Théorie des fonctions de croyance et apprentissage automatique

Thierry Denœux

Université de technologie de Compiègne
Heudiasyc (UMR CNRS 7253)
et
Institut universitaire de France

https://www.hds.utc.fr/~tdenoeux

GdR ISIS, Journée « Apprentissage automatique multimodal et fusion d'informations »(2ième édition)
19 janvier 2022

Motivation

- Ces dernières années, l'apprentissage automatique a connu des développements importants, avec notamment la montée en puissance des réseaux de neurones profonds.
- Ces derniers offrent des mécanismes très efficaces pour extraire des caractéristiques non-linéaires à partir de masses de données complexes (images, vidéos, textes, etc.).
- Ces caractéristiques sont utilisées pour faire des prédictions, généralement par régression logistique (couche de sortie softmax) ou par régression linéaire (couche de sortie linéaire).
- Un des problèmes d'actualité en apprentissage est celui de la quantification des incertitudes de prédiction.

Importance de la quantification des incertitudes

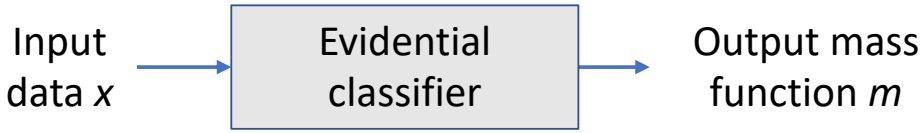
- Sources d'incertitude :
  - Variabilité statistique (incertitude aléatoire)
  - Méconnaissance de la distribution des données (incertitude épistémique)
  - Exemples de test issus d'une autre distribution
- La quantification des incertitudes est importante pour :
  - Permettre l'application de règles de décision prudentes (rejet, affectation à plusieurs classes, etc.)
  - Dans le cas d'un système interactif d'aide à la décision, rendre la main à l'utilisateur lorsque l'incertitude est trop grande (aide à la conduite automobile, aide au diagnostic médical, etc.)
  - Permettre la fusion d'informations (apprentissage multi-modal, systèmes multi-capteurs, etc.)

Approches de la quantification des incertitudes

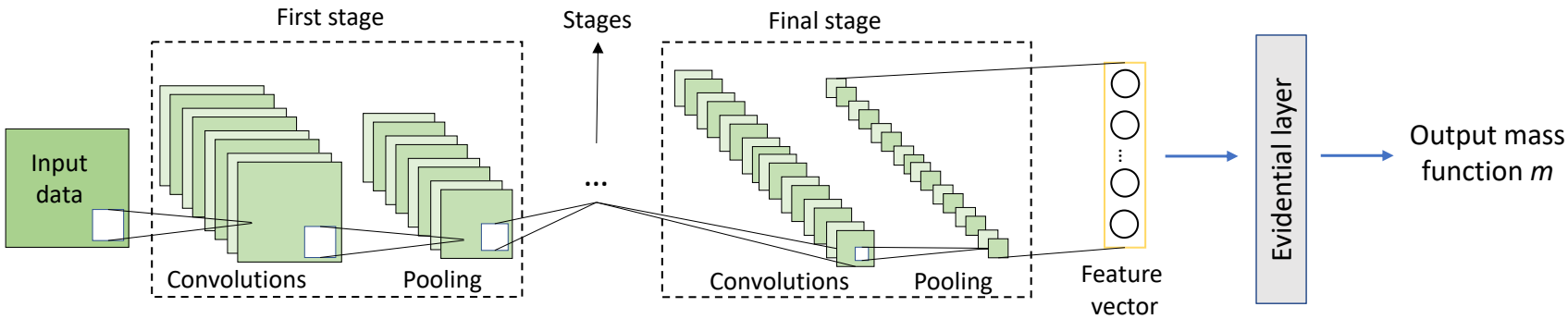
- Deux problèmes :
  1. Choix d'un cadre théorique de représentation des incertitudes
  2. Définition de méthodes pratiques et rationnelles pour la description des incertitudes de prédiction dans le formalisme choisi.
- Principaux cadres théoriques :
  - Bayésien (probabilités)
  - Fréquentiste (régions de confiance)
  - Probabilités imprécises (probabilités inférieures/supérieures, etc.)
  - Théorie des possibilités
  - Dempster-Shafer (fonctions de croyance)
- La théorie de DS est plus générale que la théorie bayésienne (qui en est un cas particulier). Elle est donc potentiellement plus riche et peut permettre de distinguer différentes sources d'incertitude.
- La théorie de DS est particulièrement bien adaptée à la fusion d'information (qui joue un rôle central dans ce formalisme).

Classifieur évidentiel

De la notion de classifieur évidentiel [1]...



... à celle de couche évidentielle [2] :



1. T. Denœux. A neural network classifier based on Dempster-Shafer theory. *IEEE transactions on Systems, Man and Cybernetics A* 30(2) :131-150, 2000.

2. Z. Tong, Ph. Xu and T. Denœux. An evidential classifier based on Dempster-Shafer theory and deep learning. *Neurocomputing* 450 :275-293, 2021.

Plan

1. Théorie des fonctions de croyance
   - Représentation de l'information
   - Combinaison de l'information
   - Décision
2. Classifieurs évidentiels
   - Approche basée sur des prototypes
   - Approche basée sur les poids d'évidence
3. Application à la fusion de classifieurs

Plan

Théorie des fonctions de croyance

- Aussi appelée théorie de Dempster-Shafer, d'après les travaux fondateurs d'Arthur Dempster [3] et de Glenn Shafer [4]
- Un modèle de l'incertain basé sur deux idées principales :
  1. La représentation d'éléments d'évidence élémentaires par des fonctions de croyance
  2. Leur combinaison par un opérateur appelé règle de Dempster
- Le modèle généralise les approches logique/ensembliste et probabiliste.

3. A. P. Dempster. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics* 38 :325–339, 1967.
4. G. Shafer. *A mathematical theory of evidence*. Princeton University Press, 1976.

Plan

Fonction de masse

Définition

Définition

Une fonction de masse sur un ensemble fini Ω (appelé cadre de discernement) est une application $m : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$ vérifiant

$$\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1$$

et $m(\emptyset) = 0$. Tout sous-ensemble A de Ω tel que $m(A) > 0$ est appelé ensemble focal.

Interprétation :

- Ω est le domaine d'une variable inconnue Y
- m modélise un élément d'évidence (une information) sur Y
- $m(A)$ est la probabilité que l'élément d'évidence nous permette d'affirmer que $Y \in A$, et rien de plus.

Fonctions de masse particulières

- Si m a un seul élément focal A, on dit que c'est une fonction de masse catégorique et on la note m_A.
- En particulier, la fonction de masse vide a pour seul élément focal Ω, on la note $m_?$. La fonction de masse vide représente l'absence totale d'information (ignorance totale).
- Une fonction de masse dont tous les ensembles focaux sont des singletons est dite Bayésienne. Elle correspond à une distribution de probabilité.

Affaiblissement

- Soit m une fonction de masse sur Ω et $\alpha \in [0, 1]$.
- On appelle affaiblissement l'opération qui associe à m la fonction de masse

$$^{\alpha}m = (1 - \alpha)m + \alpha m_?$$

  En particulier, $^{0}m = m$ et $^{1}m = m_?$. Le coefficient α est appelé coefficient d'affaiblissement.
- Interprétation : $^{\alpha}m$ représente l'information apportée par une source S qui fournit une fonction de masse m, supposée fiable avec une probabilité $1 - \alpha$.

Fonctions de croyance et de plausibilité

Définition

À une fonction de masse m sur Ω sont associées des fonctions de croyance et de plausibilité définies par

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) = 1 - Bel(\overline{A}),$$

pour tout $A \subseteq \Omega$

- Interprétation :
  - $Bel(A)$ est la probabilité qu'on puisse déduire que $Y \in A$
  - $Pl(A)$ est la probabilité que l'on ne puisse pas déduire que $Y \notin A$
- Cas de l'ignorance totale : $Bel(A) = 0$ pour tout $A \neq \Omega$ et $Pl(A) = 1$ pour tout $A \neq \emptyset$.

Caractérisation des fonctions de croyance

Théorème

Une application $Bel : 2^\Omega \to [0,1]$ *est une fonction de croyance pour une certaine fonction de masse* m *ssi elle vérifie* $Bel(\emptyset) = 0$, $Bel(\Omega) = 1$ *et elle est complètement monotone : pour tout* $k \geq 2$ *et toute famille* $A_1, \ldots, A_k$ *in* 2^Ω,

$$Bel\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \geq \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|I|+1} Bel\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \quad (1)$$

La fonction de masse m *est alors obtenue par*

$$m(A) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} (-1)^{|A|-|B|} Bel(B)$$

Plan

Règle de Dempster

Définition (Règle de Dempster)

Soient deux fonctions de masse m_1 et m_2 définies sur le même ensemble Ω. leur somme orthogonale est la fonction de masse définie par

$$(m_1 \oplus m_2)(A) := \frac{1}{1-\kappa} \sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C), \quad \forall A \neq \emptyset$$

et $(m_1 \oplus m_2)(\emptyset) = 0$, où κ est le degré of conflit défini par

$$\kappa := \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) m_2(C).$$

Interprétation : $\oplus$ est l'opérateur permettant de combiner des éléments d'évidence indépendants.

Propriétés de la règle de Dempster

- Commutativité : $\forall m_1, m_2,\ m_1 \oplus m_2 = m_2 \oplus m_1$
- Associativité : $\forall m_1, m_2, m_3,\ (m_1 \oplus m_2) \oplus m_3 = m_1 \oplus (m_2 \oplus m_3)$
- Élément neutre : $\forall m,\ m \oplus m_? = m_? \oplus m = m$
- Généralisation de l'intersection : pour toutes fonctions de masses catégoriques m_A et m_B telles que $A \cap B \neq \emptyset$, $m_A \oplus m_B = m_{A \cap B}$
- Généralisation du conditionnement bayésien : si m est une fonction de masse bayésienne de fonction de croyance (additive) P et m_A est une fonction de masse catégorique d'ensemble focal A, alors $m \oplus m_A$ est une fonction de masse bayésienne, et la fonction de croyance (additive) associée est $P(\cdot \mid A)$

Poids d'évidence

La règle de Dempster peut être calculée en additionnant des poids d'évidence.

Définition (Poids d'évidence)

Soit m une fonction de masse simple d'ensembles focaux A et Ω :

$$m(A) = s$$
$$m(\Omega) = 1 - s.$$

La quantité $w = -\ln(1-s)$ est appelée poids d'évidence pour A. La fonction de masse m est notée A^w.

Proposition

Étant données deux fonctions de masse simples A^{w_1} et A^{w_2} de même ensemble focal $A \subset \Omega$, leur somme orthogonale s'écrit

$$A^{w_1} \oplus A^{w_2} = A^{w_1+w_2}$$

Fonctions de masse séparables

Définition (Fonction de masse séparable)

Une fonction de masse m est dite séparable si elle est la somme orthogonale de fonctions de masse simples. Elle peut alors s'écrire

$$m = \bigoplus_{\emptyset \neq A \subset \Omega} A^{w(A)},$$

où $w(A) \in [0, +\infty)$ est le poids d'évidence pour A.

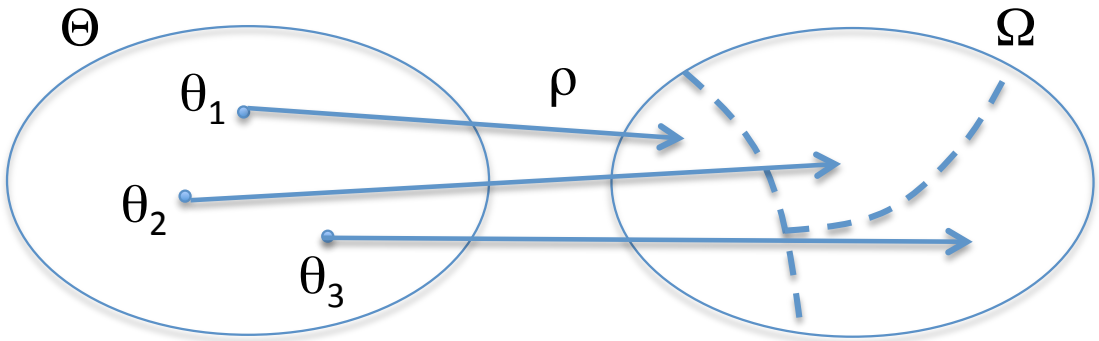
Proposition

Pour combiner des fonctions de masse séparables, il suffit d'ajouter leurs poids :

$$\left(\bigoplus_{\emptyset \neq A \subset \Omega} A^{w_1(A)} \right) \oplus \left(\bigoplus_{\emptyset \neq A \subset \Omega} A^{w_2(A)} \right) = \bigoplus_{\emptyset \neq A \subset \Omega} A^{w_1(A)+w_2(A)}$$

Combinaison d'informations hétérogènes

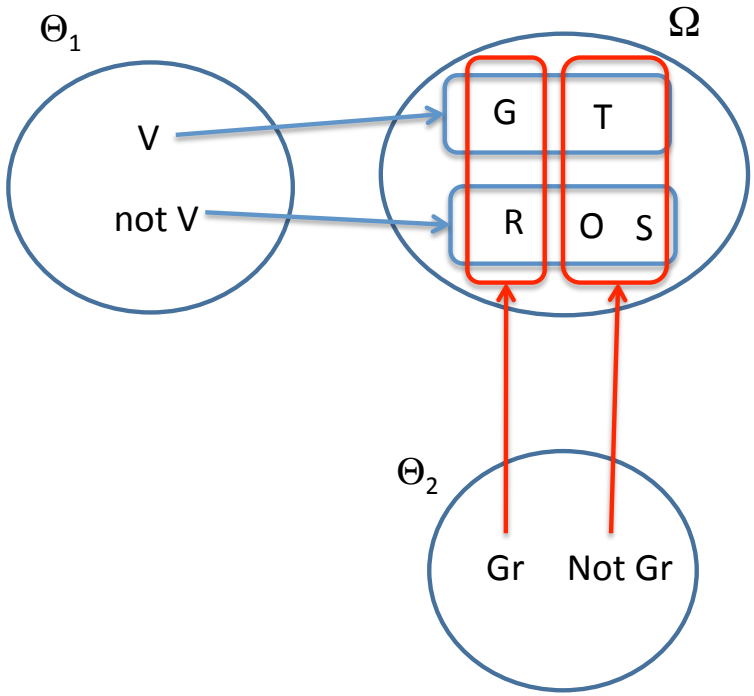
- Il arrive souvent que différents éléments d'information soient exprimés avec différents degrés de granularité.
- Exemple : $\Theta = \{\text{véhicule}, \neg\text{véhicule}\}$, $\Omega = \{\text{voiture}, \text{vélo}, \text{camion}, \ldots\}$.
- On dit qu'un cadre de discernement Ω est un raffinement d'un cadre Θ si on peut faire correspondre à chaque élément θ de Θ un élément $\rho(\theta)$ d'une partition de Ω.



- Étant donnés une fonction de masse m^Θ sur Θ et un raffinement Ω de Θ, on appelle extension de m^Θ dans Ω la fonction de masse $m^{\Theta\uparrow\Omega}$ obtenue en transférant chaque masse $m^\Theta(A)$ à $\bigcup_{\theta\in A}\rho(\theta)$.

Combinaison d'informations hétérogènes (suite)

- Deux cadres de discernement sont dits compatibles s'ils admettent un raffinement commun :



- Etant données deux fonctions de masse m^{Θ_1} et m^{Θ_2} définies sur deux cadres de discernement compatibles Θ_1 et Θ_2 ayant pour raffinement commun Ω, on définit leur somme orthogonale par

$$m^{\Omega} = m^{\Theta_1 \uparrow \Omega} \oplus m^{\Theta_2 \uparrow \Omega}$$

Plan

Nécessité d'une théorie de la décision

- Pour appliquer le modèle de DS en classification, il faut une théorie de la décision adaptée au cas où l'incertitude est modélisée par une fonction de croyance sur l'ensemble des classes.
- On trouve dans la littérature de nombreuses approches plus ou moins bien justifiées [5].
- Une théorie de la décision justifiée axiomatiquement a récemment été proposée [6]. La méthode décrite ici est un cas particulier de cette théorie.

5. T. Denoeux. Decision-Making with Belief Functions : a Review. *International Journal of Approximate Reasoning* 109 :87–110, 2019.

6. T. Denoeux and P. P. Shenoy. An Interval-Valued Utility Theory for Decision Making with Dempster-Shafer Belief Functions. *International Journal of Approximate Reasoning* 124 :194–216, 2020.

Cadre général

- Soit Ω un ensemble d'états, C un ensemble de conséquences, $\mathcal{F}$ un ensemble d'applications $f : \Omega \to C$ appelées actes, et u une application de C dans $\mathbb{R}$ appelée fonction d'utilité.
- Soit m une fonction de masse sur Ω. Pour tout acte f, on définit des utilités espérées inférieure et supérieure par

$$U_*(f) = \sum_{A \subseteq \Omega} m(A) \min_{\omega \in A} u\left[f(\omega)\right]$$

$$U^*(f) = \sum_{A \subseteq \Omega} m(A) \max_{\omega \in A} u\left[f(\omega)\right]$$

- Relation de préférence : f est préféré (au sens large) à f' ssi

$$\rho U_*(f) + (1-\rho) U^*(f) \geq \rho U_*(f') + (1-\rho) U^*(f'),$$

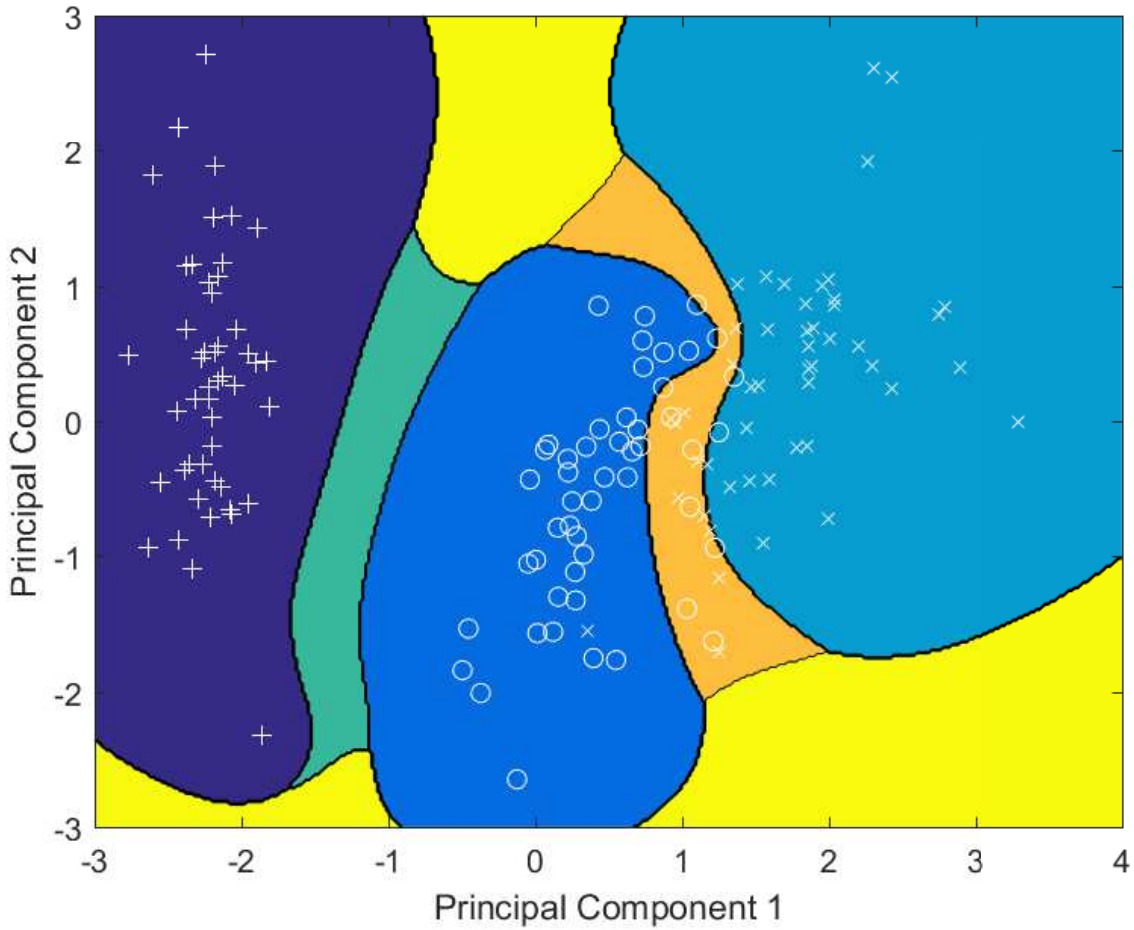
où $\rho \in [0, 1]$ est un indice de pessimisme.

Application à la classification

- En classification, Ω est l'ensemble des classes, un acte f_A est le choix d'un sous-ensemble non vide de classes A, parmi un ensemble $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega \setminus \{\emptyset\}$.
- Par exemple, si $\mathcal{A} = \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$ on n'autorise que le choix d'une seule classe, si $\mathcal{A} = \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\} \cup \{\Omega\}$ on autorise en plus le rejet, si $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : 0 < |A| \leq 2\}$ on autorise le choix d'un singleton ou d'une paire de classes, etc.
- En définissant les utilités $u[f_A(\omega)]$ de choisir l'ensemble de classes A si la vraie classe est ω, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $\omega \in \Omega$, on peut appliquer la théorie précédente pour choisir l'acte de plus grande utilité espérée [7].

7. L. Ma and T. Denoeux. Partial Classification in the Belief Function Framework. *Knowledge-Based Systems* 214 :106742, 2021.

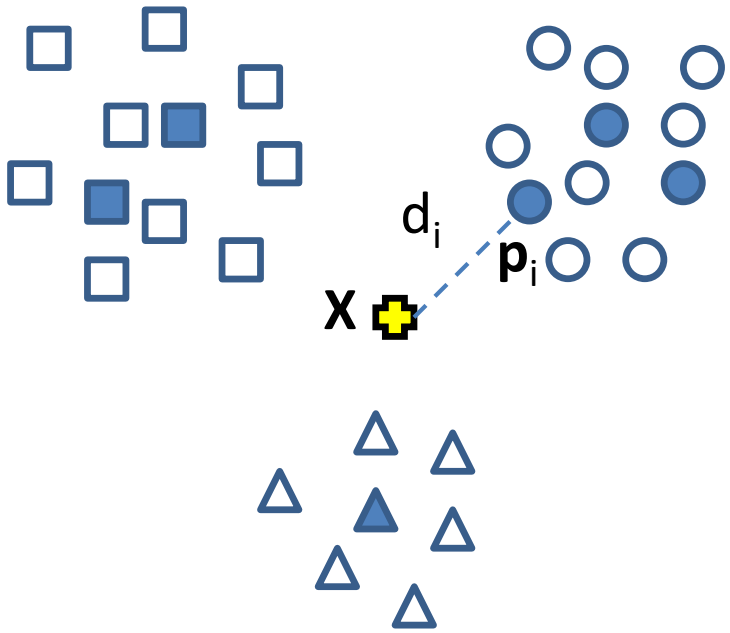
Exemple


Principal Component 2
Principal Component 1
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

Plan

Plan

Hypothèses



- L'ensemble d'apprentissage est résumé par r prototypes.
- Chaque prototype $\boldsymbol{p}_i$ a un degré d'appartenance $u_{ik} \in [0,1]$ à chaque classe ω_k, avec $\sum_{k=1}^{c} u_{ik} = 1$.
- Chaque prototype $\boldsymbol{p}_i$ est un élément d'évidence sur la classe de $\boldsymbol{x}$, dont la fiabilité décroît avec la distance $d_i = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}_i\|$ entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{p}_i$.

Formalisation

- Soit $s_i = \exp(-\gamma_i d_i^2)$ le degré de similarité entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{p}_i$, avec $\gamma_i > 0$.
- L'information apportée par le prototype $\boldsymbol{p}_i$ peut être représentée par la fonction de masse [8] :

$$m_i(\{\omega_k\}) = \alpha_i u_{ik} s_i, \quad k = 1, \ldots, c$$
$$m_i(\Omega) = 1 - \alpha_i s_i,$$

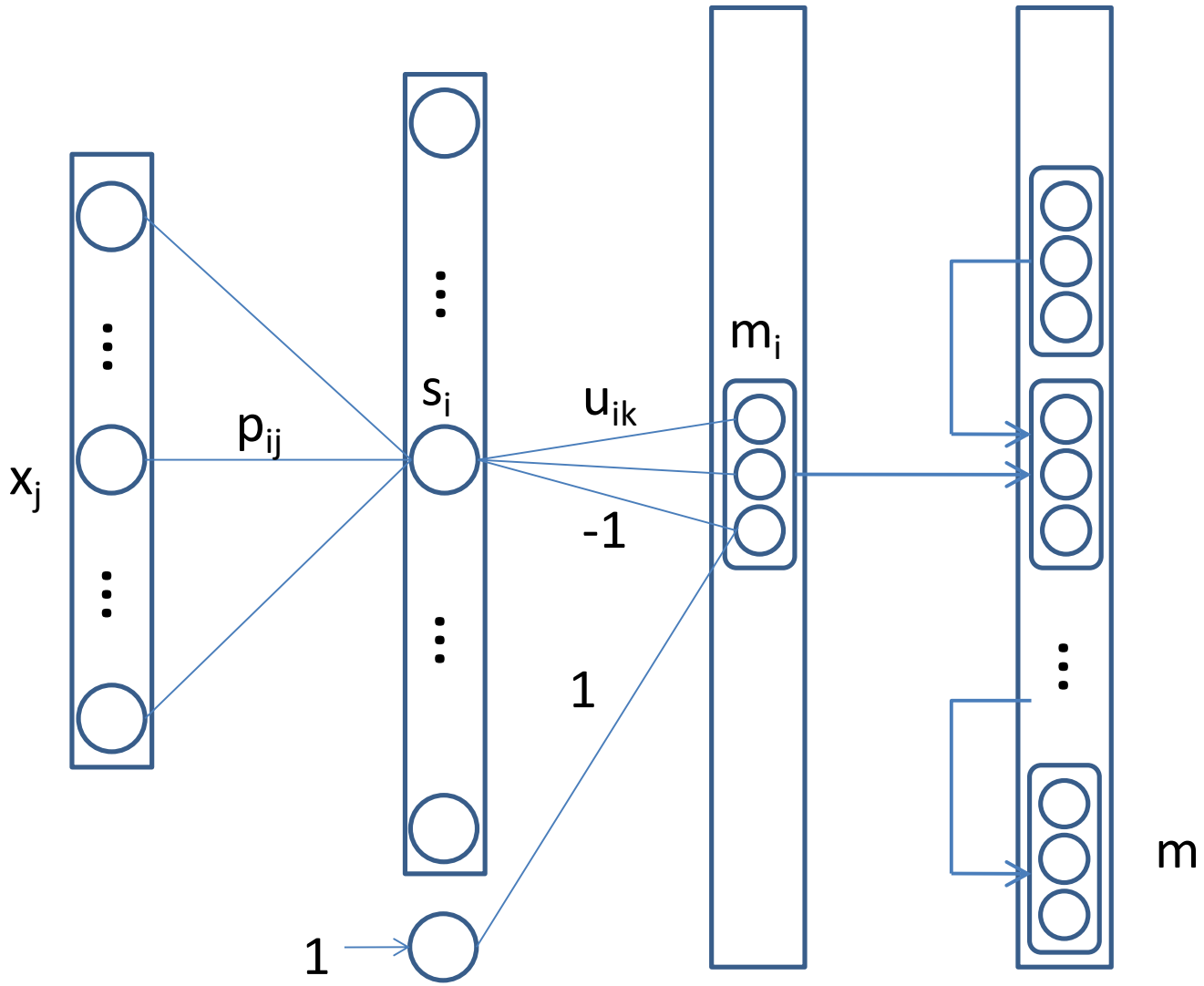
  avec $\alpha_i \in [0, 1]$.
- Combination :

$$m = \bigoplus_{i=1}^{r} m_i$$

- La fonction de masse combinée m a pour ensemble focaux les singletons $\{\omega_k\}$, $k = 1, \ldots, c$ and Ω.

8. T. Denœux. A neural network classifier based on Dempster-Shafer theory. *IEEE transactions on Systems, Man and Cybernetics A* 30(2) :131–150, 2000.

Implémentation connexionniste



Apprentissage

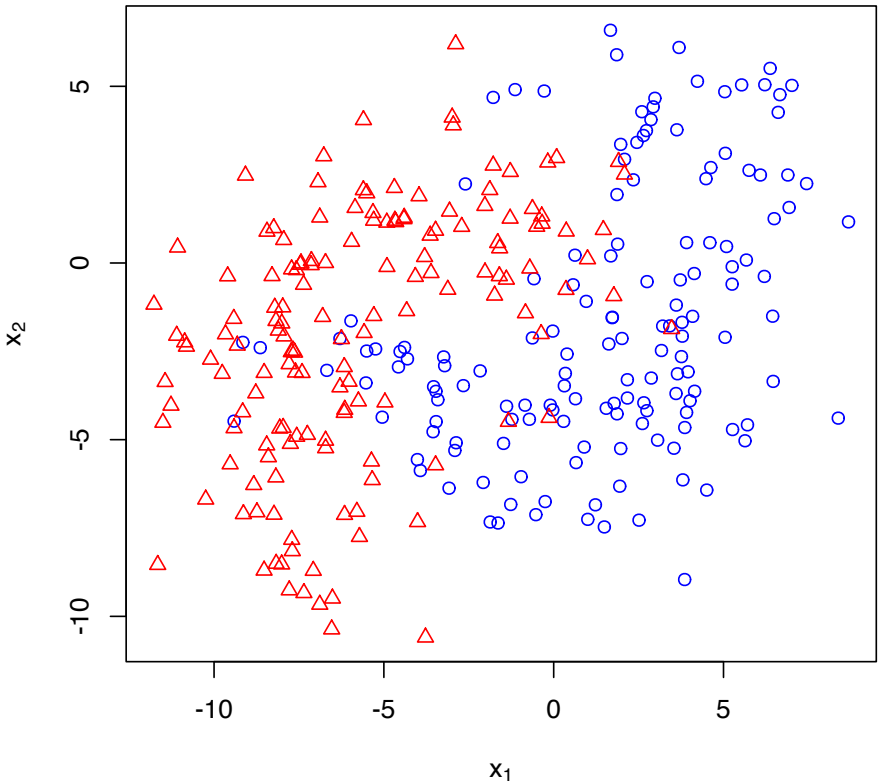
- Paramètres du modèle :
  - Prototypes $\boldsymbol{p}_i$, $i = 1, \ldots, r$ (rp paramètres)
  - Degrés d'appartenance u_{ik}, $i = 1, \ldots, r$, $k = 1 \ldots, c$ ($r(c-1)$ paramètres)
  - α_i et γ_i, $i = 1 \ldots, r$ ($2r$ paramètres).
- Fonction de coût :

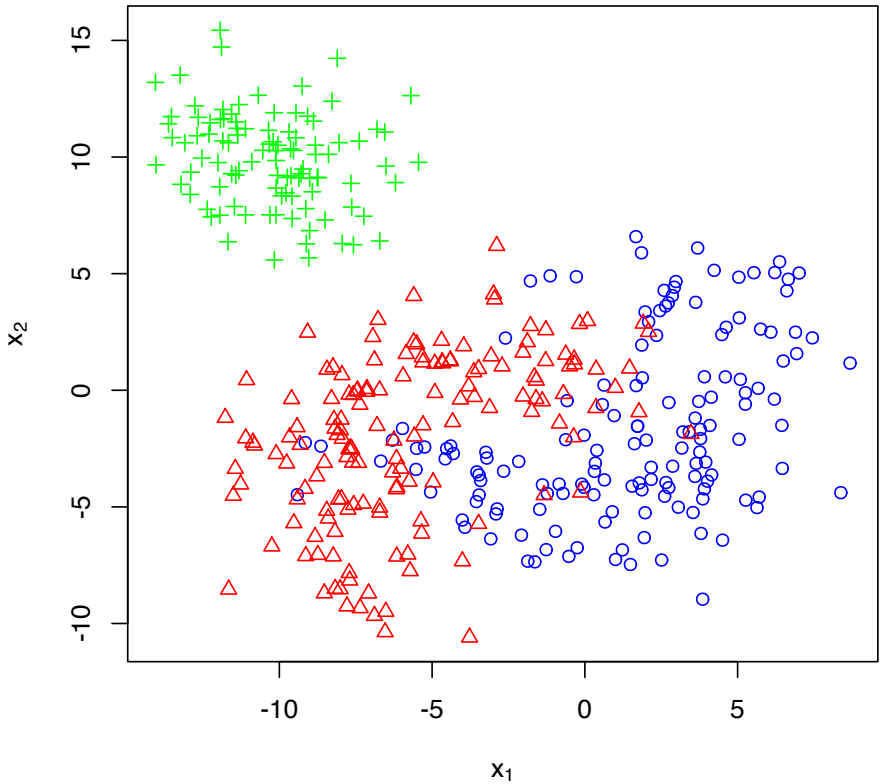
$$J(\boldsymbol{\theta}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{c}(pl_{ik} - y_{ik})^2}_{\text{erreur}} + \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{r}\alpha_i}_{\text{régularisation}}$$

où pl_{ik} est la plausibilité de la classe ω_k pour l'exemple i, $y_{ik} = I(y_i = \omega_k)$, et λ est un hyperparamètre (déterminé par validation croisée)[9].

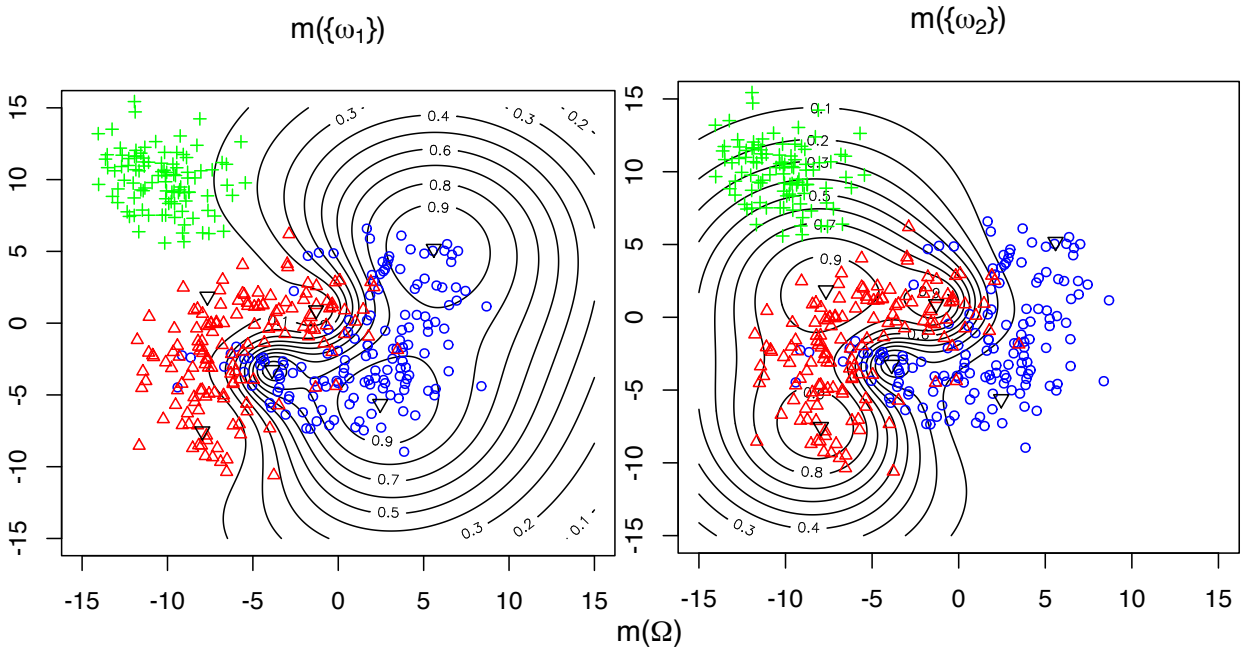
9. T. Denœux. evclass : Evidential Distance-Based Classification, R package version 1.1.1, https://CRAN.R-project.org/package=evclass.

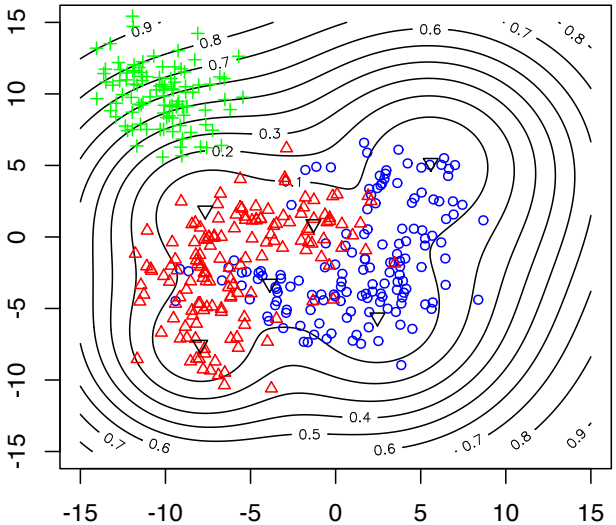
Exemple





Exemple





Plan

Formalisation (cas $c = 2$)

- Comme précédemment, on considère r prototypes $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_r$, et on note $s_i = \exp(-\gamma_i d_i^2)$ le degré de similarité entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{p}_i$ (avec $\gamma_i > 0$).
- On associe à chaque prototype $\boldsymbol{p}_i$ un paramètre supplémentaire $v_i \in \mathbb{R}$ tel que la proximité de $\boldsymbol{x}$ avec le prototype $\boldsymbol{p}_i$ accrédite
  - La classe ω_1 avec un poids d'évidence $w_i = s_i v_i$ si $v_i \geq 0$;
  - La classe ω_2 avec un poids d'évidence $w_i = -s_i v_i$ si $v_i < 0$.
- La fonction de masse induite par le prototype $\boldsymbol{p}_i$ s'écrit donc [10]

$$m_i = \{\omega_1\}^{w_i^+} \oplus \{\omega_2\}^{w_i^-},$$

où $w_i^+ = \max(0, w_i)$ et $w_i^- = \max(0, -w_i)$ sont les parties positive et négative de w_i.

10. T. Denœux. Logistic Regression, Neural Networks and Dempster-Shafer Theory : a New Perspective. *Knowledge-Based Systems* 176 :54–67, 2019.

Formalisation (cas $c = 2$)

En combinant l'information apportée par les r prototypes, on obtient

$$\begin{aligned} m &= \bigoplus_{i=1}^{r} \left(\{\omega_1\}^{w_i^+} \oplus \{\omega_2\}^{w_i^-} \right) \\ &= \left(\bigoplus_{i=1}^{r} \{\omega_1\}^{w_i^+} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{r} \{\omega_2\}^{w_i^-} \right) \\ &= \{\omega_1\}^{w^+} \oplus \{\omega_2\}^{w^-}, \end{aligned}$$

où

- $w^+ = \sum_{i=1}^{r} w_i^+$ est le poids total de l'évidence en faveur de ω_1
- $w^- = \sum_{i=1}^{r} w_i^-$ est le poids total de l'évidence en faveur de ω_2.

Formalisation (cas $c = 2$)

Expression de m :

$$m(\{\omega_1\}) = \frac{[1 - \exp(-w^+)]\exp(-w^-)}{1 - \kappa}$$
$$m(\{\omega_2\}) = \frac{[1 - \exp(-w^-)]\exp(-w^+)}{1 - \kappa}$$
$$m(\Omega) = \frac{\exp(-w^+ - w^-)}{1 - \kappa} = \frac{\exp(-\sum_{i=1}^{I} |w_i|)}{1 - \kappa},$$

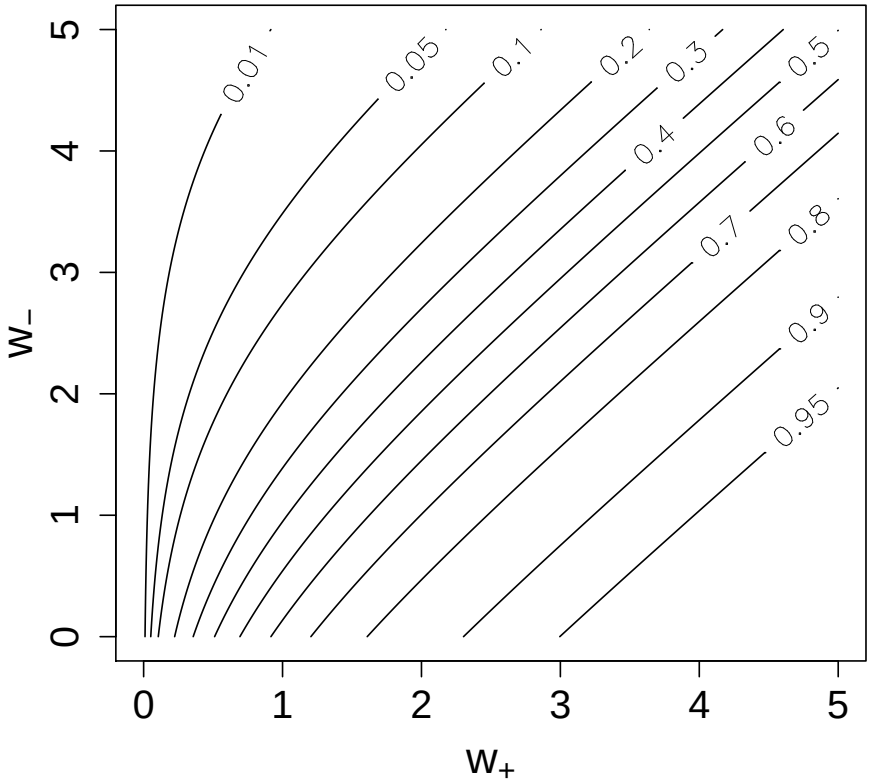
où

$$\kappa = [1 - \exp(-w^+)][1 - \exp(-w^-)]$$

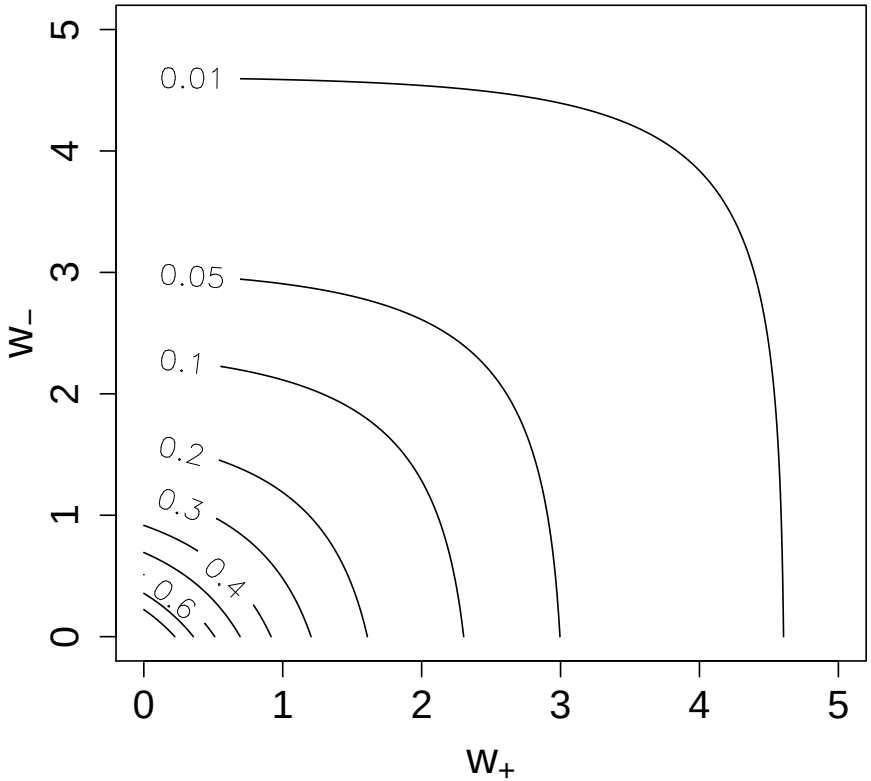
est le degré de conflit entre les fonctions de masse $\{\omega_1\}^{w^+}$ et $\{\omega_2\}^{w^-}$.

$m(\{\omega_1\})$ et $m(\Omega)$ vs. poids d'évidence

$m(\{\omega_1\})$

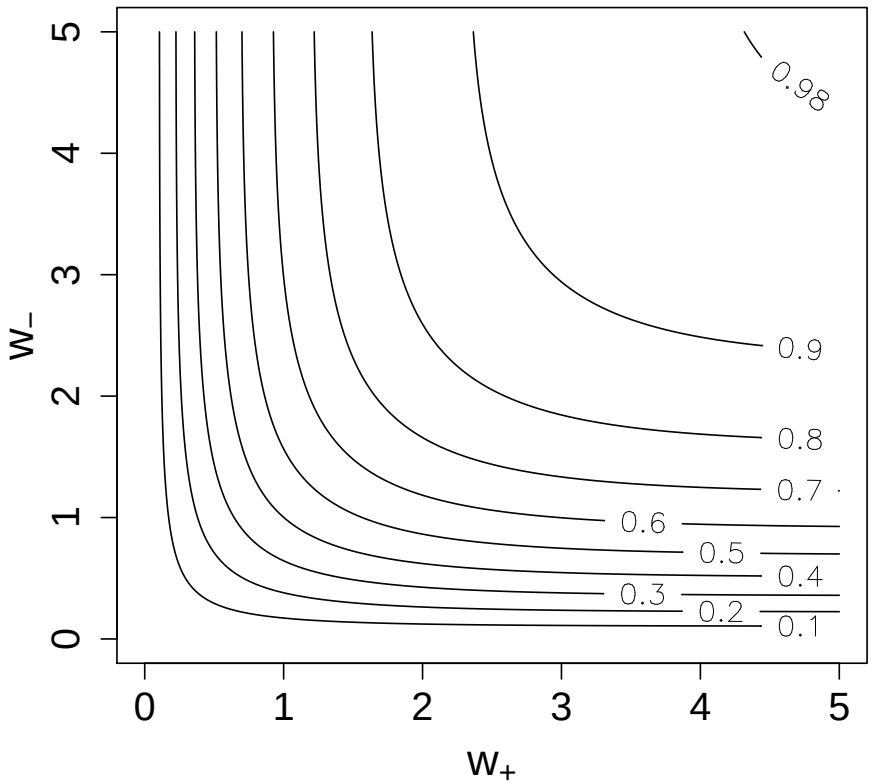


$m(\Omega)$



Degré de conflit vs. poids d'évidence

κ



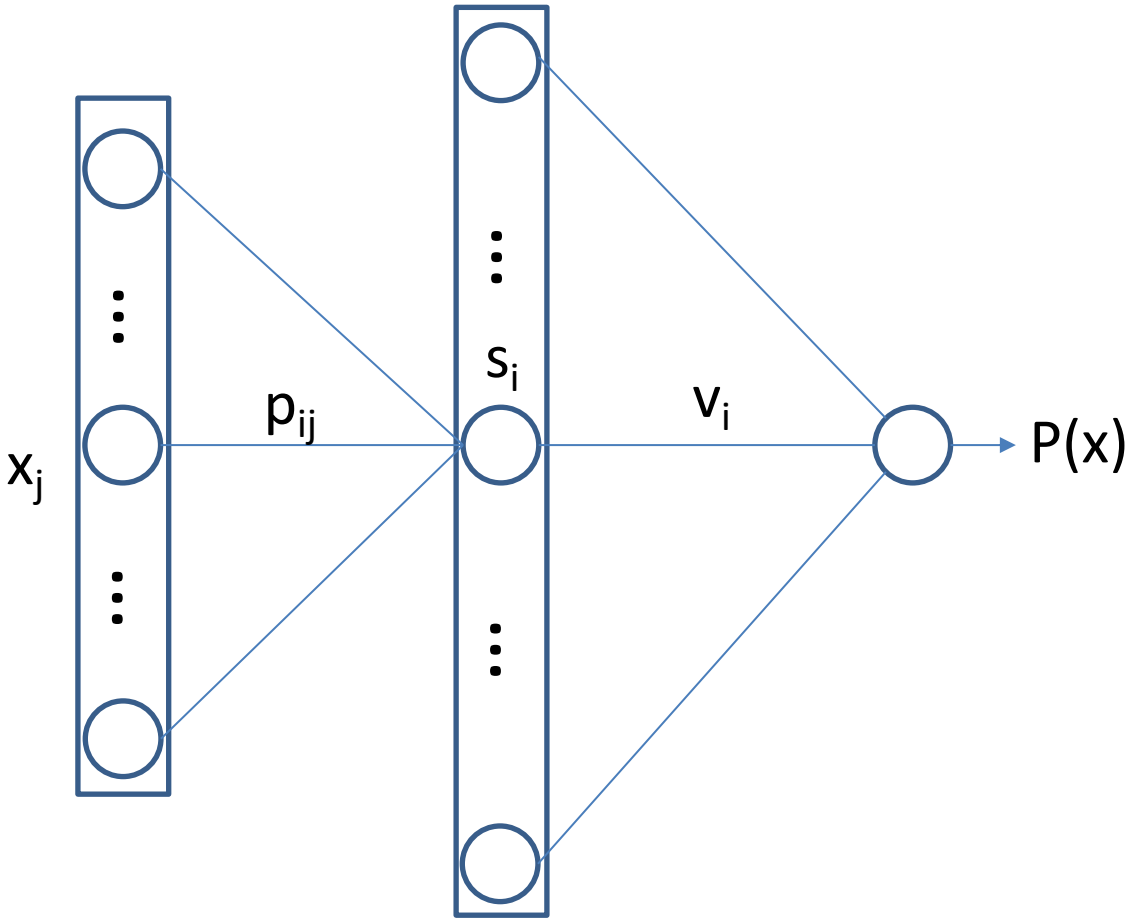
Plausibilités normalisées

- La plausibilité normalisée de la classe ω_1 est

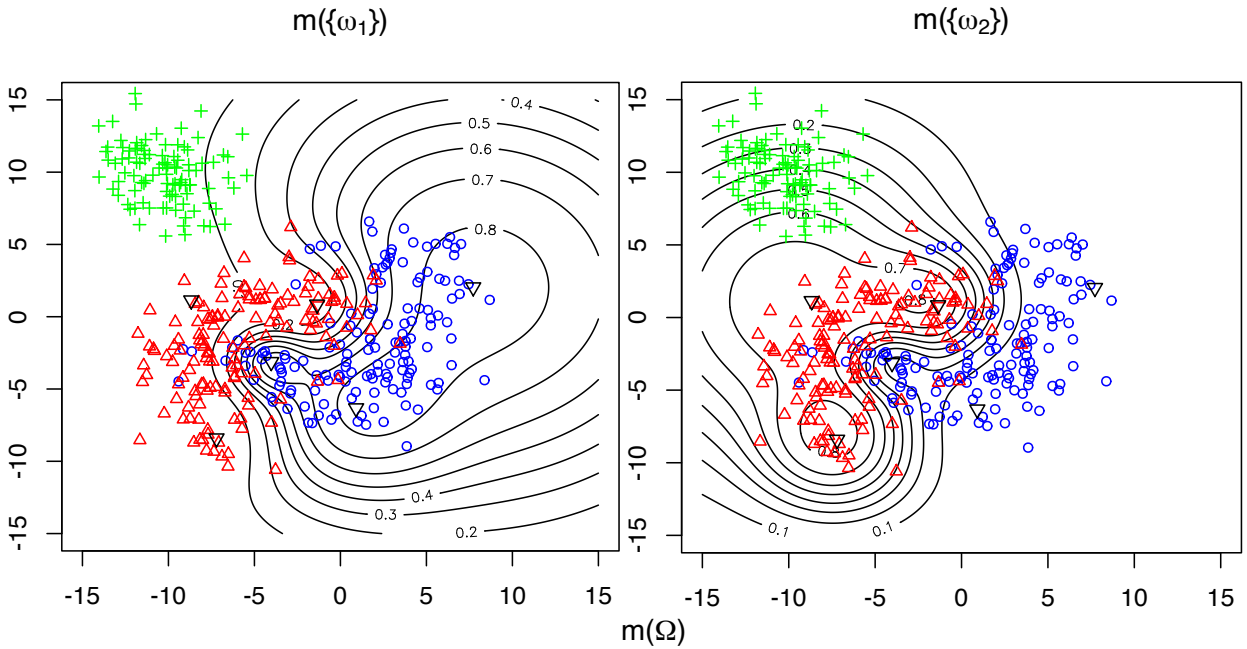
$$P(\boldsymbol{x}) = \frac{Pl(\{\omega_1\})}{Pl(\{\omega_1\}) + Pl(\{\omega_2\})} = \frac{m(\{\omega_1\}) + m(\Omega)}{m(\{\omega_1\}) + m(\{\omega_2\}) + 2m(\Omega)}$$
$$= \frac{1}{1 + \exp[-\sum_{i=1}^{r} v_i s_i]}$$

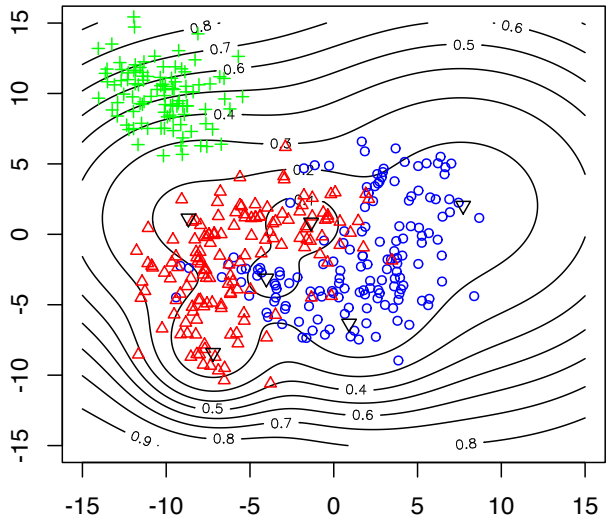
- C'est la sortie d'un réseau de neurones à fonctions de base radiales (FBR) avec une neurone de sortie à fonction d'activation logistique.
- Pour un tel réseau, la probabilité calculée en sortie est une plausibilité normalisée pour une fonction de masse latente.

Implémentation connexionniste



Exemple





Extension à plus de 2 classes

- Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_c\}$ avec $c > 2$. L'information apportée par chaque prototype $\boldsymbol{p}_i$ est représentée par c fonctions de masse simples $m_{i1}, \ldots, m_{ic}$.
- La fonction de masse m_{ik} s'écrit

$$m_{jk} = \{\omega_k\}^{w_{ik}^+} \oplus \overline{\{\omega_k\}}^{w_{ik}^-}$$

où $w_{ik} = s_i v_{ik}$ et v_{ik} est un paramètre associé au prototype i et à la classe k.

- En combinant les $r \times k$ fonctions de masse simples, on obtient

$$m = \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{k=1}^{c} \left(\{\omega_k\}^{w_{jk}^+} \oplus \overline{\{\omega_k\}}^{w_{jk}^-} \right) = \bigoplus_{k=1}^{c} \left(\{\omega_k\}^{w_k^+} \oplus \overline{\{\omega_k\}}^{w_k^-} \right),$$

où

- $w_k^+ = \sum_{r=1}^{c} w_{jk}^+$ est le poids total de l'évidence en faveur de la classe ω_k
- $w_k^- = \sum_{r=1}^{c} w_{jk}^-$ est le poids total de l'évidence contre la classe ω_k

Plausibilité normalisée

- La plausibilité normalisée de la classe ω_k est

$$p_k(\boldsymbol{x}) = \frac{Pl(\{\omega_k\})}{\sum_{l=1}^{K} Pl(\{\omega_l\})} = \underbrace{\frac{\exp\left(\sum_{r=1}^{c} v_{ik} s_i\right)}{\sum_{l=1}^{c} \exp\left(\sum_{i=1}^{r} v_{il} s_i\right)}}_{\text{transformation softmax}},$$

  with

$$\beta_{0k} = \sum_{j=1}^{J} \alpha_{jk}.$$

- Ce sont les sorties d'un réseau de neurones à FBR avec une couche de sortie softmax de c neurones.

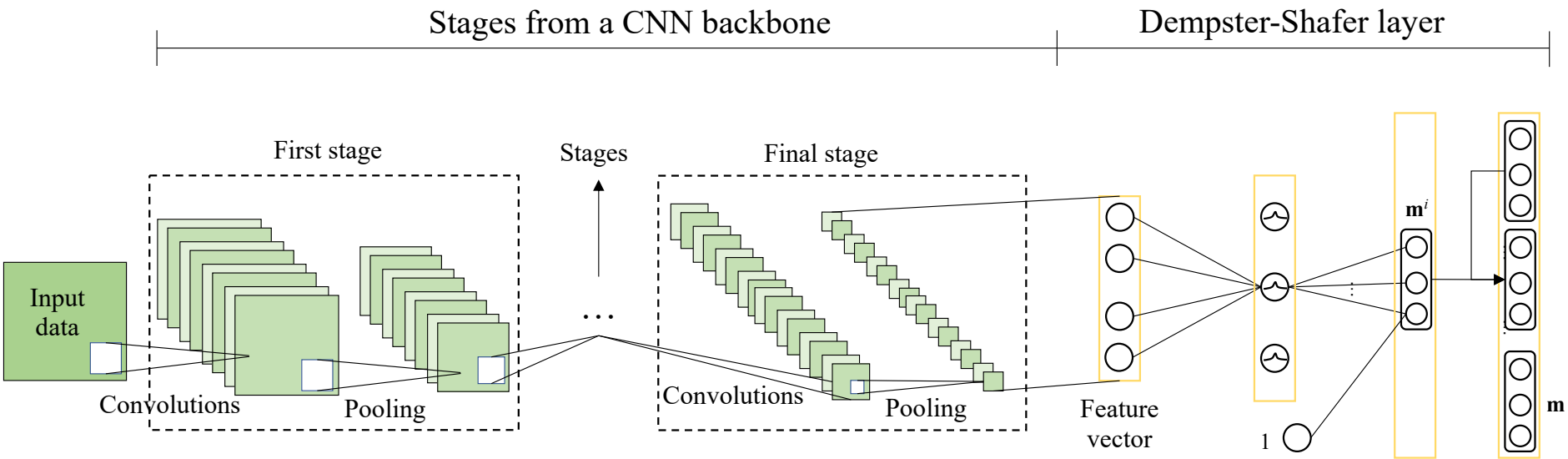
Plan

Motivations

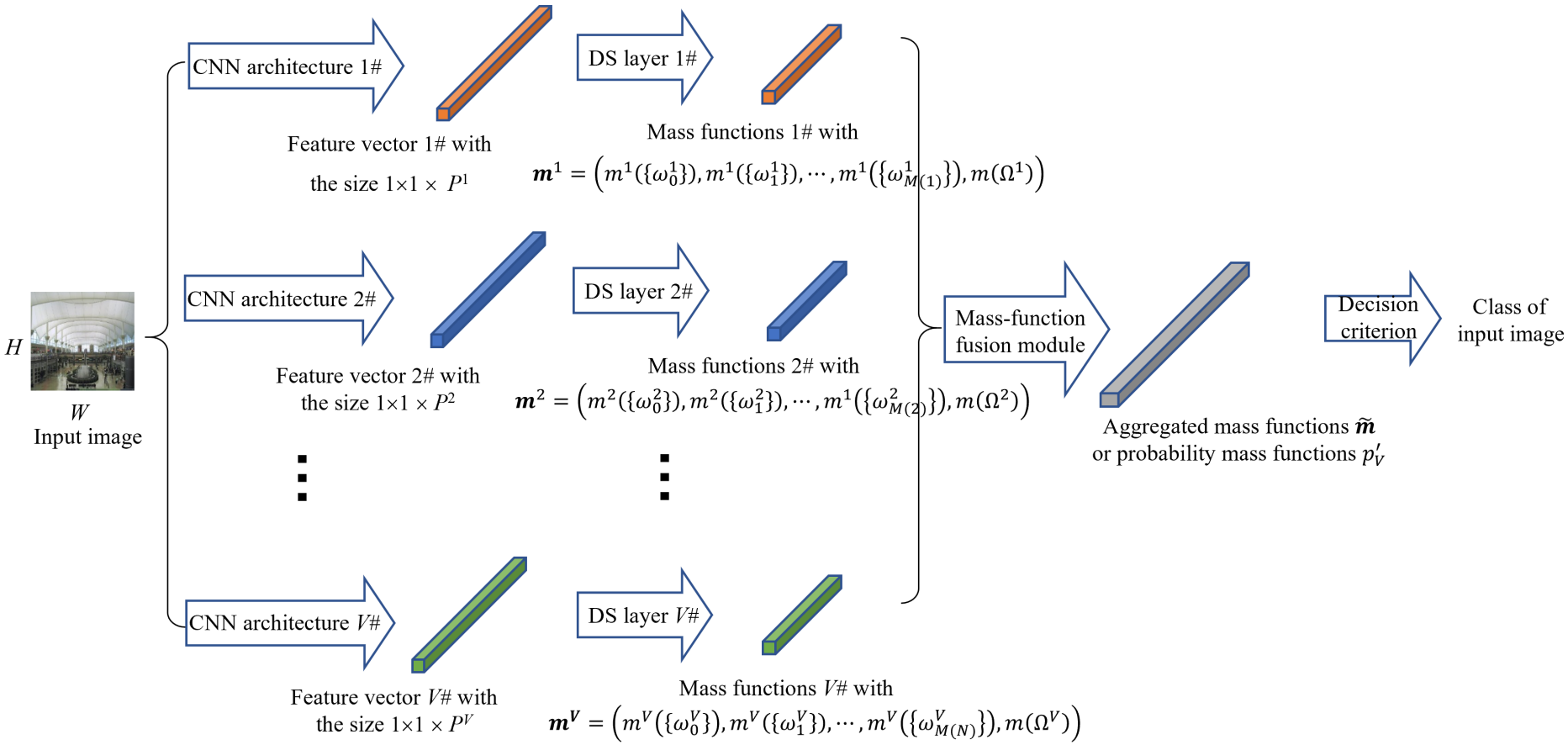
- L'apprentissage sur de très grands jeux de données nécessite des capacités de calcul considérables.
- D'autre part, pour un problème donné, il existe en général de nombreuses bases de données hétérogènes (avec des ensembles de classes différents, et différents niveau de granularité).
- Une solution aux problèmes précédents consiste à fusionner des classifieurs entraînés sur des ensembles d'apprentissage différents [11].

11. Zh. Tong, Ph. Xu and T. Denœux. *Fusion of Evidential CNN Classifiers for Image Classification*. In T. Denoeux, E. Lefèvre, Zh. Liu and F. Pichon (Eds), Belief Functions : Theory and Applications, Springer International Publishing, Cham, pp 168–176, 2021.

Classifieur évidentiel « profond »

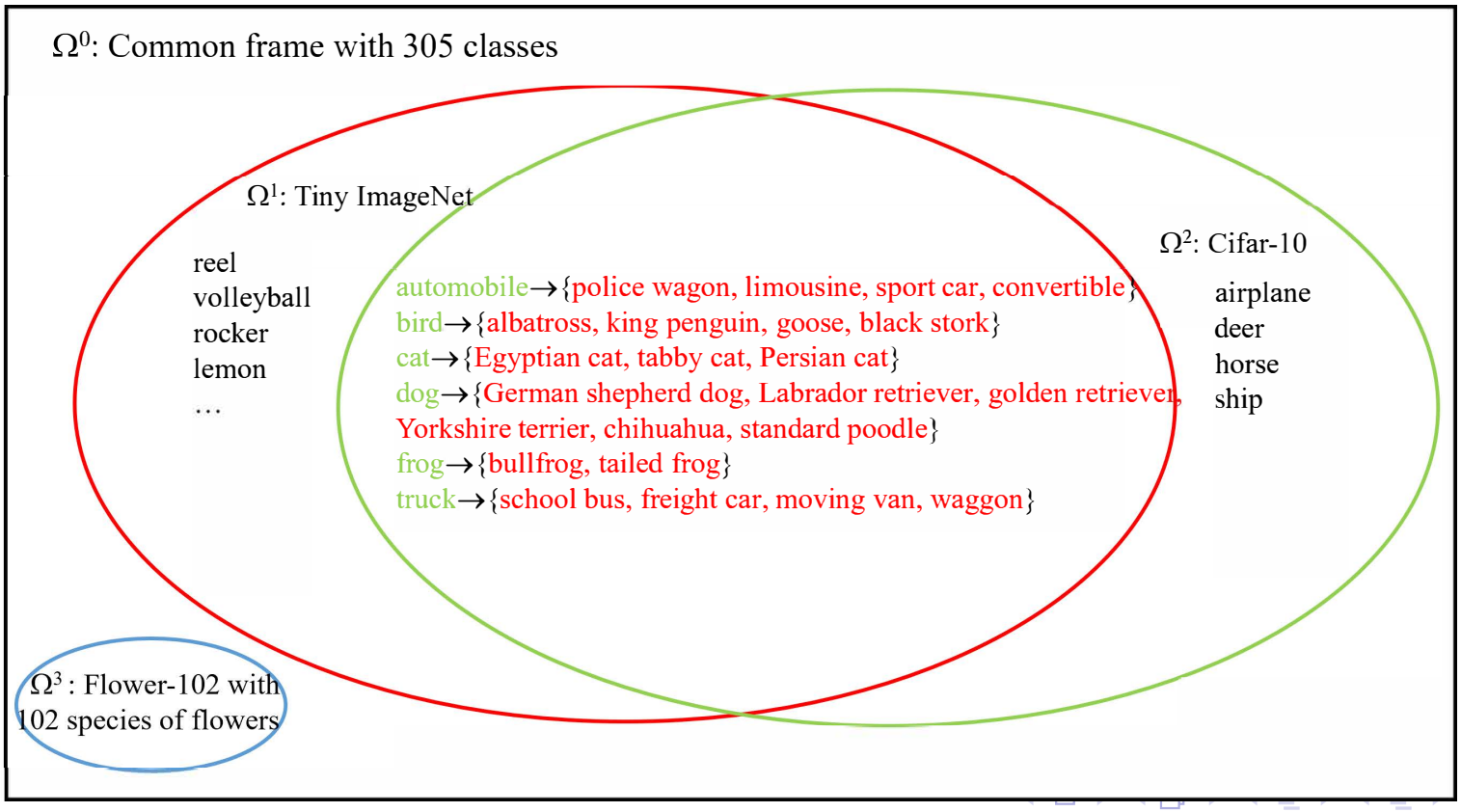


Fusion de classifieurs pour la classification d'images



Bases de données

Nom	# classes	# exemples d'app.	# exemples de test
Tiny ImageNet	200	10^5	10^4
Flower-102	102	4080	4129
CIFAR-10	10	5×10^4	10^4



Approche

- Un classifieur évidentiel est entraîné sur chacun des trois ensembles d'apprentissage.
- Chaque classifieur a son propre cadre de discernement, contenant l'ensemble des classes représentées dans l'ensemble d'apprentissage correspondant auquel on adjoint une classe ω_0 correspondant à tout le reste (les trois cadres de discernement sont alors compatibles).
- Les sorties des classifieurs sont étendues au plus petit raffinement commun Ω^0 et combinées par la règle de Dempster.
- Optionnellement, les trois classifieurs peuvent être réentraînés simultanément sur l'ensemble des données (on a alors un problème d'apprentissage partiellement supervisé).

Méthodes de fusion alternatives

Probability-to-mass fusion (PMF) [12] réseaux probabilistes (sortie softmax), combinaison des probabilités (après extension à Ω^0) par la règle de Dempster.

Bayesian-fusion (BF) : réseaux probabilistes (sortie softmax), probabilités calculées sur Ω^0 en utilisant le principe d'indifférence, combinasion par Dempster)

Probabilistic feature-combination (PFC) : concaténation des vecteurs de caractéristiques extraits par les trois réseaux + couche softmax

Evidential feature-combination (EFC) : concaténation des vecteurs de caractéristiques extraits par les trois réseaux + couche DS

12. Ph. Xu, F. Davoine, J.-B. Bordes, H. Zhao and Th. Denœux. Multimodal Information Fusion for Urban Scene Understanding. *Machine Vision and Applications* 27(3) :331–349, 2016.

Résultats

Classifier	Tiny ImageNet	Flower-102	CIFAR-10	Overall
E-ResNet-101	18.66	4.68	4.61	-
P-ResNet-101 [13]	18.70	4.69	4.66	-
MFE-ResNet-101	18.52	4.68	3.94	10.31
PMF-ResNet-101	18.54	4.69	4.42	10.40
BF-ResNet-101	19.18	5.07	6.04	11.10
E2E MFE-ResNet-101	18.50	**4.67**	**3.82**	**10.27**
E2E PMF-ResNet-101	**18.49**	4.68	4.28	10.35
E2E BF-ResNet-101	18.87	4.99	5.74	10.89
E2E PFC-ResNet-101	18.59	5.74	4.89	10.94
E2E EFC-ResNet-101	21.68	5.46	7.57	12.56

13. Y. Luo et al. Direction concentration learning : Enhancing congruency in machine learning. *IEEE Trans. PAMI* 43(6), 2021.

Interprétation

Instance/label	Before fusion			p' on Ω^0 after fusion
	p' from Tiny ImageNet	p' from CIFAR-10	p' from Flower102	
 Egyptian cat	$p'(\text{Egyptian cat}) = 0.472$ $p'(\text{chihuahua}) = 0.511$ ... $p'(\omega_0^1) = 0.001$	$p'(\text{cat}) = 0.873$ $p'(\text{dog}) = 0.116$ ... $p'(\omega_0^2) = 0.001$	$p'(\text{buttercup}) = 0.001$ $p'(\text{camellia}) = 0$ ... $p'(\omega_0^3) = 0.998$	$p'(\text{Egytian cat}) = 0.860$ $p'(\text{chihuahua}) = 0.125$ ... $p'(\omega_0^0) = 0.001$
 king penguin	$p'(\text{king penguin}) = 0.453$ $p'(\text{academic gown}) = 0.532$ ... $p'(\omega_0^1) = 0.001$	$p'(\text{bird}) = 0.732$ $p'(\{\text{frog}\}) = 0.102$ ... $p'(\omega_0^2) = 0.004$	$p'(\text{buttercup}) = 0$ $p'(\text{camellia}) = 0.001$ ... $p'(\omega_0^3) = 0.993$	$p'(\text{king penguin}) = 0.988$ $p'(\text{academic gown}) = 0.006$ ... $p'(\omega_0^0) = 0.001$
 bull frog	$p'(\text{bull frog}) = 0.382$ $p'(\text{tailed frog}) = 0.602$ ... $p'(\omega_0^1) = 0$	$p'(\text{frog}) = 0.972$ $p'(\text{cat}) = 0.010$ ... $p'(\omega_0^2) = 0$	$p'(\text{buttercup}) = 0.001$ $p'(\text{camellia}) = 0$ ... $p'(\omega_0^3) = 0.999$	$p'(\text{bull frog}) = 0.388$ $p'(\text{tailed frog}) = 0.611$ ... $p'(\omega_0^0) = 0$

Conclusions

- La théorie des fonctions de croyance fournit un cadre formel, plus général que le cadre probabiliste, pour la quantification des incertitudes.
- Cette théorie peut être utilisée pour la quantification des incertitudes de prédiction en apprentissage, en ajoutant une couche évidentielle à des réseaux de neurones profonds.
- Cette approche permet, en particulier, de combiner des classifieurs dont les sorties sont exprimées dans des cadres de discernment différents.
- Pistes de recherche :
  - Proposer de nouvelles fonctions de coût adaptées au cas où les sorties du classifieur sont des fonctions de croyance
  - Application à la régression (suppose de manipuler des fonctions de croyance sur $\mathbb{R}^p$)

References

cf. https://www.hds.utc.fr/~tdenoeux

T. Denœux
Logistic Regression, Neural Networks and Dempster-Shafer Theory : a New Perspective
Knowledge-Based Systems 176 :54–67, 2019.

L. Ma and T. Denœux
Partial Classification in the Belief Function Framework
Knowledge-Based Systems 214 :106742, 2021.

Z. Tong, Ph. Xu and T. Denœux
An evidential classifier based on Dempster-Shafer theory and deep learning
Neurocomputing 450 :275–293, 2021.

Z. Tong, Ph. Xu and T. Denœux
Evidential fully convolutional network for semantic segmentation
Applied Intelligence 51 :6376–6399, 2021.