Structures de Croyance Latente : Règles de Combinaison Conjonctive et Prise de Décision

Latent Belief Structures : Conjunctive Combination Rules and Decision Making

F. Pichon[1,2] F.-X. Josset[1] T. Denœux[2]

[1] Thales Research and Technology

[2] UMR CNRS 6599 Heudiasyc

RD 128, 91767 Palaiseau cedex, frederic.pichon@hds.utc.fr

RD 128, 91767 Palaiseau cedex, francois-xavier.josset@thalesgroup.com

BP 20529 - 60205 Compiègne cedex, thierry.denoeux@hds.utc.fr

Résumé :

En se basant sur la décomposition canonique d'une fonction de croyance, Smets a introduit les structures de croyance latente (SCL). Ce concept est revisité dans cet article. L'étude de la combinaison de SCLs nous permet de proposer une version moins engagée de la règle de Dempster, résultant en une règle de combinaison commutative, associative et idempotente pour les SCLs. Cette dernière propriété rend possible la combinaison d'éléments d'évidence non distincts. Une méthode utilisant la transformation basée sur les plausibilités est également présentée afin de permettre une prise de décision à partir d'une SCL. Enfin, nous proposons une extension de la nouvelle règle pour qu'elle puisse être utilisée afin d'optimiser la combinaison d'informations imparfaites par rapport à la prise de décision.

Mots-clés :

Fonctions de croyance, éléments d'évidence distincts, règle de combinaison.

Abstract:

Based on the canonical decomposition of belief functions, Smets introduced the concept of a latent belief structure (LBS). This concept is revisited in this article. The study of the combination of LBSs allows us to propose a less committed version of Dempster's rule, resulting in a commutative, associative and idempotent rule of combination for LBSs. This latter property makes it suitable to combine non distinct bodies of evidence. A sound method based on the plausibility transformation is also given to infer decisions from LBSs. In addition, an extension of the new rule is proposed so that it may be used to optimize the combination of imperfect information with respect to the decisions inferred.

Keywords:

Belief Functions, distinct items of evidence, combination rule.

1 Introduction

La théorie des fonctions de croyance [15] est connue pour sa capacité à représenter fidèlement les informations imparfaites. Contrairement à la théorie des probabilités, elle permet en particulier de modéliser différents types d'ignorance. Cependant, lorsqu'une décision doit être prise dans un contexte incertain, des principes de rationalité [14] justifient l'utilisation d'une distribution de probabilité. Il existe différentes méthodes pour transformer une fonction de croyance en distribution de probabilité ; en particulier la transformation pignistique [18] et la transformation basée sur les plausibilités [1]. Dans cet article, nous présentons deux résultats relatifs à cette dernière. Nous verrons qu'elle peut être étendue afin de transformer une structure de croyance latente (SCL) [17] en distribution de probabilité et que deux moyens de modéliser des énoncés négatifs deviennent équivalents lorsque cette extension est adoptée.

Munis d'un moyen d'utiliser les SCLs par rapport à la prise de décision, nous approfondissons leur étude. L'analyse de la combinaison de SCLs conduit à des familles de règles de combinaison conjonctives. Une de ces règles est idempotente, propriété requise lors de la combinaison de SCLs obtenues, par exemple, à partir de fonctions de croyance issues d'éléments d'évidence non distincts.

L'organisation de cet article est la suivante. Dans le paragraphe 2, nous rappelons la définition des SCLs. Le paragraphe 3 détaille les règles de combinaisons conjonctives de SCLs. Enfin, le paragraphe 4 décrit la prise de décision à partir d'une SCL.

2 Structures de Croyance Latente

2.1 Concepts de base

La présentation de la théorie des fonctions de croyance adoptée ici reprend celle du niveau crédal du modèle des croyances transférables (MCT) [18]. Les croyances détenues par un agent rationnel Ag sur un cadre de discernement fini $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_K\}$ sont représentées par une fonction de masse (FM) m_{Ag}^{Ω} définie sur l'ensemble des parties de Ω, à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $\sum_{A\subseteq\Omega} m(A) = 1$. Pour $A \subseteq \Omega$, si $m(A) > 0$ alors A est appelé un élément focal (EF) de m. Une FM m peut être qualifiée de : *normale* si $\emptyset$ n'est pas un EF ; *vide* si Ω est le seul EF ; *dogmatique* si Ω n'est pas un EF ; *catégorique* si elle a un seul EF qui n'est pas Ω ; *simple* si elle a au plus deux EFs, Ω inclus. Si m est une FM simple (FMS) définie par $m(A) = 1 - w$ et $m(\Omega) = w$ pour $A \neq \Omega$, on la note A^w ; si $A = \Omega$ on écrit simplement Ω si aucune confusion n'est possible. Notons que la normalité n'est pas requise dans le MCT. Il existe des représentations équivalentes d'une FM m. En particulier les fonctions de croyance, de plausibilité, et de communalité sont définies respectivement par :

$$bel(A) = \sum_{\emptyset\neq B\subseteq A} m(B),$$

$$pl(A) = \sum_{B\cap A\neq\emptyset} m(B),$$

et

$$q(A) = \sum_{B\supseteq A} m(B),$$

pour tout $A \subseteq \Omega$. Deux FMs distinctes m_1 et m_2 peuvent être combinées par la règle de combinaison conjonctive, notée $\text{\textcircled{$\cap$}}$, or par la règle de Dempter [15], notée $\oplus$. Si $m_{1\text{\textcircled{$\cap$}}2}(\emptyset) \neq 1$, ces règles sont définies par :

$$m_{1\text{\textcircled{$\cap$}}2}(A) = \sum_{B\cap C=A} m_1(B)\, m_2(C), \forall A \subseteq \Omega,$$

$$m_{1\oplus 2}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset, \\ \frac{m_{1\text{\textcircled{$\cap$}}2}(A)}{1-m_{1\text{\textcircled{$\cap$}}2}(\emptyset)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La transformation pignistique et la transformation basée sur les plausibilités permettent de tranformer une FM m en distributions de probabilité notées respectivement $BetP$ et PlP. Elles sont définies comme suit :

$$BetP_m(\{\omega_k\}) = \sum_{\{A\subseteq\Omega, \omega_k\in A\}} \frac{m(A)}{(1 - m(\emptyset))\,|A|},$$
$$PlP_m(\{\omega_k\}) = \kappa^{-1} pl(\{\omega_k\}),$$

avec $\kappa = \sum_{j=1}^{K} pl(\{\omega_j\})$.

2.2 Décomposition canonique d'une fonction de croyance

La décomposition canonique d'une fonction de croyance, introduite dans [17], est basée sur une généralisation de la représentation canonique d'une FM *séparable* m définie par Shafer [15]. Une FM est dite séparable si elle peut être écrite comme la combinaison par l'opérateur $\text{\textcircled{$\cap$}}$ de FMSs. Ainsi une FM séparable m peut s'écrire :

$$m = \text{\textcircled{$\cap$}}_{A\subset\Omega} A^{w(A)}, \quad (1)$$

avec $w(A) \in [0, 1]$ pour tout $A \subset \Omega$. A travers la définition d'une FMS *généralisée*, Smets [17] a proposé un moyen pour décomposer canoniquement une FM *non dogmatique* (FMND). Une FMS généralisée est définie par une fonction μ : $2^\Omega \to \mathbb{R}$, telle que :

$$\mu(A) = 1 - w,\ \mu(\Omega) = w,$$
$$\mu(B) = 0\ \forall B \in 2^\Omega \setminus \{A, \Omega\},$$

pour $A \neq \Omega$ et $w \in [0, +\infty)$. En étendant la notation d'une FMS, une FMS généralisée peut s'écrire A^w ; quand $w \leq 1$, μ est donc une FMS. Lorsque $w > 1$, μ est appelée FMS *inverse*. Smets a montré que n'importe quelle FMND peut se représenter de manière unique comme la combinaison par $\textcircled{\cap}$ de FMS généralisées non catégoriques ; l'expression pour cette décomposition est alors la même que (1) avec cette fois $w \in (0, +\infty)$. Les poids $w(A)$ pour chaque $A \in 2^\Omega \setminus \{\Omega\}$ sont obtenus comme suit :

$$w(A) = \prod_{B \supseteq A} q(B)^{(-1)^{|B|-|A|+1}}.$$

La fonction de poids, $w : 2^\Omega \setminus \{\Omega\} \to (0, +\infty)$, est ainsi une autre représentation équivalente d'un FMND m.

Si A^{w_1} et A^{w_2} sont deux FMSs, leur combinaison par la règle $\textcircled{\cap}$ est la FMS $A^{w_1 w_2}$. Par la commutativité et l'associativité de l'opérateur $\textcircled{\cap}$, la combinaison de deux FMNDs m_1 et m_2 ayant pour fonctions de poids w_1 et w_2 s'écrit :

$$m_{1 \textcircled{\cap} 2} = \textcircled{\cap}_{A \subset \Omega} A^{w_1(A) \cdot w_2(A)}. \qquad (2)$$

Des détails sur les versions normalisées de ces résultats peuvent être trouvés dans une présentation récente de la décomposition canonique [2]. D'autres combinaisons de fonctions de croyances ont été proposées. En particulier la règle prudente [2], notée $\textcircled{\wedge}$, possède la propriété d'idempotence. Elle est définie comme suit ($\wedge$ dénote l'opérateur minimum) :

$$m_{1 \textcircled{\wedge} 2} = \textcircled{\cap}_{A \subset \Omega} A^{w_1(A) \wedge w_2(A)}. \qquad (3)$$

2.3 Opérateur de décombinaison

En révision des croyances [7], l'addition de croyances sans en rétracter d'autres est connue sous le terme d'*expansion* ; l'opération inverse, la *contraction*, permet le retrait de croyances. Dans la théorie des fonctions de croyance, ces opérations sont réalisées respectivement par les opérateurs $\textcircled{\cap}$ et $\textcircled{\not\cap}$. Différents auteurs [8, 17, 16, 11] se sont intéressés à l'opérateur $\textcircled{\not\cap}$ qui est appelé *décombinaison* [17] ou *élimination* [16]. Soient q_1 et q_2 les fonctions de communalités de deux FMNDs, la décombinaison est définie par :

$$q_{1 \textcircled{\not\cap} 2}(A) = q_1(A) / q_2(A), \quad \forall A \subseteq \Omega. \qquad (4)$$

La fonction obtenue par cette opération peut ne pas être une fonction de croyance. Dans ce cas on parle de *pseudo* fonction de croyance [17] ou de fonction de croyance *signée* [11].

L'intérêt de cet opérateur est motivé par l'exemple suivant. Supposons que nous soyons dans un état d'ignorance à propos du vrai état ω_0 du monde représenté par un cadre de discernement Ω. Supposons que nous ayons ensuite de bonnes raisons de croire en A, pour $A \subset \Omega$; nous pratiquons une *expansion* de nos croyances (ici notre ignorance) par la FMS A^x (si le poids des *bonnes raisons* s'élève à $1 - x$, pour x petit), ce qui revient à faire $\Omega \textcircled{\cap} A^x$. Plus tard, une autre information arrive nous disant que notre première information n'était pas valide. Cette dernière information peut être traitée de différentes manières et en particulier par contraction de la fonction de croyance A^x issue de la première information.

Smets [17] va plus loin que l'interprétation d'élimination de croyances qui est donnée à l'opérateur $\textcircled{\not\cap}$. Il introduit des états de dette de croyance (aussi appelés *défiance*). Il propose en effet une reformulation de l'exemple précédent dans lequel la deuxième source d'information donnerait de bonnes raisons *de ne pas croire* en A. Il défend que si les poids de ces bonnes raisons de croire A et de ne pas croire A se compensent, nous devrions être dans un état d'ignorance. Ces états de dette de croyance lui sont utiles pour introduire les SCLs que nous rappelons dans le paragraphe suivant.

Observons que l'existence d'information positive et négative est généralement regroupée sous la notion de *bipolarité*. D'autres auteurs ont essayé de modéliser ces informations duales dans la théorie des fonctions de croyance ; nous pouvons citer en particulier les travaux de Dubois et al. [6], et ceux de Labreuche et al. [12]. La question de savoir si la notion de dette de croyance est pertinente reste ouverte. Néanmoins, nous allons voir que la décombinaison est utile au moins mathématiquement et donc mérite qu'on y porte attention.

2.4 Confiance et défiance

Soient A^{w_1} et A^{w_2} deux FMSs non catégoriques, donc $A^{\frac{1}{w_2}}$ est une FMS inverse. La décombinaison de A^{w_1} par A^{w_2}, c.-à-d. $A^{w_1} \oslash A^{w_2}$, est égale à la combinaison par $\bigcirc\!\!\!\!\cap$ de A^{w_1} avec A^{1/w_2} [17]. Soit w la fonction de poids associée à une FMND m. Créons une partition de 2^Ω en deux sous-ensembles (disjoints) : $C = \{A : A \subset \Omega, w(A) \in (0,1]\}$, $D = \{A : A \subset \Omega, w(A) \in (1,\infty)\}$. Une FMND m peut alors s'écrire :

$$m = \left(\textcircled{\cap}_{A\in C} A^{w(A)}\right) \oslash \left(\textcircled{\cap}_{A\in D} A^{1/w(A)}\right) \quad (5)$$

Toute FMND est donc le résultat de combinaisons et décombinaisons de FMSs non catégoriques ou, de manière équivalente, toute FMND est égale à la décombinaison d'une FM séparable par une FM séparable. Smets a appelé la FMND séparable, notée m^c et obtenue de l'ensemble C, le composant de *confiance* et la FMND séparable, notée m^d et obtenue de l'ensemble D, le composant de *défiance*. Nous pouvons donc écrire : $m = m^c \oslash m^d$. Les fonctions de poids de m^c et m^d, définies de $2^\Omega \setminus \{\Omega\}$ dans $(0,1]$ et appelées les fonctions de poids de confiance et défiance, sont notées w^c et w^d. Elles peuvent être facilement trouvées à partir de la fonction de poids w d'une FMND m comme suit : $w^c(A) = 1 \wedge w(A)$, et $w^d(A) = 1 \wedge \frac{1}{w(A)}$, pour tout $A \subset \Omega$.

En se basant sur la décomposition canonique, Smets a défini une SCL comme une paire de FMs $\left(m^c, m^d\right)$ servant à représenter des états de croyance dans lesquels interviennent des éléments d'évidence positifs et négatifs (des raisons *de croire et de ne pas croire* [17]). La Définition 1 ci-dessous est plus spécifique car elle impose que cette paire soit faite de FMNDs séparables. Elle est suivie par la Définition 2 qui définit un concept introduit également par Smets [17].

Définition 1 ***(Structure de Croyance Latente)*** *Une structure de croyance latente, notée L, est définie comme une paire de FMNDs séparables m^c et m^d appelées respectivement les composants de confiance et défiance.*

Définition 2 ***(Structure de Croyance Apparente)*** *La structure de croyance apparente associée à une SCL $L = (m^c, m^d)$ est la fonction de croyance signée obtenue à partir de la décombination $m^c \oslash m^d$ des composants de confiance et de défiance de L.*

La justification de la Définition 1 est due à l'observation suivante : si m^c et m^d sont deux FMNDs, alors nous pouvons toujours trouver deux FMNDs séparables m'^c et m'^d telles que $m^c \oslash m^d = m'^c \oslash m'^d$, donc une SCL peut être simplement définie comme une paire de FMNDs séparables. Une SCL est ainsi une généralisation d'une FMND.

Les propriétés liant ces définitions sont les suivantes. Par définition, la structure de croyance apparente associée à une SCL peut être une fonction de croyance. De plus, une infinité de SCLs correspond à la même structure de croyance apparente. Parmi l'infinité de SCLs correspondant à la même structure de croyance apparente, une SCL a une structure particulière : elle est alors appelée une SCL *canonique* (SCLC).

Définition 3 ***(SCL Canonique)*** *Une SCLC est une SCL qui vérifie : $\forall A \subset \Omega$, $w^c(A) \vee w^d(A) = 1$ où $\vee$ dénote l'opérateur maximum.*

Par exemple, les SCLs $(A^{0.2}, A^{0.3})$ et $(A^{0.6}, A^{0.9})$ correspondent à la même FMND $A^{2/3}$ et la SCL canonique de cette FMND est $\left(A^{2/3}, \Omega\right)$. Il est clair que la décomposition canonique d'une FMND m donne la SCL canonique de m. Notons que la SCL associée à la FM vide sera notée L_Ω.

3 Combinaisons de SCLs

Soient $\left(m_1^c, m_1^d\right)$ et $\left(m_2^c, m_2^d\right)$ les SCLCs associées à deux FMNDs m_1 et m_2. Alors $\left(m_1^c \circledcap m_2^c, m_1^d \circledcap m_2^d\right)$ est une SCL associée à $m_1 \circledcap m_2$. Ceci amène Smets à définir la combinaison conjonctive de deux SCLs comme suit :

Définition 4 *La combinaison conjonctive de deux SCLs L_1 et L_2 est une SCL notée $L_{1 \circledcap 2}$. Elle est définie par les fonctions de poids (6) et (7) :*

$$w_{1 \circledcap 2}^c(A) = w_1^c(A) \cdot w_2^c(A), \qquad (6)$$
$$w_{1 \circledcap 2}^d(A) = w_1^d(A) \cdot w_2^d(A). \qquad (7)$$

L_Ω est un élément neutre pour $\circledcap$: $L \circledcap L_\Omega = L$ pour toute SCL L. La définition suivante exprime la règle prudente en termes de SCLs.

Définition 5 *([3, Proposition 6]) La combinaison prudente de deux SCLs L_1 et L_2 est une SCL notée $L_{1 \owedge 2}$. Elle est définie par les fonctions de poids suivantes :*

$$w_{1 \owedge 2}^c(A) = w_1^c(A) \wedge w_2^c(A), \qquad (8)$$
$$w_{1 \owedge 2}^d(A) = w_1^d(A) \vee w_2^d(A). \qquad (9)$$

Il est clair que ces deux règles appartiennent à des familles différentes de règles de combinaison : la règle $\circledcap$ est purement conjonctive tandis que la règle $\owedge$ est à la fois conjonctive et disjonctive [3]. Ce paragraphe est consacré à l'étude d'autres règles purement conjonctives. Une de ces règles est intéressante car elle est idempotente ; la motivation pour sa définition repose sur le *principe d'engagement minimal.*

3.1 Principe d'engagement minimal (PEM)

Le PEM du MCT, similaire à celui du maximum d'entropie en théorie des probabilités bayésiennes, postule que, étant donné un ensemble $\mathcal{M}$ de FMs compatibles avec un ensemble de contraintes, la FM la plus appropriée est la moins informative. Ce principe devient opérationnel en définissant des ordres partiels permettant la comparaison du contenu informationnel de FMs. De tels ordres, généralisant l'inclusion d'ensembles, ont été définis [4] :

- ordre $\sqsubseteq_{pl}$: pour tout $A \subseteq \Omega$, ssi $pl_1(A) \leq pl_2(A)$ alors $m_1 \sqsubseteq_{pl} m_2$;
- ordre $\sqsubseteq_q$: pour tout $A \subseteq \Omega$, ssi $q_1(A) \leq q_2(A)$ alors $m_1 \sqsubseteq_q m_2$;
- ordre $\sqsubseteq_s$: $m_1 \sqsubseteq_s m_2$, c.-à-d. m_1 est une *spécialisation* de m_2, ssi il existe une matrice carrée S ayant pour terme général $S(A,B)$, $A, B \subseteq \Omega$ tel que $\sum_{B \subseteq \Omega} S(A,B) = 1$, $\forall A \subseteq \Omega$, et $S(A,B) > 0 \Rightarrow A \subseteq B$, $\forall A, B \subseteq \Omega$, et $m_1(A) = \sum_{B \subseteq \Omega} S(A,B)\, m_2(A), \forall A \subseteq \Omega$.

Une FM m_1 est dite *x-plus engagée* que m_2, avec $x \in \{pl, q, s\}$, si $m_1 \sqsubseteq_x m_2$. Un cas particulier de la spécialisation est la spécialisation dempstérienne [9], notée $\sqsubseteq_d$: $m_1 \sqsubseteq_d m_2$, ssi il existe une FM m telle que $m_1 = m \circledcap m_2$. Cette condition est plus forte que la spécialisation, en d'autres termes $m_1 \sqsubseteq_d m_2 \Rightarrow m_1 \sqsubseteq_s m_2$.

Il est raisonnable de dire qu'une FMS A^{w_1} est plus engagée qu'une FMS A^{w_2}, si $w_1 \leq w_2$. Nous pouvons ainsi dire qu'une FM m_1 résultant de la combinaison par $\circledcap$ de FMSs, c.-à-d. une FM séparable, sera plus engagée qu'une autre FM séparable m_2 si $w_1(A) \leq w_2(A)$ pour tout $A \in 2^\Omega \setminus \{\Omega\}$; cela revient à dire qu'il existe une FM séparable m telle que $m_1 = m \circledcap m_2$. Ce nouvel ordre partiel, défini pour des FMs séparables et noté $m_1 \sqsubseteq_w m_2$ avec m_1 et m_2 deux FMs séparables, est donc strictement plus fort que l'ordre $\sqsubseteq_d$. Remarquons aussi que, comme cela a été montré pour les ordres $\sqsubseteq_x$ [4], pour $x \in \{pl, q, s\}$, Denoeux [3, Proposition 3] a montré que $\sqsubseteq_w$ peut être vu comme généralisant l'inclusion d'ensembles.

Tous ces ordres partiels peuvent être étendus aux SCLs. En particulier, la SCL $L_{1 \circledcap 2} = (m_{1 \circledcap 2}^c, m_{1 \circledcap 2}^d)$ résultant de la combinaison par $\circledcap$ de deux SCLs $L_1 = (m_1^c, m_1^d)$ et $L_2 = (m_2^c, m_2^d)$ a les propriétés suivantes : $m_{1 \circledcap 2}^c \sqsubseteq_w m_1^c$, $m_{1 \circledcap 2}^c \sqsubseteq_w m_2^c$ et $m_{1 \circledcap 2}^d \sqsubseteq_w m_1^d$, $m_{1 \circledcap 2}^d \sqsubseteq_w$

m_2^d. Une SCL L_1 qui est à la fois w-plus engagée en confiance et en défiance, c.-à-d. w^c et w^d plus engagée, qu'une SCL L_2 sera dite l-plus engagée que L_2 ("l" pour *"latente"*). De manière informelle, l'ordre $\sqsubseteq_l$ semble naturel car il exhibe des propriétés similaires aux ordres classiques. Pour voir cela, il suffit de remplacer l par $x \in \{d, s, q, pl\}$ et L par m dans les expressions suivantes : $\forall L, L \sqsubseteq_l L_\Omega$ et $L_{1 \circledcap 2} \sqsubseteq_l L_1$, $L_{1 \circledcap 2} \sqsubseteq_l L_2$.

3.2 Combinaison de SCLs non distinctes

Il est possible de voir les règles de combinaison conjonctives comme généralisant l'intersection d'ensembles. Denœux [2] considère ainsi la situation suivante. Supposons que nous ayons deux sources d'informations fiables. La première déclare que ω est dans $A \subseteq \Omega$, tandis que l'autre indique qu'il est dans $B \subseteq \Omega$. Nous pouvons ainsi être sûr que ω est dans C tel que $C \subseteq A$ et $C \subseteq B$. Le plus grand ensemble C satisfaisant ces deux contraintes est $A \cap B$.

Supposons maintenant que les deux sources fournissent les FMNDs m_1 et m_2. Soient L_1 et L_2 les SCLCs équivalentes de ces FMNDs. Après avoir reçu ces deux éléments d'information, l'état de croyance de l'agent devrait être représenté par une SCL L_{12}, c.-à-d. (m_{12}^c, m_{12}^d), plus informative que L_1 et L_2. Soit $\mathcal{S}_x(L)$ l'ensemble des SCLs L' telles que $L' \sqsubseteq_x L$. Nous avons donc $L_{12} \in \mathcal{S}_x(L_1)$ et $L_{12} \in \mathcal{S}_x(L_2)$, ou encore $L_{12} \in \mathcal{S}_x(L_1) \cap \mathcal{S}_x(L_2)$. Selon le PEM, nous devrions choisir la SCL la x-moins engagée dans $\mathcal{S}_x(L_1) \cap \mathcal{S}_x(L_2)$. Ceci définit une règle de combinaison conjonctive si la SCL la x-moins engagée existe et est unique. La proposition suivante montre que l'ordre $\sqsubseteq_l$ peut être une solution intéressante pour ce problème.

Proposition 1 *Soient L_1 et L_2 deux SCLs. L'élément le moins engagé au sens de $\sqsubseteq_l$ dans $\mathcal{S}_l(L_1) \cap \mathcal{S}_l(L_2)$ existe et est unique. Il est défini par les fonctions de poids de confiance et défiance suivantes, pour tout $A \in 2^\Omega \setminus \{\Omega\}$:*

$$w_{1 \circledwedge 2}^c(A) = w_1^c(A) \wedge w_2^c(A), \qquad (10)$$

$$w_{1 \circledwedge 2}^d(A) = w_1^d(A) \wedge w_2^d(A). \qquad (11)$$

Preuve : *trivial par la Proposition 1 de [2].*□

Définition 6 ***(Règle Faible)*** *Soient L_1 et L_2 deux SCLs. Leur combinaison avec la règle faible est définie comme la SCL dont les fonctions de poids sont données par (10) et (11). Elle est notée $L_{1 \circledwedge 2}$.*

Cette règle est commutative, associative, et idempotente. De plus $\circledcap$ est distributive par rapport à $\circledwedge$. Les propriétés de cette règle résultent des propriétés de la règle prudente [2] car il existe un lien entre les ordres partiels avec lesquels ces deux règles sont construites. Nous pouvons ainsi voir que la combinaison par $\circledwedge$ consiste à combiner les composants de confiance et défiance par la règle prudente.

La règle $\circledwedge$ possède d'autres propriétés : L_Ω est un élément neutre et si $L_1 \sqsubseteq_l L_2$, alors $L_1 \circledwedge L_2 = L_1$. Remarquons aussi que la sélection de l'ordre $\sqsubseteq_l$ dans la dérivation de cette règle permet de créer une version plus « faible », ou l-moins engagée, de la règle de Dempster : $L_{1 \circledcap 2} \sqsubseteq_l L_{1 \circledwedge 2}$.

Notons que la forme apparente d'une SCL $L_{1 \circledwedge 2}$, produite par la combinaison par $\circledwedge$ de deux SCLCs L_1 et L_2 obtenue de deux FMNDs m_1 et m_2, peut ne pas être une FM. Cependant, si m_1 et m_2 sont des FM séparables, alors nous pouvons montrer que la forme apparente de $L_{1 \circledwedge 2}$ est une FM. Notons enfin que la combinaison par $\owedge$ de deux FMs consonantes ne donne pas nécessairement une FM consonante. Ainsi, comme une FM consonante est séparable [3, Proposition 2], la combinaison par la règle $\circledwedge$ de deux SCLCs obtenus de deux FMs consonantes donne une SCL dont la forme apparente est une FM séparable qui n'est pas nécessairement consonante.

3.3 Extension basée sur les t-normes

De manière similaire à Denoeux [2], il est possible de dériver des familles de règles de combinaison conjonctive de SCLs. Les règles $\textcircled{\cap}$ et $\textcircled{\wedge}$ sont alors de simples instances de ces familles. Cette extension se base sur l'observation que la règle $\textcircled{\cap}$ est basée sur le produit de poids, tandis que $\textcircled{\wedge}$ utilise le minimum. Or, dans l'intervalle $[0, 1]$, le produit et le minimum sont deux t-normes. En les remplaçant par une t-norme positive $\top$, nous obtenons des opérateurs $\textcircled{\top}$ possédant les propriétés suivantes : commutativité, associativité, élément neutre L_Ω et monotonie par rapport à $\sqsubseteq_l$, c.-à-d. $\forall L_1, L_2$ et L_3, $L_1 \sqsubseteq_l L_2 \Rightarrow L_1 \textcircled{\top} L_3 \sqsubseteq_l L_2 \textcircled{\top} L_3$. La seule règle qui est idempotente est $\textcircled{\wedge}$. Soient L_1 et L_2 deux SCLs, le minimum étant la plus large des t-normes nous avons : $L_1 \textcircled{\top} L_2 \sqsubseteq_l L_1 \textcircled{\wedge} L_2$. Des opérateurs montrant un comportement entre $\textcircled{\cap}$ et $\textcircled{\wedge}$ peuvent être obtenus en utilisant des familles paramétrées de t-normes, par exemple la famille de Frank [10] qui dépend d'un paramètre. Ce paramètre peut être appris grâce à des données comme fait dans [13] en utilisant la transformation de plausibilité étendue aux SCLs (voir paragraphe 4) : la combinaison conjonctive de deux SCLs est ainsi optimisée par rapport à la prise de décision. Tel est l'intérêt des opérateurs $\textcircled{\top}$: ils permettent de régler finement le comportement d'un système.

4 Prise de décision et SCL

Nous présentons dans ce paragraphe un moyen de transformer une SCL en une distribution de probabilité. La transformation basée sur les plausibilités est particulièrement intéressante pour les SCLs grâce à l'une de ses propriétés : elle est invariante par rapport à la combinaison par l'opérateur $\textcircled{\cap}$ [19], ce qui n'est pas le cas de la transformation pignistique. La proposition 2 reformule cette propriété pour l'opérateur $\textcircled{\not\cap}$ en utilisant l'opérateur de décombinaison en théorie des probabilités, noté $\oslash$ et défini dans [16] comme suit. Soient P_1 et P_2 deux distributions de probabilités, $\forall \omega_k \in \Omega$:

$$P_1 \oslash P_2 \left(\{\omega_k\}\right) = \kappa^{-1} P_1 \left(\{\omega_k\}\right) / P_2 \left(\{\omega_k\}\right),$$

avec $\kappa = \sum_{j=1}^{K} P_1 \left(\{\omega_j\}\right) / P_2 \left(\{\omega_j\}\right)$.

Proposition 2 *(Invariance de PlP) Soient m_1 et m_2 deux FMNDs :*

$$PlP_{m_1 \textcircled{\not\cap} m_2} = PlP_{m_1} \oslash PlP_{m_2} \quad .$$

Preuve : *Pour tout $\omega_k \in \Omega$, notons $\alpha_k = pl_1\left(\{\omega_k\}\right) = q_1\left(\{\omega_k\}\right)$, $\beta_k = pl_2\left(\{\omega_k\}\right)$. L'équation (4) nous donne :*

$$PlP_{m_1 \textcircled{\not\cap} m_2}\left(\{\omega_k\}\right) = \frac{\frac{\alpha_k}{\beta_k}}{\sum_{i=1}^{K} \frac{\alpha_i}{\beta_i}} \quad . \tag{12}$$

De plus, $PlP_{m_1} \oslash PlP_{m_2}\left(\{\omega_k\}\right) =$

$$\frac{\left(\left(\frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^{K}\alpha_i}\right) / \left(\frac{\beta_k}{\sum_{i=1}^{K}\beta_i}\right)\right)}{\left(\sum_{j=1}^{K} \frac{\left(\frac{\alpha_j}{\sum_{i=1}^{K}\alpha_i}\right)}{\left(\frac{\beta_j}{\sum_{i=1}^{K}\beta_i}\right)}\right)} \quad . \tag{13}$$

On a bien l'égalité entre (12) et (13). □

La proposition 2 permet de transformer une SCL $L = \left(m^c, m^d\right)$ en distribution de probabilité comme suit : $PlP_L = PlP_{m^c} \oslash PlP_{m^d}$. Soit $\stackrel{PlP}{\sim}$ la relation d'équivalence entre LBSs définie par $L_1 \stackrel{PlP}{\sim} L_2$ ssi $PlP_{L_1}\left(\{\omega_k\}\right) = PlP_{L_2}\left(\{\omega_k\}\right)$, pour tout $\omega_k \in \Omega$.

Proposition 3 $\bar{A}^\alpha \stackrel{PlP}{\sim} A^{\frac{1}{\alpha}}$*, pour $\alpha \in (0, 1]$.*
Preuve : $\forall \omega_k \in A, A \subset \Omega$*,*

$$PlP_{\bar{A}^\alpha}\left(\{\omega_k\}\right) = \frac{\alpha}{|\bar{A}| + |A|\,\alpha} \quad , \tag{14}$$

$$PlP_{A^{1/\alpha}}\left(\{\omega_k\}\right) = \frac{1}{|A| + |\bar{A}|\,\frac{1}{\alpha}} \quad . \tag{15}$$

On a bien l'égalité entre (14) et (15).□

La proposition 3 montre que deux moyens de modéliser des énoncés à caractère négatif deviennent équivalents lorsque PlP est adoptée.

En effet, selon le vocabulaire de Smets [17], pour $A \subset \Omega$, *avoir de bonnes raisons de croire en non A ($\bar{A}$)* est équivalent à *avoir de bonnes raisons de ne pas croire en A* (ou *avoir une dette de croyance envers A*). Ceci peut également se formuler avec la terminologie utilisée en révision des croyances : l'expansion par $\bar{A}^{\alpha}$ est équivalente à la contraction par A^{α}, pour $\alpha \in (0, 1]$.

Les propositions 2 et 3 définissent des classes d'équivalence au regard de la transformation de plausibilité dans lesquelles il existe au moins une FM séparable ; par exemple, nous avons : $\left(\bar{A}^{0.6}, A^{0.5}\right) \overset{PlP}{\sim} \left(\bar{A}^{0.3}, \Omega\right)$. Notons aussi que la combinaison par $\textcircled{\cap}$ de deux SCLs appartenant à deux classes d'équivalence différentes retombe toujours dans la même classe d'équivalence, par exemple si $L_1 \overset{PlP}{\sim} L_2$ et $L_3 \overset{PlP}{\sim} L_4$, alors $L_1 \textcircled{\cap} L_3 \overset{PlP}{\sim} L_2 \textcircled{\cap} L_4$. Ceci n'est pas le cas pour les règles $\textcircled{\wedge}$ et $\textcircled{\wedge\!\!\wedge}$.

5 Conclusion

Dans cet article, les structures de croyance latente ont été revisitées. La simplicité mathématique de cette généralisation des fonctions de croyance non dogmatiques a permis d'analyser le comportement de la version non normalisée de la règle de Dempster et ainsi d'introduire des familles de règles de combinaison conjonctives. Deux utilisations potentielles de ces règles ont été proposées. Elles peuvent être utilisées afin de relâcher la condition d'indépendance inhérente à l'utilisation de la règle de Dempster, et également afin d'optimiser la combinaison d'informations imparfaites relativement aux décisions inférées. Une extension de la transformation basée sur les plausibilités a été fournie pour transformer une SCL en une distribution de probabilité. De plus il a été montré que deux moyens de modéliser des énoncés négatifs deviennent équivalents lorsque cette extension est utilisée. L'intérêt de ce formalisme pour des applications concrètes est à l'étude.

Références

[1] B. R. Cobb, P. P. Shenoy. On the plausibility transformation method for translating belief function models to probability models. *Int. J. of Approximate Reasoning*, 41 :314–330, April 2006.

[2] T. Denœux. The cautious rule of combination for belief functions and some extensions. *Proceedings of FUSION 2006*, pages 1–8, 2006.

[3] T. Denœux. Conjunctive and Disjunctive Combination of Belief Functions Induced by Non Distinct Bodies of Evidence. *Artificial Intelligence*, doi :10.1016/j.artint.2007.05.008, 2007.

[4] D. Dubois, H. Prade. A set-theoretic view of belief functions : logical operations and approximations by fuzzy sets. *Int. J. of General Systems*, 12 :193–226, 1986.

[5] D. Dubois, H. Prade, Ph. Smets. New semantics for quantitative possibility theory. *Proceedings of ISIPTA 2001*, Ithaca, NY, 2001.

[6] D. Dubois, H. Prade, Ph. Smets. "Not Impossible" vs. "Guaranteed Possible" in Fusion and Revision. *Proceedings of ECSQARU 2001*, pages 522–531, London, UK, 2001. Springer-Verlag.

[7] P. Gärdenfors. *Knowledge in Flux : Modeling the Dynamics of Epistemic States*. MIT Press, Cambridge, Mass, 1988.

[8] M. L. Ginsberg. Non-Monotonic Reasoning Using Dempster's Rule. *Proceedings of AAAI 1984*, pages 126–129, 1984.

[9] F. Klawonn, Ph. Smets. The dynamic of belief in the transferable belief model and specialization-generalization matrices. *Proceedings of UAI 1992*, pages 130–137. Morgan Kaufmann, 1992.

[10] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. Triangular norms. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[11] I. Kramosil. *Probabilistic Analysis of Belief Functions*. Kluwer Acad. Pub., 2001.

[12] Ch. Labreuche, M. Grabisch. Modeling positive and negative pieces of evidence in uncertainty. *Proceedings of ECSQARU 2003*, pages 279–290.

[13] D. Mercier, B. Quost, T. Denoeux. Refined modeling of sensor reliability in the belief function framework using contextual discounting. *Information Fusion*, , à paraître, 2007.

[14] L. J. Savage. Foundation of statistics, Wiley, New York, (1954).

[15] G. Shafer. *A mathematical theory of evidence.* Princeton University Press, 1976.

[16] P. P. Shenoy. Conditional independence in valuation-based systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, 10 :203–234, 1994.

[17] Ph. Smets. The canonical decomposition of a weighted belief. *Proceedings of IJCAI 1995*, pages 1896–1901, San Mateo, 1995. Morgan Kaufman.

[18] Ph. Smets. The Transferable Belief Model for quantified belief representation. In D. M. Gabbay, Ph. Smets, eds, *Handbook of Defeasible reasoning and uncertainty management systems*, 1 :264–301. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[19] F. Voorbraak. A computationally efficient approximation of Dempster-Shafer theory. *Int. Journal of Man-Machine Studies*, 30 :525–536, 1989.