

PRISE EN COMPTE DES INCERTITUDES DANS LES EVALUATIONS DE RISQUE A L'AIDE DE FONCTIONS DE CROYANCE TAKING INTO ACCOUNT UNCERTAINTIES IN RISK ASSESSMENT USING BELIEF FUNCTIONS

Walter Schön et Thierry Dencœur
Université de Technologie de Compiègne
UMR CNRS 6599, Heudiasyc
60205 Compiègne, France

Résumé

Cette communication présente une méthode originale de prise en compte des incertitudes dans les évaluations de risques par l'utilisation du Modèle des Croyances Transférables (MCT) basé sur les fonctions de croyance. La problématique de prise en compte des incertitudes est en effet fréquente dans des domaines où peuvent coexister des données quantifiées basées sur un retour d'expérience, et des jugements d'expert plus ou moins bien formalisés. On montre ici que le MCT a l'avantage de permettre de ramener dans un cadre unique des incertitudes de nature très variée (probabilités précises ou non, possibilités, nombres flous, croyance) et de permettre de les combiner afin de parvenir à une croyance et une plausibilité d'un événement redouté donné.

Summary

This communication presents an original method to take into account uncertainties in risk assessments by using the Transferable Belief Model (TBM) based on belief functions. Taking into account uncertainties is indeed mandatory in some domains where statistical data and expert judgements (often less formalized) must be taken into account simultaneously. This paper shows that the TBM presents a unique framework allowing to take into account various types of uncertainties (precise or imprecise probabilities, possibilities, fuzzy numbers, beliefs) and to combine them in order to obtain a credibility and a plausibility of some undesirable event.

Introduction

Les méthodes usuelles d'évaluation des risques (arbres de défaillance...) se situent en général dans le cadre classique de la théorie des probabilités. Bien que ces méthodes aient largement fait leur preuve dans des domaines technologiques où les données de base (taux de défaillance, temps de latence...) sont connues avec une précision raisonnable grâce à un retour d'expérience conséquent, elles s'avèrent en revanche très peu adaptées à des domaines devant nécessairement prendre en compte des données vagues ou incertaines. Or les incertitudes sont fréquentes dans des domaines tels que la prévision des risques naturels ou les activités industrielles très fortement dépendantes des conditions d'environnement comme par exemple la production d'eau potable ou le traitement des eaux usées, où les données fournies par jugement d'expert le sont bien souvent par des plages de valeurs, par des assertions plus ou moins vagues, voire par la complète ignorance. De plus, ainsi que le souligne un article récent [1], la prise en compte de telles connaissances incomplètes et subjectives devient incontournable dans un contexte où la rapidité des évolutions technologiques fait qu'il est de plus en plus difficile de s'appuyer sur des retours d'expériences conséquents. Il est ainsi avéré que toute tentative de ramener toutes les sources de connaissances dans le cadre

unique de la théorie des probabilités (en particulier représenter la complète ignorance par une distribution uniforme), conduit alors à des conclusions abusivement précises, qui ne permettent pas de représenter convenablement la plausibilité du résultat.

Le principal propos de ce travail est de montrer que le Modèle des Croyances Transférables (MCT) peut être utilisé comme cadre théorique alternatif à la théorie des probabilités pour l'évaluation des risques naturels ou industriels, permettant de modéliser l'incertitude des données de base et de les propager jusqu'aux prévisions finales. Offrant un cadre axiomatique complet et cohérent qui présente l'avantage de généraliser à la fois la théorie des probabilités et celle des possibilités, qu'il contient comme cas particuliers, le MCT permet en effet de modéliser des formes très variées d'incertitudes et de retrouver les résultats probabilistes classiques comme cas limite lorsque toutes les incertitudes introduites dans le modèle tendent vers zéro. Peuvent en particulier être modélisés dans ce cadre :

- Des taux de défaillance et des temps de latence incertains connus par des intervalles (probabilités imprécises),
- Des incertitudes sur la logique même des dysfonctionnements de l'installation (comme par exemple l'introduction d'un niveau de confiance compris entre 0 et 1 sur l'efficacité d'une redondance, ce qui revient

à introduire dans un arbre de défaillance une porte logique pouvant évoluer continûment de la porte OU à la porte ET),

- Des données d’entrée type données climatologiques connues par des relevés périodiques sur une durée limitée (certains événements rares pouvant se trouver peu représentés) permettant de construire des histogrammes pouvant être pondérés par des taux de confiance issus de jugements d’experts,
- Des paramètres de fonctionnement d’une installation industrielle connus de manière incertaine et modélisés comme des nombres flous.

Ces diverses sources d’informations peuvent alors être combinées entre elles puis marginalisées sur la variable modélisant l’événement indésirable étudié, ce qui permet d’obtenir un niveau de croyance et un niveau de plausibilité qui représentent l’incertitude sur le résultat final.

Présentation du MCT

L’origine de la théorie des fonctions de croyance se trouve dans une série d’articles de Dempster [3] et dans un livre de Shafer [8]. Par la suite, Smets [9] en donna une interprétation comprenant une axiomatique complète sans aucun recours sous-jacent à la théorie des probabilités (contrairement aux articles initiaux de Dempster). Cette interprétation dite Modèle des Croyances Transférables (MCT) est décrite de manière complète dans [10]. Seuls les résultats essentiels sont rappelés ci-après.

Soit \mathbf{x} une variable définie sur un domaine fini X appelé *cadre de discernement*. La croyance d’un expert dans la valeur prise par \mathbf{x} est représentée par une *fonction de masse* qui est une fonction de l’ensemble 2^X des parties de X dans $[0, 1]$ telle que : $\sum_{A \subseteq X} m^X(A) = 1$. La quantité $m^X(A)$ représente le degré avec lequel l’ensemble des informations disponibles accrédite l’hypothèse selon laquelle la valeur de \mathbf{x} est comprise dans A , et aucune hypothèse plus spécifique. Les sous-ensembles A de X tels que $m^X(A) \neq 0$ sont appelés les *éléments focaux* de m^X . Dans le cas où tous les éléments focaux sont des singletons, la fonction de masse est dite *Bayésienne* et les résultats du MCT se confondent avec ceux de la théorie des probabilités. La certitude d’un expert se traduit par une fonction de masse ayant un seul singleton pour unique élément focal. L’ignorance totale se traduit quant à elle par une fonction de masse dite vide ayant le cadre de discernement tout entier pour unique élément focal.

A partir d’une fonction de masse, on définit les fonctions de crédibilité et de plausibilité respectivement par :

$$bel^X(A) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} m^X(B), \quad (1)$$

$$pl^X(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m^X(B), \quad \forall A \subseteq X. \quad (2)$$

La crédibilité peut être vue comme la croyance totale allouée à A compte tenu des informations disponibles, alors que la plausibilité (toujours plus grande que la crédibilité) représente une borne supérieure sur

la croyance qui pourrait être allouée à A après intégration de nouvelles informations.

Une opération fréquente sur les fonctions de masse consiste à leur attribuer un degré de confiance, pour tenir compte par exemple d’un niveau estimé de fiabilité des informations fournies par un expert. Cette opération appelée *affaiblissement* consiste à pondérer la masse des éléments focaux équivalents aux informations fournies par l’expert par $1 - \delta$ où δ est le facteur d’affaiblissement ($0 \leq \delta \leq 1$) et à transférer la masse résiduelle sur le cadre de discernement tout entier.

La combinaison de deux fonctions de masses indépendantes m_1^X et m_2^X est effectuée par l’opération fondamentale appelée somme conjonctive où règle de Dempster non normalisée :

$$m_1^X \otimes_2 m_2^X(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1^X(B) m_2^X(C), \quad \forall A \subseteq X. \quad (3)$$

Notons que la masse attribuée à l’ensemble vide $m_1^X \otimes_2(\emptyset)$ peut être non nulle même s’il n’en n’était pas ainsi pour les fonctions de masse m_1^X et m_2^X séparément. La masse correspondante est alors une mesure du degré de conflit entre les deux sources d’information. Elle est parfois interprétée comme la croyance que la variable \mathbf{x} puisse prendre une valeur en dehors du domaine X connu pour l’instant (hypothèse dite *du monde ouvert*).

Le MCT permet également de traiter des problèmes à plusieurs variables en intégrant des connaissances plus ou moins précises sur les relations entre ces variables. Les principales opérations possibles sont citées ci-après, les détails figurent dans [10] :

- On peut ainsi définir une loi de masse m^{XY} sur un espace produit $X \times Y$ de deux variables \mathbf{x} and \mathbf{y} (analogue d’une loi jointe en théorie des probabilités) ;
- Sur une telle loi, on peut définir la loi marginale $m^{XY \downarrow X}$ par projection des éléments focaux sur l’espace X ;
- Une opération inverse de la marginalisation dite *extension vide* permet d’obtenir l’extension notée $m^{X \uparrow XY}$ d’une loi de masse m^X définie sur X à l’espace produit $X \times Y$;
- A partir d’une loi de masse jointe m^{XY} , il est possible par l’opération de conditionnement d’obtenir la loi $m^X[y]$ sur X sachant que la variable \mathbf{y} vaut une valeur particulière y ;
- Une opération inverse dite déconditionnement ou *extension par inflation* permet d’obtenir l’extension notée $m^X[y] \uparrow^{XY}$ d’une loi conditionnelle à l’espace produit $X \times Y$.

Pour finir, outre les fonctions de masse (qui contiennent toute la connaissance nécessaire à un instant donné et permettent d’intégrer de nouvelles connaissances) et les fonctions de crédibilité et de plausibilité (qui peuvent être vues comme des bornes supérieures et inférieures de la vraisemblance d’un événement) le MCT permet également au stade de la prise de décision de transformer une loi de masse m^X en loi de probabilité pour obtenir la *probabilité pignistique* (d’un mot latin signi-

fiant “pari”) notée $BetP^X$ par :

$$BetP^X(A) = \sum_{B \subseteq X} \frac{m^X(B)}{1 - m^X(\emptyset)} \frac{|A \cap B|}{|B|}, \quad \forall A \subseteq X. \quad (4)$$

Incertitudes sur les probabilités de défaillance

Considérons pour simplifier une installation n’ayant qu’un mode de défaillance noté F en dehors de son état nominal N . L’ensemble X des états possibles du système est par conséquent $X = \{N, F\}$. Supposons que du fait de la complexité des processus mis en œuvre ou du manque d’un retour d’expérience suffisant, les taux de défaillance et les temps de latence ne soient pas connus avec certitude, l’expert n’étant en mesure de fournir que des intervalles pour chacun d’entre eux. Il en résulte que la probabilité instantanée d’être dans l’état défaillant est également connue par un intervalle $[u^-, u^+]$ dont les bornes sont les indisponibilités haute et basse (on pourrait de manière en tous points analogue traiter la fiabilité). Les *disponibilités* haute et basse sont par conséquent $a^- = 1 - u^+$ et $a^+ = 1 - u^-$. Les lois de probabilités haute et basse telles que définies dans le modèle des probabilités imprécises [11] sont par conséquent ici évidentes.

En général, ce modèle est distinct de celui des fonctions de croyance, mais dans ce cas très simple, on voit facilement que les probabilités basse et haute sont respectivement les fonctions crédibilité et plausibilité associées à la fonction de masse :

$$m^X(\{F\}) = u^- \quad (5)$$

$$m^X(\{N\}) = 1 - u^+ \quad (6)$$

$$m^X(\{N, F\}) = u^+ - u^- \quad (7)$$

Ainsi que démontré dans [2] ce résultat peut être généralisé sous certaines hypothèses réalistes au cas d’une installation ayant I modes de défaillance notés F_i $1 \leq i \leq I$, l’indisponibilité associée au mode F_i étant connue par un intervalle $[u_i^-, u_i^+]$. Dans ce cas plus général :

$$m^X(\{F_i\}) = u_i^- \quad i = 1, \dots, I \quad (8)$$

$$m^X(\{N\}) = 1 - \sum_{i=1}^I u_i^+ \quad (9)$$

$$m^X(\{N, F_i\}) = u_i^+ - u_i^- \quad i = 1, \dots, I. \quad (10)$$

Par rapport au cas d’une connaissance précise des taux de défaillance et temps de latence, qui donnerait une fonction de masse Bayésienne, la présence d’une incertitude se traduit de manière simple et élégante par l’affectation de masses sur les doublets composés de l’état nominal et d’un état défaillant. Notons au passage que l’indisponibilité pignistique obtenue dans ce cadre est simplement la moyenne arithmétique des indisponibilités haute et basse. Ainsi qu’on pourra le voir ci-après, l’avantage de formaliser le problème de cette manière au lieu de rester dans le cadre du modèle des probabilités imprécises est la possibilité de combiner cette source d’incertitude avec d’autres formulées de manière

éventuellement très différentes (informations affectées d’un facteur d’affaiblissement représentant un taux de manque de confiance dans leur source, valeurs données sous forme de nombre flous ...).

Incertitudes sur la logique de l’arbre de défaillances

Considérons maintenant deux dispositifs *indépendants* notés A et B qui effectuent des fonctions semblables et dont un expert souhaite exprimer qu’ils sont redondants en affectant l’efficacité de cette redondance d’un facteur de confiance : dans la plupart des cas la redondance fonctionne et la première défaillance maintient la fonction, mais dans d’autres la première défaillance provoque la défaillance système. Il s’agit donc en quelque sorte de modéliser une porte hybride entre une porte ET (redondance) et une porte OU (pas de redondance) dans un arbre de défaillances.

Les cadres de discernement sont ici $X_A = \{N_A, F_A\}$, $X_B = \{N_B, F_B\}$ et $X_S = \{N_S, F_S\}$ espace des états des dispositifs A et B et du système. Les données sont les fonctions de masses m^{X_A} et m^{X_B} sur X_A et X_B traduisant des disponibilités imprécises semblables aux équations (5), (6) et (7) ainsi qu’une fonction de masse sur $X_A \times X_B \times X_S$ traduisant l’incertitude sur la logique même de l’arbre de défaillances. Si l’arbre est une pure porte ET, la fonction de masse a un seul élément focal traduisant la certitude de l’expert dans la table de vérité de la porte ET :

$$m_A^{X_A \times X_B \times X_S}(\{(N_A, N_B, N_S), (N_A, F_B, N_S), (F_A, N_B, N_S), (F_A, F_B, F_S)\}) = 1. \quad (11)$$

De même pour une pure porte OU :

$$m_O^{X_A \times X_B \times X_S}(\{(N_A, N_B, N_S), (N_A, F_B, F_S), (F_A, N_B, F_S), (F_A, F_B, F_S)\}) = 1. \quad (12)$$

La modélisation de la porte hybride s’obtient donc simplement en affectant une masse m_O comprise entre 0 et 1 à l’élément focal de la porte OU et la masse $m_A = 1 - m_O$ à l’élément focal de la porte ET (m_A apparaît donc comme un taux de confiance dans l’efficacité de la redondance), soit :

$$m^{X_A \times X_B \times X_S}(\{(N_A, N_B, N_S), (N_A, F_B, N_S), (F_A, N_B, N_S), (F_A, F_B, F_S)\}) = 1 - m_O$$

$$m^{X_A \times X_B \times X_S}(\{(N_A, N_B, N_S), (N_A, F_B, F_S), (F_A, N_B, F_S), (F_A, F_B, F_S)\}) = m_O. \quad (13)$$

La fonction de masse sur X_S qui permet d’estimer la croyance dans la disponibilité du système est obtenue simplement en étendant à $X_A \times X_B \times X_S$ les masses sur X_A et X_B en utilisant l’extension vide, en combinant ces deux masses entre elles puis avec la fonction de masse relative à la logique de la porte en utilisant la somme conjonctive, puis en marginalisant sur X_S . On

trouve sans difficultés mais après quelques calculs :

$$\begin{aligned}
m^{X_S}(\{F_S\}) &= u_A^- u_B^- + m_O [u_A^- (1 - u_B^-) + u_B^- (1 - u_A^-)] \\
m^{X_S}(\{N_S\}) &= (1 - u_A^+) (1 - u_B^+) + \\
&\quad (1 - m_O) [u_A^+ (1 - u_B^+) + u_B^+ (1 - u_A^+)] \\
m^{X_S}(\{N_S, F_S\}) &= 1 - m^{X_S}(\{F_S\}) - m^{X_S}(\{N_S\}),
\end{aligned} \tag{14}$$

qui généralise aux portes hybrides le résultat de [5] qui traite les pures portes ET et OU.

Un examen attentif de ces équations montre que le résultat est strictement équivalent à celui que l'on obtiendrait en restant dans le cadre des probabilités imprécises avec les règles suivantes :

- pour une pure porte ET les indisponibilités haute et basse du système s'obtiennent respectivement en multipliant entre elles les indisponibilités haute et basse des composants ;
- pour une pure porte OU les disponibilités haute et basse du système s'obtiennent respectivement en multipliant entre elles les disponibilités haute et basse des composants ;
- le cas général s'obtient simplement en prenant le barycentre de ces deux cas extrêmes affecté des coefficients m_O et m_A .

Notons pour conclure cette section que la modélisation d'autres types de portes incertaines est possible. Dans l'exemple précédent, il est pris en compte le fait que si la porte n'est pas une porte ET, le comportement est certainement celui d'une porte OU (le système est nominal si les deux composants le sont, il est défaillant dans tous les autres cas). Alternativement, il est possible que l'expert affirme que la redondance fonctionne avec un taux de confiance de $1 - \delta$ où $0 \leq \delta \leq 1$ mais n'apporte aucune indication si la redondance ne fonctionne pas. Un tel type d'incertitude se traduit par un *facteur d'affaiblissement* de la fonction de masse sur $X_A \times X_B \times X_S$ relative à la porte ET (dans ce cas particulier son unique élément focal est multiplié par $1 - \delta$ et la masse δ est transférée sur l'ensemble du cadre de discernement $X_A \times X_B \times X_S$). On montre dans ce cas que le résultat sur X_S est également celui d'une porte ET affecté d'un facteur d'affaiblissement δ . Un tel modèle, très simple voire simpliste gagnerait à être affiné pour exclure les comportements incohérents qui y sont considérés comme crédibles (on trouve dans la fonction de masse combinée des ensembles focaux contenant des éléments du type (N_A, N_B, F_S) ou (F_A, F_B, N_S)).

Incertitudes sur les corrélations entre états

Une importante hypothèse de la section précédente est l'*indépendance* des états des composants A et B . Cette hypothèse est généralement sous-jacente à toute quantification d'arbre de défaillances ou de diagramme de fiabilité. Un des intérêts supplémentaires de l'approche par fonctions de croyance est qu'il est possible d'introduire dans le modèle certains types de dépendance tels que des modes communs (si l'on dispose d'une information positive les concernant) ou de tenir compte de l'absence de connaissance concernant ces dépendances, en tant que source particulière d'incertitude.

Supposons dans un premier temps que l'on dispose d'une information positive de la part de l'expert du type : "Je pense à 90% que les deux composants tombent en panne indépendamment les uns des autres mais je considère qu'il existe un mode commun qui dans 10% des cas fait que la panne du premier composant provoque la panne du second".

Une première approche peut être de combiner les résultats obtenus dans la section précédente avec une nouvelle fonction de masse définie sur l'espace $X_A \times X_B$. Considérer les pannes de A et B comme indépendantes signifie que l'on n'apporte aucune connaissance sur l'état de A connaissant l'état de B ou inversement : cela peut être traduit par une fonction de masse vide sur $X_A \times X_B$ ayant pour seul élément focal le cadre de discernement tout entier : $m^{X_A \times X_B}(X_A \times X_B) = 1$. Combinée avec d'autres, ce type de fonction de masse vide ne change pas le résultat.

Pour prendre en compte l'opinion citée ci-avant de l'expert sur la dépendance de mode commun supposée, cette première approche peut consister à combiner les résultats de la section précédente avec la fonction de masse suivante qui renforce l'état de panne double par rapport à l'absence totale de connaissance :

$$\begin{aligned}
m^{X_A \times X_B}(X_A \times X_B) &= 1 - \delta \\
m^{X_A \times X_B}(\{(F_A, F_B)\}) &= \delta.
\end{aligned} \tag{15}$$

où δ peut être vu comme un facteur d'affaiblissement. Ce faisant il faut être conscient du fait que l'on introduit une nouvelle information *conflictuelle* avec l'information existante : considérer avec un certain niveau de croyance que les défaillances de A et B sont corrélées contredit en partie l'information existante qui les considèrerait comme indépendantes. Cela se traduit inévitablement par des intersections vides entre éléments focaux et donc à l'affectation d'une masse non nulle à l'ensemble vide. Dans le cas qui nous occupe, la renormalisation de toutes les masses affectées aux éléments focaux non vides, de sorte que leur somme soit égale à 1 (hypothèse dite *du monde clos*) est légitime et permet de donner des résultats réalistes. Cette hypothèse est toutefois à utiliser avec la plus grande prudence et étudiée au cas par cas afin de cerner la source du conflit. Son utilisation dans des cas inadaptés (jugements d'experts radicalement conflictuels par exemple pour lesquels une utilisation non réfléchie de la combinaison de Dempster normalisée produit une fonction de masse qui semble indiquer un fort consensus) est en effet une source de résultats paradoxaux qui a conduit certains auteurs [7, 12] à rejeter (trop rapidement de notre point de vue) l'application des fonctions de croyance en sûreté de fonctionnement.

Une autre approche (n'ayant pas l'inconvénient de manipuler temporairement des fonctions de masse avec conflit) consiste à effectuer directement des affaiblissements sur la fonction de masse sur $X_A \times X_B$ qui suppose l'indépendance telle qu'obtenue dans la section précédente. Le jugement de l'expert peut être dans ce cas traduit en pondérant la masse affectée aux éléments focaux $\{(N_A, F_B)\}$ et $\{(F_A, N_B)\}$ par $(1 - \delta)$

et à transférer la masse correspondante sur $\{(F_A, F_B)\}$. La croyance sur les états de panne simple est ainsi en partie transférée de façon naturelle sur l'état de panne double. Les résultats donnés en (14) se trouvent alors modifiés et deviennent :

- La croyance dans l'état de panne système F_S est majorée de $\delta(1 - m_O)[u_A^-(1 - u_B^+) + u_B^-(1 - u_A^+)]$ qui traduit le fait que la redondance d'une porte ET est en partie mise à mal par le mode commun,
- La croyance dans l'état normal système N_S est diminuée de la même quantité pour les mêmes raisons,
- La masse résiduelle affectée à l'espace X_S tout entier, qui représente la différence entre plausibilité et croyance dans les états normal ou panne système est inchangée.

Supposons maintenant que l'on n'ait aucune idée particulière sur les dépendances éventuelles des états des dispositifs A et B : Le retour d'expérience les concernant permet de bâtir une loi de masse sur X_A et sur X_B comme dans la section précédente, mais n'est pas suffisant pour se prononcer sur la présence ou non de corrélations (par exemple parce que les données observées ne sont pas concomitantes ou simplement pas assez nombreuses). Dans ce cas il n'est pas légitime de composer simplement par somme conjonctive les lois sur X_A et les lois sur X_B , ce qui revient à introduire une loi sur $X_A \times X_B$ qui est un *cas particulier* introduisant explicitement l'hypothèse d'indépendance. La seule connaissance disponible concernant la loi sur $X_A \times X_B$ est sa marginalisation sur X_A et X_B (correspondant aux lois décrites dans la section précédente), mais en l'absence d'information plus précise, il convient de retenir la fonction de masse *la moins informative* sur $X_A \times X_B$ compatible avec ces contraintes. Une telle fonction peut être recherchée par optimisation d'un critère d'information [6] et l'incertitude correspondante prise en compte dans le résultat final.

Incertitudes sur les données d'environnement

On s'intéresse maintenant à une installation destinée à fabriquer un produit fini à partir d'une ressource d'entrée caractérisée par un paramètre \mathbf{e} susceptible de variations plus ou moins connues. Par exemple, pour l'application décrite dans [2] le paramètre \mathbf{e} était un taux de polluant dans l'eau brute servant à la fabrication d'eau potable. L'événement indésirable étant la non conformité en sortie du produit fini qui dépend de la qualité de la ressource d'entrée, il est indispensable d'introduire dans le modèle une croyance sur \mathbf{e} .

Dans le cas le plus favorable où de nombreuses données de retour d'expérience sont disponibles, il est possible de bâtir un histogramme : on définit des classes e_1, \dots, e_J qui sont des intervalles de valeurs disjoints de la valeur continue \mathbf{e} , ce qui ramène le problème à un cadre de discernement discret $E = \{e_1, \dots, e_J\}$.

Si les valeurs sont assez nombreuses, la fréquence relative de la classe e_j est une bonne estimation de sa probabilité et la loi de masse correspondante est simplement une loi de masse Bayésienne dont les J éléments focaux sont les singletons $\{e_j\}$.

Si les données ne sont pas assez nombreuses (une règle

usuelle impose au moins 5 mesures dans chaque classe), il est nécessaire de procéder à des regroupements de classes, opération équivalente à celle appelée *grossissement* du cadre de discernement dans le MCT. L'histogramme est alors bâti sur un espace E' qui est un grossissement de E avec $J' < J$ éléments. Si nécessaire pour combinaison avec d'autres fonctions, la fonction de masse obtenue peut ensuite être étendue à E par une opération analogue à l'extension vide décrite dans la section Présentation du MCT. A noter que la fonction de masse finalement obtenue n'est alors évidemment plus Bayésienne, ce qui constitue une source d'incertitude à prendre en compte.

Dans certains cas enfin aucune donnée n'est disponible et il faut s'appuyer entièrement sur un jugement d'expert pour bâtir la loi de masse sur E . Très fréquemment un expert n'est pas en mesure d'estimer les fréquences de chacune des classes, et peut seulement donner une fonction de distribution très grossière sous forme de probabilités cumulées approximatives du type : $F_j = P(\{e_1, \dots, e_j\})$ pour quelques valeurs $j = j_1, \dots, j_r$. Cette information peut être exactement traduite en une fonction de masse m_F^E définie par :

$$m_F^E(\{e_1, \dots, e_{j_1}\}) = F_{j_1},$$

$$m_F^E(\{e_{j_{k-1}+1}, \dots, e_{j_k}\}) = F_{j_k} - F_{j_{k-1}}, \quad k = 2, \dots, r,$$

$$m_F^E(\{e_{j_r+1}, \dots, e_J\}) = 1 - F_{j_r}.$$

Il est possible enfin d'effectuer une opération d'*affaiblissement* d'un facteur δ sur la fonction de masse obtenue à partir des informations fournies par l'expert ce qui revient à leur attribuer un degré de confiance $1 - \delta$ compris entre 0 (aucune confiance) et 1 (totale confiance).

Incertitudes sur les paramètres de fonctionnement

Supposons pour simplifier qu'un paramètre de fonctionnement, connu de manière précise lorsque l'installation est en mode nominal soit connu de manière imprécise lorsque l'installation est dans l'état défaillant. Par exemple, dans le cas traité dans [2] ce paramètre était un taux d'abattement α (compris entre 0 et 1) d'un polluant par une étape de traitement, ce qui se traduit par une relation linéaire entre la concentration \mathbf{s} en sortie et la concentration \mathbf{e} en entrée du type : $\mathbf{s} = (1 - \alpha)\mathbf{e}$, où α prend une valeur précise α_N en mode nominal, mais où en mode défaillant, l'expert est seulement en mesure de fournir une estimation α_F^0 avec une borne inférieure α_F^- et une borne supérieure α_F^+ . Une telle information peut être modélisée par un nombre flou triangulaire, correspondant à une fonction de possibilité triangulaire [13, 4] :

$$\pi_F(\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha - \alpha_F^-}{\alpha_F^0 - \alpha_F^-} & \text{si } \alpha_F^- \leq \alpha \leq \alpha_F^0 \\ \frac{\alpha_F^+ - \alpha}{\alpha_F^+ - \alpha_F^0} & \text{si } \alpha_F^0 < \alpha \leq \alpha_F^+ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (16)$$

Puisque $s/e = 1 - \alpha$, cela contraint les valeurs possibles des variables e et s et définit par conséquent une distribution de possibilité (conditionnellement à l'état de panne) dans l'espace $E \times S$ qui doit préalablement être discrétisé : dans sa version actuelle, le MCT ne traite en effet les espaces continus qu'au prix d'une complexité importante.

Sans entrer dans les détails de la procédure de discrétisation et d'attribution des possibilités aux rectangles de $E \times S$ (voir à ce sujet [2]), le résultat est illustré sur la figure 1 où le niveau de gris est fonction du niveau de possibilité associé au rectangle, les rectangles « diagonaux » (traversés par la droite $s/e = 1 - \alpha_F^0$) se voyant attribuer une possibilité égale à 1, ceux en dehors du faisceau de droites $s/e = 1 - \alpha_F^-$ et $s/e = 1 - \alpha_F^+$ une possibilité de 0, et les rectangles restant une possibilité comprise entre 0 et 1.

Or comme montré dans [4], pour toute distribution de possibilité sur un espace X il est possible de construire une loi de masse équivalente (dont on montre d'ailleurs que les éléments focaux sont emboîtés), dont la fonction plausibilité correspond à la possibilité initiale. De ce point de vue le MCT peut être vu comme généralisant la théorie des probabilités et celle des possibilités puisque toutes deux sont des cas particuliers de fonctions de masse. Cette généralité rend le MCT particulièrement bien adapté au traitement de problèmes où les connaissances sont exprimées sous des formes hétérogènes : informations statistiques naturellement exprimées de manière probabiliste et jugement subjectifs souvent formulés par des possibilités.

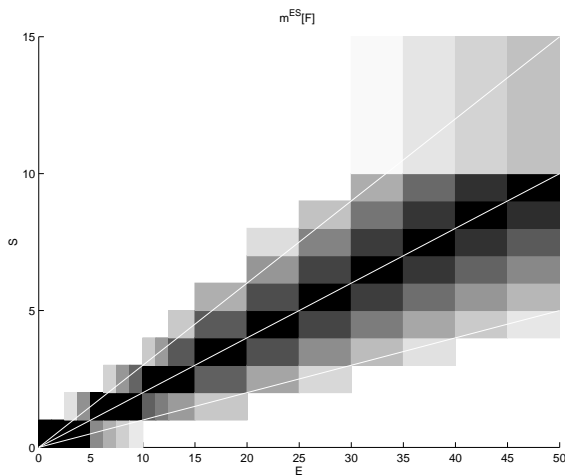


Figure 1 – Distribution de possibilité sur l'espace discrétisé $E \times S$ conditionnellement à l'état défaillant F de l'installation. Le niveau de gris est fonction de la possibilité associée au rectangle, les rectangles diagonaux ayant une possibilité de 1 et ceux extérieurs au faisceau de droites une possibilité de 0.

Dans le cas limite sans incertitude où $\alpha_F^- = \alpha_F^0 = \alpha_F^+$, seuls les rectangles « diagonaux » ont une possibilité non nulle et égale à 1 et la fonction de masse correspondante est celle qui contient ces rectangles comme seul élément focal, ce qui correspond très naturellement à

la certitude dans la relation $s/e = 1 - \alpha_F^0$. La loi de masse en question est une loi sur $E \times S$ conditionnellement à l'état défaillant de l'installation qui peut être étendue par inflation à $X \times E \times S$ (X représentant l'espace des états de l'installation) puis combinée avec d'autres (en particulier celle représentant le fonctionnement en mode nominal et la fonction de masse sur E également étendue à $X \times E \times S$) en utilisant la somme conjonctive, puis marginalisée sur la variable d'intérêt (ici s). Les fonctions de plausibilité, de crédibilité et de probabilité pignistique peuvent alors être calculées et tracées en fonction du taux d'incertitude en entrée afin de se faire une idée de la sensibilité sur l'incertitude en sortie. Une telle étude de sensibilité est montrée sur la figure 2. L'événement étudié (noté $s < N$) correspond au fait de respecter en sortie une norme de qualité N . Pour cet événement la crédibilité, la plausibilité et la probabilité pignistique sont tracées en fonction d'un paramètre ϵ qui représente l'incertitude en entrée (il est dans ce cas proportionnel à la largeur du faisceau de droites $[\alpha_F^-, \alpha_F^0, \alpha_F^+]$). Lorsque toutes les incertitudes sont supprimées ($\epsilon = 0$) crédibilité, plausibilité et probabilité pignistique tendent vers une même valeur qui correspond à la probabilité de respect que l'on obtiendrait par une approche purement Bayésienne ainsi qu'il est démontré dans [2].

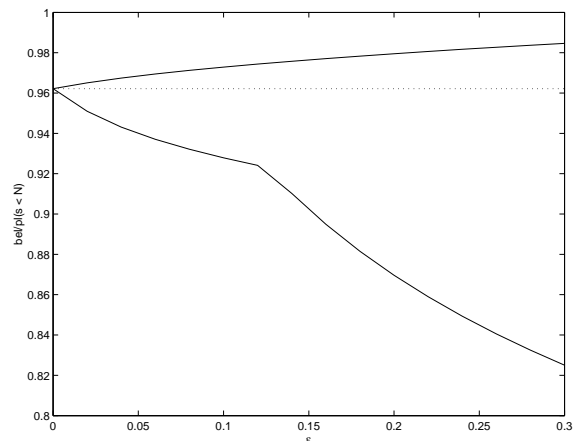


Figure 2 – Crédibilité, plausibilité et probabilité pignistique associée à l'événement correspondant au respect d'une norme de qualité à la sortie d'une station de traitement d'eau potable. Le paramètre ϵ en abscisse représente l'incertitude sur les taux d'abatement des polluants. Lorsque cette incertitude tend vers 0, les trois courbes tendent vers une limite qui correspond au résultat que l'on obtiendrait par une approche purement probabiliste. Le point anguleux que l'on peut observer sur la courbe crédibilité est un artefact de discrétisation.

Conclusions et perspectives

Les travaux objet de la présente communication montrent que le Modèle des Croyances Transférables basé sur les fonctions de croyance présente un cadre formel bien adapté à la prise en compte de données incertaines de nature très variée telles que l'on peut en

rencontrer dans des analyses de maîtrise des risques. L'évolution technologique et sociale de ce début de siècle génère en effet une demande croissante d'analyses de risques dans des domaines où les données de base sont mal connues, qu'il s'agisse de phénomènes naturels rares ou de technologies très innovantes pour lequel le retour d'expérience est inexistant. Il est par conséquent devenu indispensable que ces analyses soient à même de prendre en compte simultanément des données statistiques classiquement exprimées en termes de probabilités et des jugements d'experts de nature plus subjectives et souvent exprimés par des intervalles ou des distributions de possibilités. Dans la mesure où il contient comme cas particulier les théories des probabilités, des possibilités et par conséquent l'arithmétique des nombres flous, le MCT permet indubitablement de traiter ces connaissances hétérogènes dans un formalisme unique. Un premier exemple d'application, dans le domaine de la production d'eau potable, a été réalisé dans le cadre de travaux antérieurs, d'autres idées sont données dans la présente communication. Il serait en particulier intéressant de développer une première application dans le domaine climatologique, sans aucun doute l'un des plus sensibles dans les années à venir. Sur le plan théorique, l'extension à des espaces continus et le développement de méthodes spécifiques d'inférence statistique devrait dans les prochaines années accroître encore l'intérêt des fonctions de croyance dans le domaine de l'analyse des risques.

Références

- [1] T. Bement, J. Booker, S. Keller-McNulty, N. Singpurwalla. Testing the Untestable : Reliability in the 21st Century. *IEEE Transactions on Software Reliability*, 52 :118-124, 2003.
- [2] Démotier S., Schön W., Dencœux T. Risk assessment based on weak information using belief functions : a case of study in water treatment. A pa-
raître dans *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Part C*.
- [3] A. P. Dempster. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, AMS-38 :325-339,1967.
- [4] D. Dubois and H. Prade. *Possibility Theory : An approach to computerized processing of uncertainty*. Plenum Press, New-York, 1988.
- [5] Guth, M. A. A probabilistic foundation for vagueness and imprecision in fault tree analysis. *IEEE Transactions on Reliability* 40 :563-570,1991.
- [6] G. J. Klir and M. J. Wierman. *Uncertainty-Based Information. Elements of Generalized Information Theory*. Springer-Verlag, New-York, 1998.
- [7] I. O. Kozine and Y.V. Filimonov. Imprecise Reliabilities : Experiences and Advances. *Reliability Engineering and System Safety*, 67 :75-83, 2000.
- [8] G. Shafer. *A mathematical theory of evidence*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1976
- [9] P. Smets and R. Kennes. The Transferable Belief Model. *Artificial Intelligence*, 66 :191-243, 1994.
- [10] P. Smets. The transferable belief model for quantified belief representation. In Smets, P. (ed.), *Handbook of defeasible reasoning and uncertainty management systems* Vol. 1, pp : 267-301, Kluwer, Dordrecht, 1998.
- [11] P. Walley. *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. Chapman and Hall, London, 1991
- [12] J. S. Wu, G. E Apostolakis and D. Okrent. Uncertainties in System Analysis : Probabilistic versus Nonprobabilistic Theories. *Reliability Engineering and System Safety*, 30 :163-191, 1990.
- [13] L.A Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1 :3-28,1978.