'importance d'incertitude RRWI et RAWI comme suit :

$$RAWI(i) = \frac{[Bel_{\phi|0_i}(0), Pl_{\phi|0_i}(0)]}{[Bel_{\phi|pig_i}(0), Pl_{\phi|pig_i}(0)]}$$

$$RRWI(i) = \frac{[Bel_{\phi|pig_i}(0), Pl_{\phi|pig_i}(0)]}{[Bel_{\phi|1_i}(0), Pl_{\phi|1_i}(0)}$$

# Conclusion

- Ce travail concerne la gestion des facteurs d'importance imprécis qui sont en général obtenu lors de :
  - l'utilisation de modèles probabilistes robustes ;
  - en présence d'incertitude épistémique modélisée au moyen de modèles probabilistes imprécis (fonctions de croyance, possibilités, prévisions inférieures).
- Ce travail propose plusieurs pistes pour exploiter ces mesures afin d'établir un ordre total ou partiel sur l'importance des composants.
- Les méthodes de choix paraissent logiques mais le but ou encore la lecture que l'on fait du classement dépend forcément du domaine d'utilisation.
- On peut se demander si le choix probabiliste convient-il à la fiabilité.

# Merci pour votre attention !

email : mohamed.sallak@utc.fr
https ://www.hds.utc.fr/∼sallakmo