

Estimation d'état par la théorie des fonctions de croyances

State estimation using belief function theory

Ghalia Nassreddine

Fahed Abdallah

Thierry Dencœur

HEUDIASYC, UMR CNRS 6599

Université de Technologie de Compiègne

B.P. 20529, 60205 Compiègne Cedex, FRANCE

tél : +33.3.44.23.44.85 fax : +33.3.44.23.44.77

fahed.abdallah@hds.utc.fr

Résumé :

La théorie des fonctions de croyance est un cadre théorique adapté pour adopter les problèmes de fusion d'informations dans le cas des données hétérogènes, incertaines, imprécises, ou manquantes. Dans cet article, nous présentons une application de cette théorie à l'estimation d'état des systèmes dynamiques. Nous présentons le problème d'estimation sous la forme d'un réseau de valuation appliqué dans le cadre des fonctions de croyance. Les éléments focaux considérés sur les variables réelles étant des intervalles, nous utilisons quelques outils développés dans le cadre de la théorie des intervalles. Les expérimentations sur un problème réel de localisation d'un véhicule mobile montrent l'efficacité de l'approche proposée.

Mots-clés :

Estimation d'état, fonctions de croyance, réseaux de valuation, approche à erreurs bornées, fusion de données.

Abstract:

The Belief theory is one the most appropriate theory to address data fusion problems in the case of heterogeneous, uncertain, inaccurate, or missing data. In this paper we present a data filtering and fusion method applied to dynamic systems by using belief function theory. We formulate the problem using evidential networks. The focal element, are considered to be an interval. We investigate some properties and functionalities of the data interval theory. Results on real data show the usefulness of the method.

Keywords:

State estimation, belief function, valuation networks, bounded error approach, data fusion

1 Introduction

En général, dans les applications relevant des problèmes d'estimation dynamique de l'état d'un système, on est amené à faire appel à plusieurs capteurs, ou systèmes, éventuellement hétérogènes. Les algorithmes de fusion de données ont pour mission d'exploiter au mieux

la complémentarité des informations pour donner une estimation *convenable* de l'état. Le choix d'un algorithme particulier dépend des propriétés désirées de la solution, telle que la garantie, la précision, la multiplicité, ou autre. Le filtrage bayésien répond aux problèmes d'estimation d'état en utilisant une modélisation probabiliste des informations disponibles, ainsi qu'en adoptant une démarche d'estimation issue de la théorie bayésienne. Cependant, la mise en œuvre de la solution analytique d'un tel type de filtrage s'avère dans la plupart des cas impossible. En pratique, le formalisme du filtre de Kalman étendu représente une solution assez simple aux problèmes d'estimation [3]. Son principe consiste à revenir, par linéarisation, au filtrage de Kalman linéaire, qui est la solution *optimale* du filtrage bayésien dans le cas d'un modèle linéaire avec des bruits gaussiens centrés. Lorsque les équations du modèle sont *fortement* non-linéaires et non-gaussiennes, le filtre de Kalman s'éloigne de l'optimalité, et cède la place à d'autres types de filtrage mieux adaptés pour faire face à ce type de problèmes. Les *méthodes particulières*, appelées communément *méthodes de Monte Carlo séquentielles* ou aussi *filtres bootstrap*, forment une classe de techniques de simulation permettant de mettre en œuvre le filtrage bayésien, par le biais d'un échantillon discret (ou ensemble de particules) obtenu par simulation pour approximer une distribution de probabilité que l'on ne sait pas calculer analytiquement. L'efficacité et la pertinence de la méthode

du filtre particulière dépendent, la plupart du temps, du nombre de particules utilisées dans l'approximation de la densité de probabilité de l'état [1, 3].

Lorsque l'on connaît seulement une borne maximale des erreurs sur les données disponibles, il apparaît judicieux de modéliser ces données en utilisant des intervalles. Les méthodes qui utilisent une telle modélisation s'inscrivent dans le cadre des approches à erreurs bornées (AEB). L'estimation paramétrique à erreurs bornées représente une direction de recherche relativement nouvelle dans certaines applications du traitement du signal. Dans le domaine de la commande il y a eu des travaux montrant l'utilité et l'efficacité de telles approches. Dans [9], les auteurs utilisent l'AEB pour obtenir une garantie de la solution de localisation, sans se servir de l'estimation *ponctuelle* de l'état du système. La théorie des fonctions de croyance (TFC), connue aussi sous le nom de *théorie de Dempster-Shafer*, ou *théorie de l'évidence*, est une théorie relativement récente, et qui a fait l'objet d'un intérêt croissant du fait de sa capacité à mieux modéliser et gérer des informations incertaines ou imprécises [4, 13, 15]. Dans [17], les auteurs présentent une approche pour le pistage et la classification de cibles en se basant sur les fonctions de croyances continues.

Dans cet article, nous proposons une nouvelle approche du filtrage basée sur les fonctions de croyance (FFC). Nous allons adopter une représentation du problème sous forme d'un réseau évidentiel qui est une représentation graphique des croyances relatives à l'ensemble des variables du système [19]. Le filtrage et la fusion de données s'effectuent alors sur le réseau en utilisant une modélisation et des outils relevant de la TFC. Un réseau évidentiel est un hypergraphe dont chaque sommet représente une variable dans le modèle de dépendance, et les arcs représentent les relations causales entre ces variables. Chaque variable peut prendre une ou plusieurs valeurs possibles de l'état. La croyance dans chacun de ces états est déterminé à partir de la croyance dans chaque état possible

de chaque nœud directement connecté, et la relation qui existe avec chacun de ces nœuds. La croyance dans chaque état d'un nœud est mise à jour à chaque fois que la croyance dans n'importe quel nœud directement connecté change. La mise en œuvre de la méthode proposée est rendue possible par l'utilisation de certains outils relevant du calcul ensembliste. En effet, dans les problèmes d'estimation d'état des systèmes dynamiques, des relations existent entre les différentes variables du système. En reformulant ces relations dans un réseau évidentiel, on est amené à utiliser l'arithmétique des intervalles ainsi que des techniques de satisfaction de contraintes [10] pour étendre et marginaliser la connaissance sur les différentes parties du réseau.

La suite de l'article est organisée comme suit. Tout d'abord, quelques outils de l'analyse par intervalles sont présentés dans la Section 2. La Section 3 rappelle des notions de base de la TFC. L'approche du FFC proposée est introduite dans la Section 4. Cette approche est basée sur l'utilisation des outils de la TFC ainsi que sur une formulation utilisant les réseaux évidentiels. La Section 5 met en œuvre l'algorithme proposé sur un problème réel de localisation d'un véhicule équipé de différents capteurs.

2 Quelques outils de l'analyse par intervalles

Les approches à erreurs bornées (AEB), sont basées sur l'utilisation des intervalles pour modéliser les variables incertaines et aléatoires. Habituellement, l'analyse par intervalles est employée pour modéliser les quantités qui changent autour d'une valeur centrale et entre deux bornes, inférieure et supérieure, sans faire d'autre hypothèse sur la distribution entre ces bornes. Un intervalle réel, noté $[x]$, est défini comme un sous ensemble fermé et convexe de \mathbb{R} tel que $: [x] = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R}, \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$, où \underline{x} et \bar{x} sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de $[x]$. Un pavé $[\mathbf{x}]$ de \mathbb{R}^{n_x} est défini comme un produit cartésien

de n_x intervalles : $[x] = [x_1] \times [x_2] \cdots \times [x_{n_x}] = \times_{i=1}^{n_x} [x_i]$. Les opérations arithmétiques élémentaires telles que l'addition et la soustraction sont étendues pour être utilisées sur les intervalles. On peut aussi utiliser les opérations habituelles entre les ensembles de \mathbb{R}^n , i.e, $\subset, \supset, \cap, \dots$. Notons que l'image d'un pavé par une fonction n'est pas nécessairement un pavé. Il est aussi commode d'introduire une fonction d'inclusion $[f]$ de la fonction f , telle que définie de manière à ce que l'image par $[f]$ d'un pavé $[x]$ soit un pavé $[f]([x])$ [10] tel que $\forall [x], f([x]) \subseteq [f]([x])$. En général, cette fonction est définie de sorte que le pavé contenant l'image soit le plus petit possible. Le résultat de cette opération est cependant souvent sous-optimal. L'obtention d'une solution *acceptable* est conditionnée par l'utilisation de certains algorithmes, appelés *contracteurs*, qui ont pour mission de réduire la taille des pavés englobant la solution. Pour le problème de fusion considéré dans cet article, on a choisi d'utiliser les techniques de propagation de contraintes [10], du fait d'une grande redondance des données et des équations.

Pour définir le *Problème de Satisfaction de Contraintes*, on considère un système de m relations $f_j, j = 1, \dots, m$ reliant des variables x_i d'un vecteur \mathbf{x} de \mathbb{R}^{n_x} par un ensemble d'équations de la forme : $f_j(x_1, \dots, x_{n_x}) = 0, j = 1 \dots m$, qui peut être écrit d'une manière compacte comme $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, où \mathbf{f} est le produit cartésien des f_j .

Definition 1 (problème de satisfaction de contraintes). *Un problème de satisfaction de contraintes \mathcal{H} est un problème qui rassemble un vecteur de variables \mathbf{x} appartenant à un domaine initial \mathbf{D} et un ensemble de contraintes \mathbf{f} reliant les variables x_i de \mathbf{x} .*

Dans le cadre de l'analyse par intervalles, $\mathbf{D} = [\mathbf{x}] = \times_{i=1}^{n_x} [x_i]$. Le problème de satisfaction de contraintes consiste ainsi à trouver les valeurs de \mathbf{x} qui satisfont $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. L'ensemble de solutions est défini par $\mathbf{S} = \{x \in [x] / \mathbf{f}(x) = \mathbf{0}\}$. Notons que \mathbf{S} n'est pas nécessairement un pavé. Dans le domaine de l'analyse par intervalles, résoudre le problème de satisfaction de

contraintes consiste à *trouver le plus petit pavé $[\mathbf{x}'] \subseteq [\mathbf{x}]$ tel que $\mathbf{S} \subseteq [\mathbf{x}']$.*

Definition 2 (Contracteur). *Un contracteur est un opérateur permettant de réduire le domaine initial du problème de satisfaction de contraintes, et ainsi fournir un nouveau pavé $[\mathbf{x}'] \subseteq [\mathbf{x}]$ vérifiant $\mathbf{S} \subseteq [\mathbf{x}']$.*

Il y a plusieurs méthodes pour développer des contracteurs. Chacune de ces méthodes peut être adaptée à un problème spécifique de satisfaction de contraintes et pas à un autre. La méthode utilisée dans cet article est l'algorithme de Waltz basé sur la propagation des contraintes primitives [10]. Notons qu'une contrainte primitive contient seulement un opérateur arithmétique ou une fonction usuelle (cos, exp, etc.). Le principe du contracteur de Waltz est de contracter sans aucun ordre a priori des contraintes primitives, jusqu'à ce que le contracteur devienne inefficace. L'utilisation de ce contracteur peut être particulièrement efficace lorsqu'il y a une redondance de données et d'équations. Notons que l'algorithme de Waltz est indépendant des non-linéarités et offre un contracteur localement consistant [10].

Le principe du contracteur de Waltz est illustré par l'exemple suivant. Considérons la contrainte $z = x \exp(y)$. En premier lieu, cette contrainte est décomposée en contraintes primitives :

$$\begin{cases} a = \exp(y) \\ z = x \cdot a \end{cases} \quad (1)$$

où a est une variable auxiliaire initialisée à $[a] = [0, +\infty[$. Chaque équation de (1) est obtenue en isolant une des variables de la contrainte principale. En utilisant les fonctions d'inclusion $[\exp]$ et $[(\exp)^{-1}] = [\ln]$, la propagation des contraintes fonctionne comme suit :

- $[a] = [a] \cap [\exp]([y])$
- $[z] = [z] \cap [x] \cdot [a]$
- $[x] = [x] \cap ([z] / [a])$
- $[a] = [a] \cap ([z] / [x])$
- $[y] = [y] \cap [\ln]([a])$.

En appliquant la propagation des contraintes sur un domaine initial défini par $[z] = [0, 3]$, $[x] = [1, 7]$ et $[y] = [0, 1]$, on obtient :

- $[a] = [a] \cap [\text{exp}](y) = [1, e]$
- $[z] = [z] \cap [x].[a] = [1, 3]$
- $[x] = [x] \cap ([z]/[a]) = [1/e, 3]$
- $[a] = [a] \cap ([z]/[x]) = [1/3, 3e]$
- $[y] = [y] \cap [\ln](a) = [0, 1]$

Pour plus de détails sur l'analyse par intervalles et les approches à erreurs bornées, le lecteur est invité à consulter [10] et les références incluses.

3 Concepts généraux sur les fonctions de croyance

La TFC est un outil formel approprié pour représenter des connaissances imprécises et incertaines. Contrairement à la théorie bayésienne, elle ne se base pas sur une quantification probabiliste, mais sur un modèle plus général basé sur les fonctions de croyance. Dans cette section, nous introduisons les concepts principaux de cette théorie, ainsi que quelques notions utilisées dans la suite de cet article. Soit Ω un ensemble fini contenant toutes les valeurs possibles d'une variable X . Cet ensemble est appelé *cadre de discernement*. Chaque *structure de croyance* sur Ω correspond à une fonction de masse m de l'ensemble 2^Ω des parties de Ω dans $[0, 1]$, vérifiant : $\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1$. Chaque sous-ensemble A de Ω tel que $m(A) > 0$ est appelé un *élément focal* de m . La différence avec les modèles probabilistes est que les masses peuvent être affectées à chaque sous-ensemble de Ω et non seulement aux singletons de Ω , comme c'est le cas dans la théorie des probabilités. Si tous les éléments focaux sont des singletons, m est dite *bayésienne*. Si les éléments focaux sont emboîtés, m est dite *consonante*. Une fonction de masse m telle que $m(\emptyset) = 0$ est appelée *fonction de masse normale*. L'ignorance totale peut être modélisée par la fonction de masse vide $m(\Omega) = 1$. A partir de la fonction de masse m , on définit la *fonction de croyance* par $bel : 2^\Omega \mapsto [0, 1]$, telle que :

$bel(A) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} m(B)$, pour tout $A \subseteq \Omega$. La quantité $bel(A)$ quantifie la croyance totale allouée à A . Elle correspond à la somme de toutes les masses affectées aux éléments focaux non vides inclus dans A .

La *fonction de plausibilité*, notée pl , quantifie la croyance maximale qui peut être allouée à chaque proposition. Elle est obtenue par l'addition de toutes les masses affectées aux éléments focaux B vérifiant $B \cap A \neq \emptyset$:

$$pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) = bel(\Omega) - bel(\bar{A}). \quad (2)$$

Deux fonctions de masse différentes et indépendantes m_1 et m_2 peuvent être combinées par la règle de Dempster normalisée [4, 15] pour donner lieu à une seule fonction de masse $m = m_1 \oplus m_2$:

$$\begin{cases} m(\emptyset) = 0 \\ m(A) = \frac{\sum_{B \cap C = A} m_1(B)m_2(C)}{\sum_{B \cap C \neq \emptyset} m_1(B)m_2(C)}, \quad \forall A \neq \emptyset. \end{cases} \quad (3)$$

Si la fonction de masse m^Ω est définie sur $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, la marginalisation permet de restreindre le cadre de discernement [16]. La fonction de masse marginale $m^{\Omega \downarrow \Omega_1}$ sur Ω_1 est donnée par :

$$m^{\Omega \downarrow \Omega_1}(A) = \sum_{\{B \subseteq \Omega / \text{proj}(B \downarrow \Omega_1) = A\}} m^\Omega(B), \quad (4)$$

où $\text{proj}(B \downarrow \Omega_1)$ est la projection de B sur Ω_1 , définie par : $\text{proj}(B \downarrow \Omega_1) = \{\omega_1 \in \Omega_1 / \exists \omega_2 \in \Omega_2; (\omega_1, \omega_2) \in B\}$. A contrario, le concept d'extension permet d'élargir le cadre de discernement. Ainsi, si la fonction de masse m^{Ω_1} est définie sur Ω_1 , son extension sur $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ est définie par, $\forall B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$:

$$m^{\Omega_1 \uparrow \Omega}(B) = \begin{cases} m^{\Omega_1}(A) & \text{si } B = A \times \Omega_2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5)$$

Cette définition provient du principe d'engagement minimal qui consiste à choisir la fonction de croyance la moins précise parmi celles vérifiant un ensemble de contraintes.

4 Estimation d'état par la TFC

4.1 Introduction

Considérons un système non-linéaire dont le modèle d'évolution est décrit par :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) \\ \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+1}), \end{cases} \quad (6)$$

où $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_3} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ est une fonction, éventuellement non linéaire, définissant la relation entre l'état \mathbf{x}_{k+1} à l'instant $k + 1$, l'état \mathbf{x}_k à l'instant k , l'entrée \mathbf{u}_k et un bruit $\mathbf{v}_k, k \in \mathbb{N}$. La fonction $\mathbf{g} : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_5} \rightarrow \mathbb{R}^{n_4}$ est une fonction, éventuellement non linéaire, définissant la relation entre l'état et la mesure à \mathbf{z}_k l'instant k . La variable \mathbf{w}_k représente le bruit de mesure. Pour résoudre le problème d'estimation d'état, il faut fusionner les informations disponibles en provenance de différents capteurs en respectant le modèle d'évolution (6), et donner ainsi une estimation dans un cadre théorique prédéfini, relevant par exemple de la théorie de probabilités, de la théorie des possibilités ou de la théorie des fonctions de croyance.

4.2 Réseau de Valuation pour l'estimation d'état

Le problème d'estimation d'état du système (6) peut être représenté par un réseau de valuation (RV), tel qu'introduit par Shenoy et Shafer [14]. La connaissance contenue dans le modèle (6) est exprimée par un réseau composé de nœuds représentant des variables, et de liens représentant les relations entre les variables. Ces relations peuvent exprimer les contraintes logiques ou quantifier l'incertitude. Ainsi pour traiter un problème avec les RVs, on considère tous les éléments pertinents et on établit les nœuds et les liens correspondants dans le réseau. Ensuite, on associe des fonctions, appelées *valuations* à ces liens pour représenter la connaissance. La croyance dans chacun des états est déterminée à partir de la croyance dans chaque état possible de chaque

nœud directement connecté, et de la relation qui existe avec chacun de ces nœuds. La croyance dans chaque état d'un nœud est mise à jour à chaque fois que la croyance dans n'importe quel nœud directement connecté change. Notons qu'avec un RV, on peut utiliser des formalismes différents pour la représentation de l'incertitude, y compris la théorie des probabilités, la théorie de possibilités ou la théorie des fonctions de croyance.

L'approche présentée dans cet article consiste en deux étapes, appelées *combinaison* et *marginalisation*. Par la combinaison des valuations dans un réseau, nous obtenons la valuation commune sur le *domaine d'intérêt entier*. La marginalisation est alors employée pour concentrer cette valuation commune sur le *domaine d'intérêt*, et calculer la valuation d'incertitude limitée à ce domaine. Quand il y a beaucoup de nœuds dans un RV, le calcul de la valuation commune est une tâche complexe qui demande beaucoup de ressources informatiques. Cependant, il est souvent possible de calculer les marginales sur le domaine d'intérêt en utilisant un calcul local, réduisant ainsi fortement la complexité informatique. Un calcul local peut être utilisé quand [14], [19] :

- Le problème peut être décomposé en sous-problèmes, et
- Les opérateurs de combinaison et de marginalisation satisfont à certains axiomes. Ces axiomes sont vérifiés par les représentations classiques d'incertitude comme dans les théories de probabilités, de possibilités, et des fonctions de croyance.

La théorie utilisée dans ce travail est celle des fonctions de croyance. Nous représentons les relations entre les variables, dans le réseau évidentiel correspondant, par des fonctions de croyance jointes sur l'espace produit. Ces fonctions de croyance sont définies sur une union d'intervalles. Ainsi dans l'étape de marginalisation, on va avoir recours à des outils développés dans le cadre de la théorie des intervalles [10]. Outre l'arithmétique des intervalles, nous allons utiliser des algorithmes relevant des problèmes

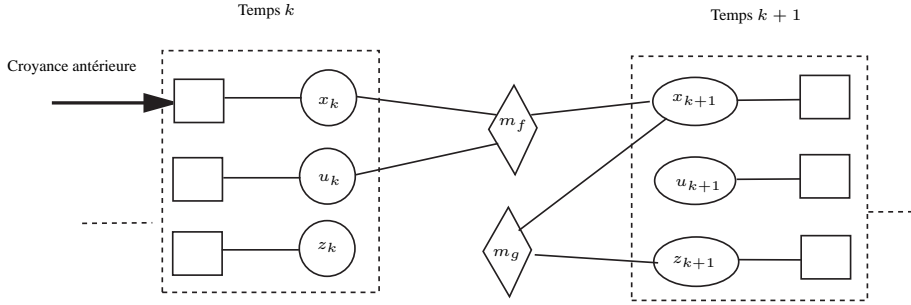


Figure 1 – Structure du RV correspondant au système 6.

de *satisfaction des contraintes* pour marginaliser sur des *domaines d'intérêt restreints*. En pratique, on considère que les bruits dans le modèle (6) sont additifs. Avec la même hypothèse, le modèle (6) peut être simplifié en incluant l'incertitude correspondant aux bruits dans les fonctions de croyances sur l'état et de la mesure. On peut ainsi utiliser le modèle suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \\ \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k+1}). \end{cases} \quad (7)$$

La Figure 1 schématise le RV du modèle (7).

4.3 Algorithme

Soient \mathbf{X}_k , \mathbf{Z}_k et \mathbf{U}_k les cadres de discernement correspondant, respectivement, à l'état, la mesure et l'entrée à l'instant k . Soient $m^{\mathbf{X}_k}$, $m^{\mathbf{Z}_k}$ et $m^{\mathbf{U}_k}$ les fonctions de masses de croyance correspondantes.

Comme le montre la Figure 1, le problème d'estimation d'état peut être décomposé en deux sous-problèmes caractérisés par les fonctions \mathbf{f} et \mathbf{g} . Pour chaque sous-problème, les différentes variables sont liées par une fonction de masse catégorique et indépendante de k , $m_f^{\mathbf{X}_k \times \mathbf{U}_k \times \mathbf{X}_{k+1}}$ ou $m_g^{\mathbf{Z}_{k+1} \times \mathbf{X}_{k+1}}$. Comme indiqué précédemment, la croyance sur chaque variable peut être calculée à partir de la croyance des variables directement connectées. Les étapes principales de notre démarche peuvent être résumées de la manière suivante. A partir de la croyance antérieure sur l'état et sur l'entrée, on calcule une fonction de croyance $m^{\mathbf{X}_{k+1}}$ sur

\mathbf{X}_{k+1} . Cette croyance est utilisée ensuite pour calculer une fonction de croyance sur la mesure prédite notée $\hat{\mathbf{z}}_{k+1}$. En combinant cette fonction de croyance avec celle de la mesure observée \mathbf{z}_{k+1} , on peut calculer une fonction de croyance sur l'intersection $\mathbf{r}_{k+1} = \hat{\mathbf{z}}_{k+1} \cap \mathbf{z}_{k+1}$.

Si la fonction \mathbf{g} est inversible, \mathbf{r}_{k+1} permet de nous donner une nouvelle connaissance sur l'état \mathbf{X}_{k+1} . On obtient ainsi deux fonctions de croyance différentes sur \mathbf{X}_{k+1} . Cependant, il faut noter que les fonctions d'inclusion utilisées pour propager les ensembles focaux, sous formes de pavés, sont des fonctions pessimistes, dans le sens où les ensembles focaux résultants englobent les ensembles focaux exacts. Ainsi, pour obtenir à partir de \mathbf{r}_{k+1} une solution *plus contractées* sur \mathbf{X}_{k+1} , on doit utiliser des algorithmes de contraction, tels que, l'algorithme de Waltz. L'application de l'algorithme de Waltz affecte les ensembles focaux et ainsi les fonctions de masse.

En résumé, on peut dire que la fonction de masse résultante sur \mathbf{X}_{k+1} est calculée via la relation :

$$m^{\mathbf{X}_{k+1}} = [(m^{\mathbf{X}_k} \oplus m^{\mathbf{U}_k} \oplus m^{\mathbf{Z}_{k+1}} \oplus m_g^{\mathbf{X}_{k+1} \times \mathbf{Z}_{k+1}} \oplus m_f^{\mathbf{X}_k \times \mathbf{U}_k \times \mathbf{X}_{k+1}}) \downarrow \mathbf{X}_{k+1}]. \quad (8)$$

Notons que dans (8), toutes les fonctions de masse sont étendues au même cadre de discernement, $\Omega = X_{k+1} \times Z_{k+1} \times X_k \times Z_k \times U_k$, avant l'application du règle de Dempster.

Pour créer les fonctions de croyance sur les

variables d'entrée et de mesure, nous avons utilisé une transformation de type Probabilité-Possibilité [6], guidée par le principe de maximum de spécificité. Ce principe postule d'un événement doit être possible avant d'être probable, suggérant ainsi que les degrés de possibilité ne peuvent être inférieurs aux probabilités. En se basant sur une loi gaussienne de variance σ^2 , cette transformation peut être réalisée en utilisant la valeur modale, ainsi que la notion d'intervalle de confiance. Dans le cadre de l'application de la Section 5, des tests spécifiques, en statique, ont été menés pour déterminer les bornes d'erreur sur les capteurs d'entrée. La mesure de la position est donnée par un système de positionnement global (GPS) qui donne aussi l'écart-type σ_{GPS} sur x et y estimé en temps réel. Ainsi, pour chaque variable, on peut considérer qu'on dispose de la valeur modale et de la variance σ^2 .

Pour une variable X , soient x^* la valeur modale, et I_α^* un intervalle construit autour de x^* . Le niveau de confiance $\alpha = P(I_\alpha^*)$ correspond à la probabilité que l'intervalle I_α^* contienne la valeur exacte de x . On démontre que la distribution de possibilités π^* , dont les α -coupes sont les intervalles de confiance construits autour de x^* , est consistante avec la loi de probabilité p utilisée, c.à d., $\forall A$ mesurable $\Pi(A) \geq P(A)$ où Π et P sont les mesures de possibilité et de probabilité associées à π^* et p . La distribution de possibilité est donnée par $\pi^*(x) = \sup\{1 - P(I_\alpha^*), x \in I_\alpha^*\}$.

Combinaison des éléments focaux. En pratique, on peut avoir des situations où plusieurs sources d'informations (ou fonctions de masse), définies sur des cadres de discernement identiques ou différents, existent. Ceci peut engendrer l'explosion du nombre des ensembles focaux lors de la combinaison des croyances. Pour remédier à ce problème on utilise des algorithmes permettant de combiner les ensembles focaux et de réduire leur nombre suivant un critère prédéfini dépendant de l'application en court. La méthode de *summarization* est une méthode simple de combinaison basée

sur l'idée de conserver les éléments focaux de masse importante [2]. Le résidu de masse est transféré sur l'union des éléments focaux supprimés. Si m est une fonction de masse et m_s son approximation par *summarization* dans laquelle k éléments sont conservés, avec M l'ensemble de k éléments dominants de 2^Ω , la fonction de masse m_s est calculée via la relation :

$$m_s(A) = \begin{cases} m(A) & A \in M \\ \sum_{A' \notin M} m(A'), & A = A_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (9)$$

où $A_0 = \bigcup_{A' \notin M, m(A') > 0} A'$ est l'union des ensembles focaux supprimés. D'autres méthodes d'approximation sont décrites dans [2, 4] et les références incluses.

Estimation d'état. Afin de donner une estimation à partir de la fonction de croyance calculée sur \mathbf{X} , on utilise la transformation pignistique [16]. Si m^Ω est une fonction de masse sur Ω , la probabilité pignistique correspondante, notée *BetP*, est donnée par :

$$BetP(X) = \sum_{Y \in \Omega} \frac{|X \cap Y|}{|Y|} \frac{m^\Omega(Y)}{1 - m(\emptyset)}, \quad (10)$$

avec $|V|$ est le cardinal de V . Le calcul de l'état estimé se fait en utilisant la relation :

$$\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^N BetP([\mathbf{x}_k^i]) \cdot C_k^i, \quad (11)$$

où C_k^i est le centre du $i^{\text{ème}}$ élément focal $[\mathbf{x}_k^i]$ et N le nombre d'ensembles focaux. La confiance dans cette estimation peut être calculée via la relation :

$$\begin{cases} x_{k,inf} &= \sum_{i=1}^N BetP([\mathbf{x}_k^i]) \cdot x_{k,inf}^i \\ x_{k,sup} &= \sum_{i=1}^N BetP([\mathbf{x}_k^i]) \cdot x_{k,sup}^i \end{cases} \quad (12)$$

où $x_{k,inf}^i$ et $x_{k,sup}^i$ représentent les bornes inférieure et supérieure du $i^{\text{ème}}$ élément focal de X . L'algorithme du FFC est présenté dans la figure 2.

1. Initialisation

- (a) Initialiser $k = 0$ et générer à partir de la mesure, une fonction de croyance sur n_x pavés $\{\mathbf{x}_0^i\}_{i=1}^{n_x}$, avec comme fonction de masse m^{X_0} .
- (b) A partir de l'entrée \mathbf{u}_0 , générer une fonction de croyance sur n_u pavés $\{\mathbf{u}_0^j\}_{j=1}^{n_u}$, avec comme fonction de masse m^{U_0} .
- (c) Choisir un nombre maximal l' d'ensembles focaux pour $m^{X_k}, \forall k$.

2. $l = 0, w = 0$.

3. **FOR** $i = 1 : n_x$, **FOR** $j = 1 : n_u$,

4. $l = l + 1$.

5. Propagation ou prédiction : $[\mathbf{x}_{k+1}] = [\mathbf{f}]([\mathbf{x}_k], [\mathbf{u}_k])$.

6. prédiction de mesure : $[\mathbf{z}_{k+1}] = [\mathbf{g}]([\mathbf{x}_{k+1}])$

7. Mise à jour de mesure

- (a) A partir de la mesure, construire une fonction de croyance sur n_z pavés $\{\mathbf{z}_{k+1}^o\}_{o=1}^{n_z}$, ayant pour fonction de masse $m^{Z_{k+1}}$.

(b) **FOR** $o = 1 : n_z$,

(c) $w = w + 1$.

(d) Calcul de l'innovation : Calcul de l'intersection entre la mesure prédite et la mesure observée : $[\mathbf{r}_{k+1}^w] = [\hat{\mathbf{z}}_{k+1}^l] \cap [\mathbf{z}_{k+1}^o]$.

(e) Application de l'algorithme de Waltz : $[\mathbf{x}_{k+1}^l]' = \text{Waltz}([\mathbf{x}_k^i], [\mathbf{x}_{k+1}^j], [\mathbf{u}_k^j], [\mathbf{r}_{k+1}^w], f, g)$

(f) Mise à jours de la fonction de masse en utilisant (8).

8. **ENDFOR** $_i$, **ENDFOR** $_j$, **ENDFOR** $_o$

9. Normalisation des fonctions de masse sur les l ensembles focaux de \mathbf{X} .

10. Utiliser un algorithme approprié pour la combinaison d'ensembles focaux pour obtenir $n_x \leftarrow l'$.

11. Estimation de l'état $\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^{n_x} \text{BetP}([\mathbf{x}_k^i]) \cdot C_k^i$, Avec C_k^i est le centre de l'élément focal $[\mathbf{x}_k^i]$.

12. $k = k + 1$, Aller à l'étape 2 jusqu'à $k = k^{end}$.

Figure 2 – Algorithme du FFC

5 Application à la localisation dynamique

Nous appliquons l'algorithme sur un problème de localisation d'un véhicule. A l'instant

k , on note respectivement $\delta_{S,k}$ et $\delta_{\theta,k}$ les déplacements et rotations élémentaires donnés par les capteurs. Des tests spécifiques, en statique, ont été faits pour déterminer les bornes d'erreur sur les capteurs. La position (x_k, y_k) et le cap θ_k du véhicule à l'instant k forment le vecteur d'état à l'instant k , $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k, \theta_k)$. L'évolution du système est représenté par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \delta_{S,k} \cos(\theta_k + \frac{\delta_{\theta,k}}{2}) \\ y_{k+1} = y_k + \delta_{S,k} \sin(\theta_k + \frac{\delta_{\theta,k}}{2}) \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \delta_{\theta,k}. \end{cases} \quad (13)$$

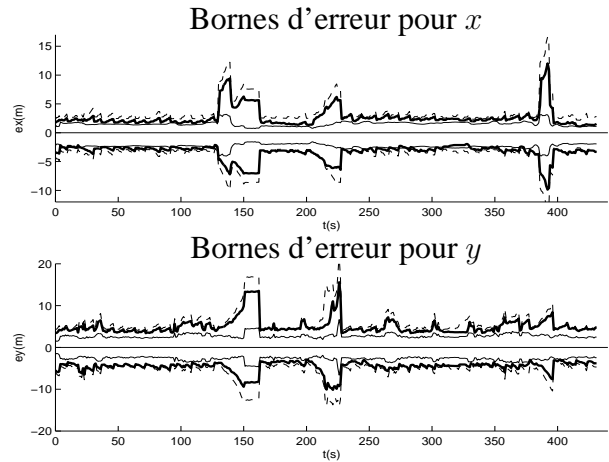


Figure 3 – Intervalles d'erreur pour x et y estimés pour le GPS (pointillé), AEB (gras) et FFC (trait plein).

La mesure de la position est donnée par un système de positionnement global (GPS) (x_{GPS}, y_{GPS}) . Le point longitude, latitude estimé du GPS est converti dans un repère local et la borne d'erreur du positionnement est obtenue grâce à la trame *GST NMEA* [8]. La fonction de croyance sur la mesure GPS peut alors être quantifiée en utilisant l'écart-type σ_{GPS} sur x et y estimé en temps réel par le récepteur GPS (trame GST). La mesure GPS $([x_{GPS}], [y_{GPS}])$ est utilisée pour initialiser la croyance sur l'état \mathbf{X} à l'instant t_0 . En absence de mesure directe du cap, celui-ci est initialisé par $[\theta_0] = [-\infty, +\infty]$.

Pour une erreur d'estimation, nous avons eu

recours à un récepteur GPS *Thales Navigation* utilisé en mode *Post-Processed Kinematic (PPK)* en travaillant avec une base locale (un Trimble 7400). Les résultats ont été obtenus sur un trajet de 4.7 Km avec une vitesse moyenne de 50 Km/h.

Le Tableau 1 montre l'erreur quadratique moyenne sur x et y pour le GPS, le filtrage particulière (FP), l'approche à erreurs bornées (AEB), ainsi que le FFC. On peut remarquer que le FFC et le FP ont des performances d'estimation équivalentes, largement supérieures à celles de l'AEB. Cependant, l'intérêt de la méthode FFC réside dans le fait qu'elle conserve la notion d'estimation garantie apportée par l'AEB. Comme indiqué dans l'algorithme de la Figure 2, nous avons utilisé l'algorithme de *summarization* de la Section 4.3 pour réduire leurs nombre à 20. La Figure 3 montre les intervalles d'erreur pour x et y estimés pour le GPS, AEB et FFC. On peut remarquer que les deux méthodes AEB et FFC sont consistantes. Notons que l'intervalle d'erreur contient le 0, ce qui signifie que l'intervalle contient le point PPK. Le maximum d'erreur sur le cap pour le FFC est de l'ordre de 4 degrés. On peut donc conclure que le FFC est capable de reconstruire une variable qui n'est pas mesurée directement.

Tableau 1 – Comparaison entre PF, AEB, et FFC

	GPS	FP	AEB	FFC
EQM pour $x(m)$	0.134	0.129	0.121	0.105
EQM pour $y(m)$	0.374	0.217	0.242	0.165

6 Conclusion

Un nouvel algorithme pour l'estimation d'état basé sur la théorie des fonctions de croyance a été présenté. La représentation du modèle d'état sous forme d'un réseau de valuations nous a permis d'explorer l'information disponible sur les différentes variables du système afin de construire une connaissance restreinte

sur la variable d'état à estimer. L'extension et la marginalisation des croyances a été mise en œuvre grâce à des outils relevant du calcul ensembliste pour manipuler les ensembles focaux de type intervalle. Les résultats obtenus sur des données réelles ont prouvé la faisabilité de la méthode et son efficacité comparée à d'autres méthodes existantes. La méthode proposée présente l'avantage d'estimer précisément l'état d'un système tout en fournissant des bornes d'erreur garanties.

Références

- [1] M.S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon and T. Clapp. A tutorial on particle filters for non linear/non-Gaussian Bayesian tracking. *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 50, No. 2, pp. 174-188,2002.
- [2] M. Bauer. Approximation Algorithms and Decision Making in the Dempster-Shafer Theory of Evidence—An Empirical Study. *International Journal of Approximate Reasoning*, Vol. 17, Nb 2, pp. 217-237, August 1997.
- [3] W-S. Chen. Bayesian estimation by sequential Monte Carlo sampling. *Dissertation, The Ohio State University*, 2004.
- [4] T. Denoeux. Inner and outer approximation of belief structures using a hierarchical clustering approach. *Int. Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, Vol. 9, No. 4, 437-460, 2001.
- [5] A. Doucet, S. Godsill and C. Andrieu. On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering. *Statistics and computing*, 10 :197-208, 2000.
- [6] D. Dubois, L. Foulloy, G. Mauris and H. Prade. Probability-Possibility Transformations, Triangular Fuzzy Sets and Probabilistic Inequalities, *Reliable Computing*. Vol. 10, pp. 273-297, 2004.
- [7] A. Gning and Ph. Bonnifait. Guaranteed Dynamic Localization using Constraints Propagation Techniques on Real Intervals. *International Conference on Robotics and Automation*. New Orleans, LA, avril 2004.
- [8] A. Gning and Ph. Bonnifait. Dynamic Vehicle Localization using Constraints Propagation Techniques on Intervals. A comparison with Kalman Filtering. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 05)*. Barcelona, April 2005.
- [9] A. Gning and Ph. Bonnifait. Constraints Propagation Techniques on Intervals for a Guaranteed Localization using Redundant Data. *Automatica*. Vol. 42, Issue 7, pp. 1167-1175, Jul. 2006.
- [10] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit and E. Walter. Applied Interval Analysis. *Springer-Verlag*, 2001.
- [11] Ramon E.Moore. Methods and Applications or Interval Analysis, 1979.

- [12] S. Petit-Renaud and T. Denoeux. Nonparametric regression analysis of uncertain and imprecise data using belief Functions. *International Journal of Approximate Reasoning*, Vol. 35, No. 1, 1-28, 2004
- [13] G. Shafer. A mathematical theory of evidence. *Princeton University Press, Princeton, N.J.*, 1976.
- [14] P. Shenoy and G. Shafer. Axioms for probability and belief-function propagation. *In Readings in uncertain reasoning*, *Morgan Kaufmann*, pages 575–610, 1990.
- [15] Ph. Smets. Belief Functions : the Disjunctive Rule of Combination and the Generalized Bayesian Theorem. *International Journal of Approximate Reasoning*, 9, 1-35, 1993.
- [16] Ph.Smets and R. Kennes. The transferable belief model, *Artificial Intelligence*. Vol. 66, pp. 191-234, 1994.
- [17] Ph. Smets and B. Ristic. Kalman filter and joint tracking and classification based on belief function in the TBM framework, *Proceedings of the 7th international Conference Information Fusion, Stockholm, Sweden*, 2004.
- [18] D. Waltz. Generating semantic descriptions from drawings of scenes with shadows. *The psychology of computer Vision*, New York, NY pp. 19-91, 1975.
- [19] H. Xu. and Ph.Smets. Reasoning in the evidential Networks with conditional Belief Functions, *International Journal of Approximate Reasoning*. Vol. 14, pp. 155-185, 1996.
- [20] L.A.Zadeh. Fuzzy Sets, *Information and control*, Vol. 8, pp. 338-353, 1965.