Un algorithme généralisé de commande adaptative pour la régulation globale de robots manipulateurs à entrées bornées

Arturo ZAVALA-RIO

Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica

(*Institut de Recherche Scientifique et Technologique de San Luis Potosí*)

Mexique

Sommaire

Sommaire

Robot manipulateurs (rigides à n degrés de liberté)

D'autres types de systèmes robotiques :

robot mobile

robot à pattes

Modèle dynamique

$$H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = \tau$$

où :

q, $\dot{q}$, $\ddot{q} \in \mathbb{R}^n$: pos., vit. et acc.

$H(q)$: matrice d'inertie

$C(q,\dot{q})\dot{q}$: forces centrifuges et de Coriolis

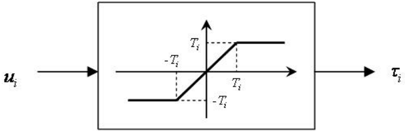
$F\dot{q}$: forces de frottement visqueux

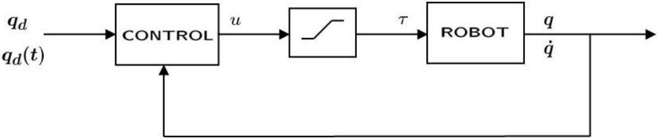
$g(q)$: forces gravitationelles

τ : forces externes (de commande)

Entrées bornées

$$\tau_i = T_i \mathrm{sat}\left(\frac{u_i}{T_i}\right)$$





Régulation globale

Étant donné $q_d \in \mathbb{R}^n$ (constant), concevoir

$$u = u(q, \dot{q}, \theta)$$

où $\theta \in \mathbb{R}^p$: vecteur de paramètres du manipulateur, tel que pour

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = u(q, \dot{q}, \theta)$$

on garantit

$$q(t) \equiv q_d : \text{ solution globalement asymptotiquement stable}$$

Régulation adaptative globale

Étant donné $q_d \in \mathbb{R}^n$, concevoir

$$u = u(q, \dot{q}, \hat{\theta}) \quad ; \quad \dot{\hat{\theta}} = f(q, \dot{q}, \hat{\theta})$$

indépendant de θ, tel que pour

$$\begin{cases} H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = u(q, \dot{q}, \hat{\theta}) \\ \dot{\hat{\theta}} = f(q, \dot{q}, \hat{\theta}) \end{cases}$$

on garantit

$$(q, \hat{\theta})(t) \equiv (q_d, \theta) : \text{solution stable}$$

et $\forall (q, \dot{q}, \hat{\theta})(0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$:

$$(q, \hat{\theta})(t) : \text{solution bornée} \qquad \text{et} \qquad q(t) \to q_d \quad , \quad t \to \infty$$

Régulation adaptative globale : entrées bornées

Étant donné $q_d \in \mathbb{R}^n$, concevoir

$$u = u(q, \dot{q}, \hat{\theta}) \quad ; \quad \dot{\hat{\theta}} = f(q, \dot{q}, \hat{\theta})$$

indépendant de θ, tel que pour

$$\begin{cases} H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = \tau \\ \tau_i = T_i \operatorname{sat}\big(u_i(q, \dot{q}, \hat{\theta})/T_i\big) \ , \ i = 1, \ldots, n \\ \dot{\hat{\theta}} = f(q, \dot{q}, \hat{\theta}) \end{cases}$$

on garantit

$$(q, \hat{\theta})(t) \equiv (q_d, \theta) : \text{solution stable}$$

et $\forall (q, \dot{q}, \hat{\theta})(0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$:

$$(q, \hat{\theta})(t) : \text{solution bornée} \qquad ; \qquad q(t) \to q_d \quad , \quad t \to \infty$$

$$\text{et} \qquad |\tau_i(t)| = |u_i(t)| < T_i \quad \forall t \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n$$

Approches PD / SP-SD

Régulation global : PD avec compensation de gravité [Takegaki and Arimoto, 1981]

$$u = -K_P(q - q_d) - K_D\dot{q} + g(q)$$

Boucle fermé :

$$H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + \underline{g(q)} = -K_P(q - q_d) - K_D\dot{q} + \underline{g(q)}$$

Entrées bornées : Commande SP-SD [Kelly, Santibáñez and Berghuis, 1997]

$$u = -K_P T_h(q - q_d) - K_D T_h(\dot{q}) + g(q)$$

où $T_h(x) = \left[\tanh(x_1), \ldots, \tanh(x_n)\right]^T$

Boucle fermé :

$$H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + \underline{g(q)} = -K_P T_h(q - q_d) - K_D T_h(\dot{q}) + \underline{g(q)}$$

Approches bornées alternatives

[Zavala-Rio and Santibañez, 2006]

SPD :

$$u = s\Big(- K_P(q - q_d) - K_D\dot{q}\Big) + g(q)$$

où $s(x) = [\sigma_1(x_1), \ldots, \sigma_n(x_n)]^T$

type SPDcg :

$$u = s_0\Big(- s_P\big(K_P(q - q_d)\big) - K_D\dot{q} + g(q)\Big)$$

où $s_P(x) = [\sigma_{P1}(x_1), \ldots, \sigma_{Pn}(x_n)]^T$ et $s_0(x) = [\sigma_{01}(x_1), \ldots, \sigma_{0n}(x_n)]^T$

Approches adaptatives bornées

[Colbough, Barany and Glass, 1997]

$$u_1 = -k_P \gamma \mathrm{Sat}(q - q_d) - k_D \gamma^2 \mathrm{Sat}(\dot{q})$$
$$u_2 = -k_P \gamma (q - q_d) - k_D \gamma^2 \dot{q} + f$$

où $\mathrm{Sat}(x) = [\mathrm{sat}(x_1), \ldots, \mathrm{sat}(x_n)]^T$,

$$\dot{f} = \beta \left(I - b \frac{ff^T}{\|f\|^2} \right) \left(\dot{q} + \frac{k_P}{\gamma k_D}(q - q_d) \right)$$

$$b = \begin{cases} 0 & \text{si } \{\|f\| < f_M\} \vee \left\{ [\|f\| = f_M] \wedge \left[f^T \left(\dot{q} + \frac{k_P}{\gamma k_D} \bar{q} \right) \leq 0 \right] \right\} \\ 1 & \text{autrement} \end{cases}$$

Remarque : Pas de critère analytique pour déterminer le changement entre u_1 et u_2

Approches adaptatives bornées

[Zergeroglu, Dixon, Behal and Dawson, 2000]

$$u = -K_P T_h(q - q_d) - K_D T_h(\dot{q}) + G(q)\hat{\theta}$$
$$\dot{\hat{\theta}} = P\big(Q(q, \dot{q}), \hat{\theta}\big)$$

où $T_h(x) = \big[\tanh(x_1), \ldots, \tanh(x_n)\big]^T$,

$$Q(q, \dot{q}) = -\Gamma G^T(q)\big[\dot{q} + \varepsilon T_h(q - q_d)\big]$$

$$P_j(Q, \hat{\theta}) = \begin{cases} Q_j & \text{if } \theta_{jm} < \hat{\theta}_j < \theta_{jM} \text{ or } \big(\hat{\theta}_j \leq \theta_{jm} \text{ and } Q_j \geq 0\big) \text{ or } \big(\hat{\theta}_j \geq \theta_{jM} \text{ and } Q_j \leq 0\big) \\ 0 & \text{if } \big(\hat{\theta}_j \leq \theta_{jm} \text{ and } Q_j < 0\big) \text{ or } \big(\hat{\theta}_j \geq \theta_{jM} \text{ and } Q_j > 0\big) \end{cases}$$

Remarque : Stabilisation "semiglobale" mais gains contraints

Approches adaptatives bornées

Récapitulatif sur les travaux antérieurs :

- Structures type SP-SD
- Pas de solution globale à structure fixe
- Algorithme discontinue et/ou avec dynamique auxiliaire discontinue
- Utilisation exclusive de $\mathrm{Tanh}(\cdot)$ ou $\mathrm{Sat}(\cdot)$ pour borner
- Gains de commande contraints

Sommaire

Propriétés analytiques

$$H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = \tau$$

- $H^T(q) = H(q) > 0$, $\forall q \in \mathbb{R}^n$
- $\dot{q}^T\left[\frac{1}{2}\dot{H}(q,\dot{q}) - C(q,\dot{q})\right]\dot{q} = 0$, $\forall (q,\dot{q}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$
- $\dot{H}(q,\dot{q}) = C(q,\dot{q}) + C^T(q,\dot{q})$, $\forall (q,\dot{q}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$
- $\exists k_C \geq 0$ t.q. $\|C(q,\dot{q})\| \leq k_C\|\dot{q}\|$, $\forall (q,\dot{q}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$
- F : matrice diagonale définie positive
- $\exists B_{gi} > 0 : |g_i(q)| \leq B_{gi}$, $i = 1, \ldots, n$, $\forall q \in \mathbb{R}^n$
- $g(q,\theta) = G(q)\theta$, $G(q) \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $\theta \in \mathbb{R}^p$
- $\exists B_{gi}^{\Theta} > 0 : |g_i(x,y)| = |G_i(x)y| \leq B_{gi}^{\Theta}$, $i = 1, \ldots, n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall y \in \Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^p : |\theta_j| \leq \theta_{Mj}\}$

Suposition : $T_i > B_{gi}$, $i = 1, \ldots, n$

Fonctions de saturation généralisées

Définition : Étant donné une constante positive M, une fonction Lipschitz-continue non-dcroissante, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est appelé *saturation généralisée* à borne M si

1. $\varsigma\sigma(\varsigma) > 0$, $\forall \varsigma \neq 0$
2. $|\sigma(\varsigma)| \leq M$, $\forall \varsigma \in \mathbb{R}$.

Si aditionellement il existe une constante positive $L \leq M$ tel que

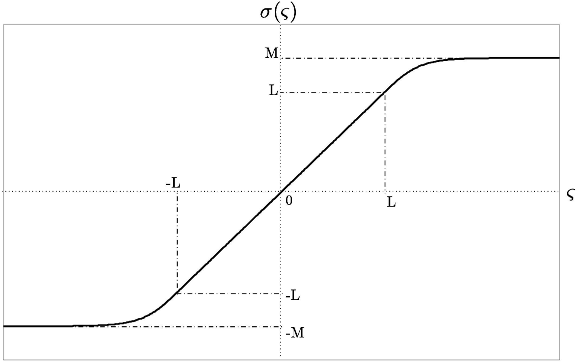
3. $\sigma(\varsigma) = \varsigma$, $\forall |\varsigma| \leq L$

σ est appelé *saturation linéaire* pour (L, M).

Fonctions de saturation généralisées : Exemple

$$\sigma(\varsigma) = \begin{cases} \varsigma & \forall |\varsigma| \leq L \\ \mathrm{sign}(\varsigma) L + (M - L) \tanh\left(\frac{\varsigma - \mathrm{sign}(\varsigma) L}{M - L}\right) & \forall |\varsigma| > L \end{cases}$$

$L = 8,\ M = 10$:



Sommaire

Loi de commande

$$u(q,\dot{q},\theta) = -s_d\left(\bar{q},\dot{q},\theta\right) - s_P(K_P\bar{q}) + G(q)\theta$$

où $\bar{q} = q - q_d$ (erreurs de position), $q_d \in \mathbb{R}^n$: position désirée, K_P : matrice diagonale définie positive,

$$s_P(x) = \Big(\sigma_{P1}(x_1)\ ,\ \ldots\ ,\ \sigma_{Pn}(x_n)\Big)^T$$

$\sigma_{Pi}(\cdot)$: fonctions de saturation généralisées à borne M_{Pi}, et $s_d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle continue bornée qui satisfait :

1. $s_d(x, 0_n, z) = 0_n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall z \in \mathbb{R}^p$
2. $\|s_d(x,y,z)\| \leq \kappa\|y\|$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $\kappa > 0$

et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ tel que $|g_i(x,z)| < T_i$, $i = 1,\ldots,n$:

3. $y^T s_d(x,y,z) > 0$, $\forall y \neq 0_n$
4. $|u_i(x,y,z)| < T_i$, $i = 1,\ldots,n$

Proposition

Conisdérons le système en boucle fermée avec l'algorithme de régulation généralisé. Pour n'importe quelle matrice K_P diagonale définie positive, la stabilité asymptotique globale de la solution triviale $\bar{q}(t) \equiv 0_n$ est guarantie avec $|\tau_i(t)| = |u_i(t)| < T_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\forall t \geq 0$.

Preuve basée sur la fonction de Lyapunov stricte :

$$V_0(\bar{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T H(q)\dot{q} + \varepsilon s_P^T(K_P\bar{q})H(q)\dot{q} + \int_{0_n}^{\bar{q}} s_P^T(K_P r)dr$$

où ε : constante positive suffisamment petite et

$$\int_{0_n}^{\bar{q}} s_P^T(K_P r)dr = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\bar{q}_i} \sigma_{Pi}(k_{Pi} r_i)dr_i$$

Cas particuliers

K_D : matrice diagonal définie positive

- SP-SD : $\underline{s_d(\bar{q},\dot{q},\theta) = s_D(K_D\dot{q})}$
  où $s_D(x) = \Big(\sigma_{D1}(x_1)\ ,\ \ldots\ ,\ \sigma_{Dn}(x_n)\Big)^T$, σ_{Di} : fonctions de saturation généralisées à borne M_{Di}, bornes telles que : $\underline{M_{Pi} + M_{Di} < T_i - B_{gi}}$

- SPD : $\underline{s_d(\bar{q},\dot{q},\theta) = s_P(K_P\bar{q} + K_D\dot{q}) - s_P(K_D\dot{q})}$
  bornes telles que : $\underline{M_{Pi} < T_i - B_{gi}}$

- type SPDcg :
  $\underline{s_d(\bar{q},\dot{q},\theta) = s_0\big(G(q)\theta - s_P(K_P\bar{q})\big) - s_0\big(G(q)\theta - s_P(K_P\bar{q}) - K_D\dot{q}\big)}$
  où $s_0(x) = \Big(\sigma_{01}(x_1)\ ,\ \ldots\ ,\ \sigma_{0n}(x_n)\Big)^T$, σ_{0i} : fonctions de saturation linéaires pour (L_{0i}, M_{0i}), bornes telles que :
  $\underline{B_{gi} + M_{Pi} < L_{0i} \leq M_{0i} < T_i}$

Sommaire

Loi de commande

$$u(q,\dot{q},\hat{\theta}) = -s_d\big(\bar{q},\dot{q},\hat{\theta}\big) - s_P(K_P\bar{q}) + G(q)\hat{\theta}$$

où $\hat{\theta}$ (estimateur paramétrique) est définie à travers

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= -\Gamma G^T(q)\big[\dot{q} + \varepsilon s_P(K_P\bar{q})\big]\\ \hat{\theta} &= s_a(\phi)\end{aligned}$$

ϕ : variable d'état (intèrne) de la dynamique auxiliaire, $\Gamma \in \mathbb{R}^{p\times p}$: matrice diagonale définie positive, ε : constante positive suffisament petite, et

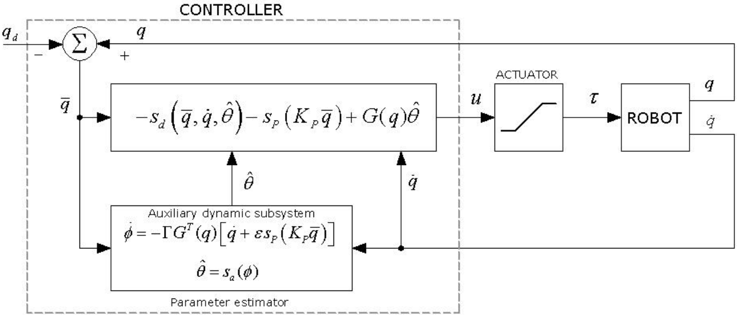
$$s_a(x) = \Big(\sigma_{a1}(x_1)\ ,\ \ldots\ ,\ \sigma_{ap}(x_p)\Big)^T$$

$\sigma_{aj}(\cdot)$: fonctions de saturation généralisées strictement croissantes à bornes M_{aj} telles que

$$|\theta_j| < M_{aj} \quad \forall j \in \{1,\ldots,p\} \qquad \text{et} \qquad B_{gi}^{M_a} < T_i \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}$$

$B_{gi}^{M_a}$: constantes positives telles que $|g_i(x,y)| = |G_i(x)y| \le B_{gi}^{M_a}$, $i = 1,\ldots,n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall y \in \Theta_a = \{z \in \mathbb{R}^p : |z_j| \le M_{aj}\}$.

Diagramme à bloques



Proposition

Considérons le système en boucle fermée avec la loi de commande adaptative proposée. Soient $\bar{\phi} = \phi - \phi^*$, où ϕ^* est tel que $s_a(\phi^*) = \theta$, et $\bar{s}_a(\bar{\phi}) = s_a(\bar{\phi} + \phi^*) - s_a(\phi^*)$. Pour n'importe quelles matrices K_P et Γ symmétriques définies positives et ε suffisamment petit, la solution trivial $(\bar{q}, \bar{\phi})(t) \equiv (0_n, 0_p)$ est stable et pour n'importe quelle condition initiale $(\bar{q}, \dot{q}, \bar{\phi})(0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $\bar{q}(t) \to 0_n$ quand $t \to \infty$ et $\bar{s}_a\big(\bar{\phi}(t)\big) \to \ker\big(G(q_d)\big)$ quand $t \to \infty$, avec $|\tau_i(t)| = |u_i(t)| < T_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\forall t \geq 0$.

Preuve basée sur la fonction de Lyapunov :

$$V_1(\bar{q}, \dot{q}, \bar{\phi}) = V_0(\bar{q}, \dot{q}) + \int_{0_n}^{\bar{\phi}} \bar{s}_a^T(r)\Gamma^{-1} dr$$

où $\int_{0_n}^{\bar{\phi}} s_a^T(r)\Gamma^{-1} dr = \sum_{j=1}^{p} \int_0^{\bar{\phi}_j} \bar{\sigma}_{aj}(r_j)\gamma_j^{-1} dr_j$.

Corollaire : Si $G^T(q_d)G(q_d)$ est non-singulier, la solution trivial $(\bar{q}, \bar{\phi})(t) \equiv (0_n, 0_p)$ est globalement asymptotiquement stable.

Cas particuliers

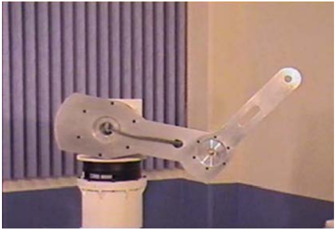
K_D : matrice diagonal définie positive

- SP-SD : $\underline{s_d(\bar{q}, \dot{q}, \hat{\theta}) = s_D(K_D \dot{q})}$
  où $s_D(x) = \Big(\sigma_{D1}(x_1)\ ,\ \ldots\ ,\ \sigma_{Dn}(x_n)\Big)^T$, σ_{Di} : fonctions de saturation généralisées à borne M_{Di}, bornes telles que : $\underline{M_{Pi} + M_{Di} < T_i - B_{gi}^{M_a}}$
- SPD : $\underline{s_d(\bar{q}, \dot{q}, \hat{\theta}) = s_P(K_P \bar{q} + K_D \dot{q}) - s_P(K_D \dot{q})}$
  bornes telles que : $\underline{M_{Pi} < T_i - B_{gi}^{M_a}}$
- type SPDcg :
  $\underline{s_d(\bar{q}, \dot{q}, \hat{\theta}) = s_0\big(G(q)\hat{\theta} - s_P(K_P \bar{q})\big) - s_0\big(G(q)\hat{\theta} - s_P(K_P \bar{q}) - K_D \dot{q}\big)}$
  où $s_0(x) = \Big(\sigma_{01}(x_1)\ ,\ \ldots\ ,\ \sigma_{0n}(x_n)\Big)^T$, σ_{0i} : fonctions de saturation linéaires pour (L_{0i}, M_{0i}), bornes telles que :
  $\underline{B_{gi}^{M_a} + M_{Pi} < L_{0i} \leq M_{0i} < T_i}$

Sommaire

Manipulateur à 3 degrés de liberté

Laboratoire de Robotique et Automatique, BUAP, Mexique



Vecteur de forces gravitationelles $g(q,\theta) = G(q)\theta$

$$G(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin q_1 & \sin(q_1+q_2) \\ 0 & \sin(q_1+q_2) \end{pmatrix} \quad , \quad \theta = \begin{pmatrix} 38.465 \\ 1.825 \end{pmatrix} \text{Nm}$$

Couples maximales (moteurs) : $T_1 = 50$, $T_2 = 150$, $T_3 = 15$ [Nm]

Fonctions de saturation impliquées

SP-SD :

$$\sigma_{Pi}(\varsigma) = M_{Pi}\,\mathrm{sat}(\varsigma/M_{P_i}) \quad \text{and} \quad \sigma_{Di}(\varsigma) = M_{Di}\,\mathrm{sat}(\varsigma/M_{D_i})$$

$i = 1, 2, 3$;
SPD :

$$\sigma_{Pi}(\varsigma) = \begin{cases} \varsigma & \forall|\varsigma| \leq L_{Pi} \\ \mathrm{sign}(\varsigma)L_{Pi} + (M_{Pi} - L_{Pi})\tanh\left(\frac{\varsigma - \mathrm{sign}(\varsigma)L_{Pi}}{M_{Pi} - L_{Pi}}\right) & \forall|\varsigma| > L_{Pi} \end{cases}$$

$0 < L_{Pi} < M_{Pi}$, $i = 1, 2, 3$;
type SPDcg :

$$\sigma_{Pi}(\varsigma) = M_{Pi}\,\mathrm{sat}(\varsigma/M_{P_i}) \quad \text{and} \quad \sigma_{0i}(\varsigma) = M_{0i}\,\mathrm{sat}(\varsigma/M_{0_i})$$

$i = 1, 2, 3$;
et pour tous les trois :

$$\sigma_{aj}(\varsigma) = \begin{cases} \varsigma & \forall|\varsigma| \leq L_{aj} \\ \mathrm{sign}(\varsigma)L_{aj} + (M_{aj} - L_{aj})\tanh\left(\frac{\varsigma - \mathrm{sign}(\varsigma)L_{aj}}{M_{aj} - L_{aj}}\right) & \forall|\varsigma| > L_{aj} \end{cases}$$

$0 < L_{aj} < M_{aj}$, $j = 1, 2$.

Algorithme alternatif : comparaison

[Zergeroglu, Dixon, Behal and Dawson, 2000], dénoté [$\mathrm{Z_e}$00]

$$u = -K_P T_h(q - q_d) - K_D T_h(\dot{q}) + G(q)\hat{\theta}$$
$$\dot{\hat{\theta}} = P\big(Q(q, \dot{q}), \hat{\theta}\big)$$

où $T_h(x) = \big[\,\tanh(x_1), \ldots, \tanh(x_n)\big]^T$,

$$Q(q, \dot{q}) = -\Gamma G^T(q)\big[\dot{q} + \varepsilon T_h(q - q_d)\big]$$

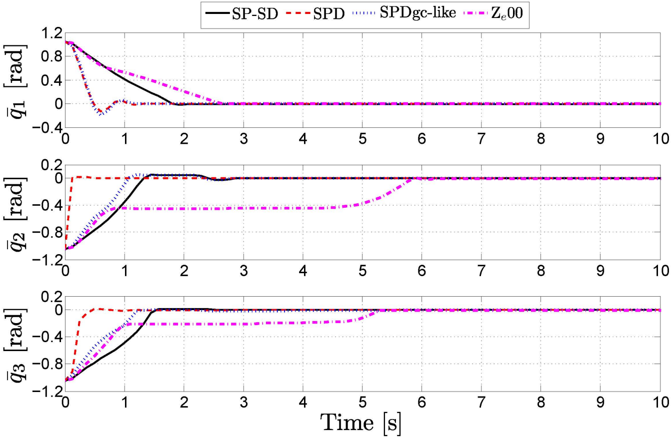
$$P_j(Q, \hat{\theta}) = \begin{cases} Q_j & \text{if } \theta_{jm} < \hat{\theta}_j < \theta_{jM} \text{ or } \big(\hat{\theta}_j \leq \theta_{jm} \text{ and } Q_j \geq 0\big) \text{ or } \big(\hat{\theta}_j \geq \theta_{jM} \text{ and } Q_j \leq 0\big) \\ 0 & \text{if } \big(\hat{\theta}_j \leq \theta_{jm} \text{ and } Q_j < 0\big) \text{ or } \big(\hat{\theta}_j \geq \theta_{jM} \text{ and } Q_j > 0\big) \end{cases}$$

Réglage

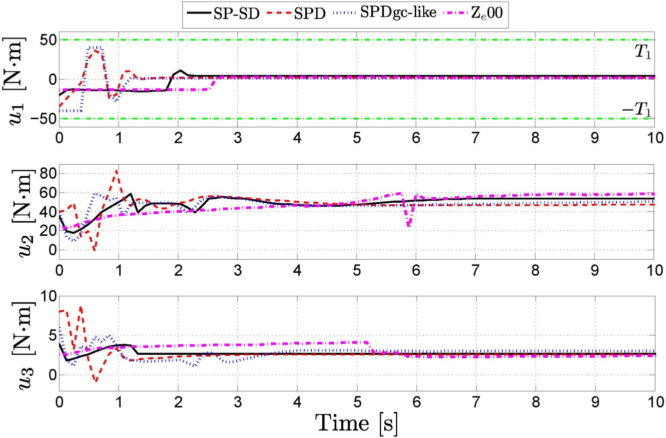
Paramètre	SP-SD, SPD, type SPDcg	Z_e00	Unités
k_{P1}	500	800	Nm/rad Nm
k_{P2}	350	1400	Nm/rad Nm
k_{P3}	180	150	Nm/rad Nm
k_{D1}	10	30	Nm s/rad Nm
k_{D2}	30	140	Nm s/rad Nm
k_{D3}	3	5	Nm s/rad Nm
γ_1	0	0	Nm/rad
γ_2	5	20	
γ_3	0.5	0.35	
ε	0.5	0.5	rad/Nms rad/s

Position désirée : $-q_{d1} = q_{d2} = q_{d3} = \pi/3$

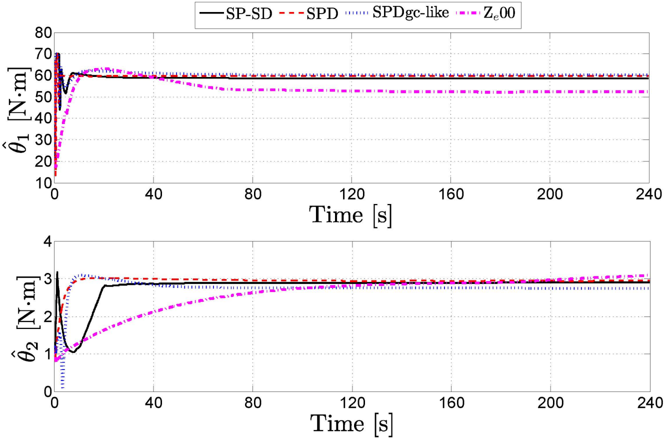
Érreurs de position



Signaux de commande



Estimateurs paramétriques



Sommaire

Conclusions

- Méthodologie de conception de commande adaptative de type PD à structure généralisée pour la régulation globale de manipulateurs à entrées bornées
- Resultat global
- La expression de la commande et la dynamique auxiliaire sont continues
- Sélection des gains non restreinte par la borne de saturation
- Implication de fonctions de saturation “smooth” et “non-smooth” (Lipshcitz-continues) qui incluent la tangente hyperbolique et la saturation conventionelle comme des cas particuliers

Fonctions de saturation généralisées : Propriétés

Soeint $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de saturation généralisée à borne M et k une constante positive. Alors :

1. $\lim_{|\varsigma|\to\infty} D^+\sigma(\varsigma) = 0$
2. $\exists \sigma'_M \in (0, \infty)$ tel que $0 \leq D^+\sigma(\varsigma) \leq \sigma'_M$, $\forall \varsigma \in \mathbb{R}$
3. $\frac{\sigma^2(k\varsigma)}{2k\varsigma'_M} \leq \int_0^\varsigma \sigma(kr)dr \leq \frac{k\sigma'_M\varsigma^2}{2}$, $\forall \varsigma \in \mathbb{R}$
4. $\int_0^\varsigma \sigma(kr)dr > 0$, $\forall \varsigma \in \mathbb{R}$
5. $\int_0^\varsigma \sigma(kr)dr \to \infty$, $|\varsigma| \to \infty$
6. si σ est strictement croissant, alors
   a. $\varsigma[\sigma(\varsigma + \eta) - \sigma(\eta)] > 0$, $\forall \varsigma \neq 0$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$;
   b. pour n'importe quelle constante $a \in \mathbb{R}$, $\bar{\sigma}(\varsigma) = \sigma(\varsigma + a) - \sigma(a)$ est une fonction généralisée strictement croissante à borne $\bar{M} = M + |\sigma(a)|$
7. si σ est une saturation linéaire pour (L, M) alors, pour n'importe quelle fonction continue $\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $|\nu(\eta)| < L$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$, on a $\varsigma\big[\sigma\big(\varsigma + \nu(\eta)\big) - \sigma\big(\nu(\eta)\big)\big] > 0$, $\forall \varsigma \neq 0$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$.

Condition sur ε

$$\varepsilon < \varepsilon_M \triangleq \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$$

où

$$\varepsilon_1 \triangleq \sqrt{\frac{\mu_m}{\mu_M^2 \beta_P}} \quad , \quad \varepsilon_2 \triangleq \frac{f_m}{\beta_M + \frac{(f_M+\kappa)^2}{4}}$$

$$\beta_P \triangleq \max_i\{\sigma'_{PiM} k_{Pi}\} \quad , \quad \beta_M \triangleq k_c B_P + \mu_M \beta_P \quad , \quad B_P \triangleq \sqrt{\sum_{i=0}^{n} M_{Pi}^2}$$

σ'_{PiM} : borne de $D^+\sigma_{Pi}(\cdot)$

Análisis de equilibrios

Sistema en lazo cerrado :

$$H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + F\dot{q} = -s_d\big(\bar{q},\dot{q},s_a(\phi)\big) - s_P(K_P\bar{q}) + G(q)\bar{s}_a(\bar{\phi})$$
$$\dot{\bar{\phi}} = -\Gamma G^T(q)\big[\dot{q} + \varepsilon s_P(K_P\bar{q})\big]$$

Bajo condiciones de equilibrio, *i.e.* $\ddot{q} = \dot{q} = 0_n$ y $\dot{\bar{\phi}} = 0_p$, se obtiene :

$$-s_P(K_P\bar{q}) + G(q)\bar{s}_a(\bar{\phi}) = 0_n \tag{1}$$
$$G^T(q)s_P(K_P\bar{q}) = 0_p \tag{2}$$

Premultiplicando la Eq. (1) por $-s_P^T(K_P\bar{q})$ y usando la Eq. (2) se obtiene

$$s_P^T(K_P\bar{q})s_P(K_P\bar{q}) - \underbrace{s_P^T(K_P\bar{q})G(q)}_{0_p^T} = s_P^T(K_P\bar{q})s_P(K_P\bar{q}) = 0 \iff \underline{\bar{q} = 0_n} \tag{3}$$

Usando el resultado (3) en la Eq. (1) se obtiene : $\underline{G(q_d)\bar{s}_a(\bar{\phi}) = 0_n}$.