Pertinence et Sincérité en Fusion d'Informations

Relevance and Truthfulness in Information Fusion

D. Dubois[1] T. Denœux[2]
[1] IRIT- CNRS
[2] HEUDIASYC - UTC,CNRS

IRIT, Université de Toulouse, 118 Route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 09, dubois@irit.fr
HEUDIASYC, Université de Technologie de Compiègne, thierry.denoeux@hds.utc.fr

Résumé :

On propose une approche générale pour la fusion de fonctions de croyance fournies par des sources, où non seulement les informations peuvent être non-pertinentes, mais encore les sources peuvent mentir. On montre qu'on peut ré-interpréter tous les connecteurs logiques propositionnels en termes d'hypothèses de comportement des sources quant à leur sincérité et leur pertinence. Ceci nous amène à généraliser la règle conjonctive non-normalisée de Smets à tous les connecteurs logiques, en y intégrant de surcroît l'incertitude sur ces hypothèses relatives au comportement des sources.

Mots-clés :

Fonctions de croyance, fusion, logique classique

Abstract:

A general approach to information fusion for belief functions is proposed, where not only may the information items be irrelevant, but sources may lie as well. We show how to reinterpret all connectives of Boolean logic in terms of source behavior assumptions with respect to relevance and truthfulness. We are led to generalize the non-normalized conjunctive rule of Smets to all Boolean connectives, while taking into account the uncertainties pertaining to assumptions concerning the behavior of sources

Keywords:

Belief functions, fusion, Boolean logic.

1 Introduction

Le problème de fusion d'informations incertaines a pris beaucoup d'importance dans les vingt dernières années avec le développement de systèmes d'information de tous genres, qu'il faut exploiter conjointement. Ce problème est en fait aussi ancien que la théorie des probabilités, si on se souvient de l'importance accordée à la formalisation de la fiabilité des témoignages jusqu'à la fin du XVIIIème siècle (voir par exemple l'article "probabilité" dans l'Encyclopédie de D'Alembert et Diderot).

Dans la plupart des modèles de fusion à ce jour, on fait une hypothèse quant à la pertinence des sources. Si une source, qui fournit un témoignage de la forme $x \in A$, est fiable avec une probabilité p, on suppose que l'information correspondante ne sert à rien avec la probabilité $1 - p$. Le coefficient p est attribué au fait de pouvoir affirmer $x \in A$ de façon sûre, et le coefficient $1 - p$ est attribué à la tautologie (il devient la probabilité de ne rien savoir par la source). Grâce à la règle de combinaison de Dempster (Shafer [9]), si on possède l'information $x \in A$ issue de deux sources, de fiabilités respectives p_1 et p_2, on justifie la fiabilité résultante $p_1 + p_2 - p_1p_2$ (déjà connue dans l'Encyclopédie sus-mentionnée).

Dans cet article on ajoute une connaissance quant à la sincérité des sources, et on étudie une approche générale de la fusion de fonctions de croyance, dans le cadre du modèle TBM de Smets [13], afin d'intégrer l'incertitude sur la sincérité et celle sur la pertinence dans le processus de fusion.

2 Cas d'une seule source

Supposons qu'une source informe sur la valeur d'un paramètre x défini sur un domaine X. Une telle information prendra la forme $x \in A$ où A est un sous-ensemble propre non vide de X supposé contenir la valeur de x. On suppose $\emptyset \subset A \subset X$, car on considère comme source toute entité qui fournit une information non-triviale et non-contradictoire. On considère ici que la fiabilité d'une source comporte deux aspects : sa pertinence et sa sincérité.

Une source est dite *pertinente* si on considère qu'elle est compétente sur le sujet sur lequel elle s'exprime. Cela exclut les cas où l'information exprimée ne correspond pas à la question posée, quand la source est un agent humain, celui où la source est un capteur qui s'exprime au hasard car il est en panne, etc. Par exemple, il est inutile de regarder l'heure sur une montre en panne, car l'information fournie n'est pas pertinente (même si l'heure lue peut être correcte).

Une source est dite *sincère* si l'information qu'elle fournit est bien celle qu'elle possède, si elle ne ment pas. Il y a des formes plus ou moins fortes d'insincérité, selon que la source dit le contraire ce qu'elle croit savoir, ou qu'elle en déclare moins, ou simplement autre chose qui peut même être cohérent avec ses croyances. Mais dans ce dernier cas la différence entre sincérité et pertinence devient plus ténue pour celui qui reçoit l'information. On considère ici pour simplifier qu'une source non-sincère dit le contraire de ce qu'elle croit être la vérité. La différence entre une source non-sincère et une source non-pertinente est alors que dans le premier cas, on peut retrouver une information valide si on sait que la source ment, mais dans le second cas, l'information fournie ne sert à rien.

Formellement, la méta-connaissance sur une source, relativement à sa pertinence et sa sincérité peut être exploitée en transformant l'information reçue par la source et en ré-intrerprétant cette information de manière appropriée :

1. Si la source est non-pertinente, on remplace $x \in A$ par $x \in X$ (information tautologique).
2. Si la source est pertinente,
   (a) soit elle est sincère, et on garde l'information $x \in A$;
   (b) soit elle ment et on remplace $x \in A$ par $\in A^c$ où A^c est le complémentaire de A.

En général, cette méta-connaissance sera incertaine : on peut ne pas être totalement certain de la pertinence ou de la sincérité des sources. Considérons le référentiel $\mathcal{H}$ décrivant les états possibles de la source. Par définition, $\mathcal{H} = \{PE, \neg PE\} \times \{SI, \neg SI\}$, domaine de la paire de variables (h_{PE}, h_{SI}), où PE veut dire pertinent et SI veut dire sincère. Supposons qu'un agent recevant l'information de la source fournisse des probabilités subjectives $prob(h_{PE}, h_{SI})$ sur le comportement de la source. On peut définir, en suivant l'approche de Dempster [1] une fonction multivoque Γ de $\mathcal{H}$ dans X telle que

$$\begin{aligned}\Gamma(PE, SI) &= A;\\ \Gamma(PE, \neg SI) &= A^c;\\ \Gamma(\neg PE, SI) &= \Gamma(\neg PE, \neg SI) = X.\end{aligned}$$

$\Gamma(h)$ indique comment interpréter l'information fournie par la source dans chaque configuration h de la source. Dans ce cas, un témoignage $x \in A$ sera systématiquement interprété par une fonction de croyance au sens de Shafer [9], d'allocation de masse m définie par

– $m(A) = prob(PE, SI)$;
– $m(A^c) = prob(PE, \neg SI)$;
– $m(X) = prob(\neg PE) = prob(\neg PE, SI) + prob(\neg PE, \neg SI)$.

Une allocation de masse m sur X est formellement une distribution de probabilité sur l'ensemble des parties de X (donc $\sum_{A \subseteq X} m(A) = 1$). Dans cette théorie de l'incertain, le poids $m(A)$ est affecté au fait de pouvoir affimer $x \in A$ comme représentation fidèle de la connaissance disponible ; il n'est pas attribué à l'occurrence de l'événement A comme la probabilité $P(A)$. Philosophiquement, $P(A)$ est une probabilité ***de re***, et $m(A)$ une probabilité ***de dicto*** (ce qui est contraire à la tradition probabiliste usuelle).

Posons $q = prob(SI|PE)$ et $p = prob(PE)$. On trouve alors, si $\emptyset \subset A \subset X$,

$$\begin{aligned}m(A) &= p \cdot q; &(1)\\ m(A^c) &= p \cdot (1-q); &(2)\\ m(X) &= 1 - p. &(3)\end{aligned}$$

En pratique, on pourra supposer que la pertinence d'une source est indépendante de sa sincérité (mais les équations ci-dessus montrent que ce n'est pas nécessaire dans notre approche). Dans ce cas, la distribution de probabilité sur $\mathcal{H}$ est définie à partir de la probabilité $p = prob(PE)$ qu'elle soit pertinente et $q = prob(SI)$ qu'elle soit sincère.

Plus généralement on peut considérer que l'information fournie par une source possède déjà la forme d'une allocation de masse m_S sur X, que l'on supposera quelconque (on peut donc avoir $m_S(X) > 0$ et/ou $m_S(\emptyset) > 0$). La métaconnaissance sur l'état de cette source permet donc de transformer cette allocation de masse en une nouvelle allocation de masse notée m. Cette transformation est un cas particulier d'un modèle général étudié par Mercier et al. [5]. Elle est définie par

$$m = pq\ m_S + p(1-q)\ m_S^c + (1-p)\ m_X,$$

où m_S^c est la négation de m_S [14], définie par $m_S^c(A) = m_S(A^c)$ pour tout $A \subseteq X$, et m_X est l'allocation de masse vide définie par $m_X(X) = 1$. On a donc

$$m(A) = pq\ m_S(A) + p(1-q)\ m_S(A^c)$$

pour tout $A \in 2^X \setminus \{\emptyset, X\}$,

$$m(X) = pq\ m_S(X) + p(1-q)m_S(\emptyset) + 1 - p,$$

et

$$m(\emptyset) = pq\ m_S(\emptyset) + p(1-q)m_S(X).$$

On généralise clairement la notion d'affaiblissement d'une fonction de croyance (discounting) proposée par Shafer [9] pour prendre en compte la fiabilité des sources d'information. Dans cette approche la non-fiabilité d'une source a pour origine un dysfonctionnement la rendant non pertinente [11]. Notre approche ajoute une éventuelle insincérité entendue comme la possibilité de mensonge. On peut aussi envisager des hypothèses non élémentaires correspondant à des sous-ensembles d'états possibles qui représenteraient autant d'état épistémiques de l'agent recevant les informations, quant à l'état des sources. Par exemple

- La source est soit pertinente soit sincère, mais pas les deux, soit $PE \oplus SI = (PE \wedge \neg SI) \vee (\neg PE \wedge SI)$, ce qui correspond à la disjonctions de deux états mutuellement exclusifs.
- La source est pertinente ou sincère, qui est la disjonction $PE \vee SI$ de trois états possibles mutuellement exclusifs.

Si on note $H \subseteq \mathcal{H}$ une hypothèse de ce type sur la source, il est clair que $\Gamma(H) = \cup_{e \in H} \Gamma(e)$, et on peut donc appliquer les résultats ci-dessus aux hypothèses non élémentaires. Néanmoins, cela n'a pas d'intérêt pratique dans le cas d'une seule source (car $\Gamma(H) = X$ dès que H n'est pas élémentaire). L'intérêt de cette idée va apparaître dans le cas de plusieurs sources.

3 Cas de deux sources : hypothèses de comportement

Si on possède deux sources d'information, on peut envisager deux approches :

1. Modifier les informations provenant des deux sources, puis fusionner les fonctions de croyance obtenues (par la règle de Dempster [9] ou sa version non-normalisée [13]).
2. Intégrer la méta-connaissance sur les sources dans le processus de fusion luimême.

Il est clair que la seconde option paraît plus générale et plus convaincante. Dans ce cas on va faire une hypothèse sur la sincérité et la pertinence des deux sources. Si on note $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, l'ensemble des configurations possibles de chacune des sources, l'ensemble des hypothèses élémentaires possibles sur les sources sera $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$. Il y a donc 16 états possibles $(h^1_{PE}, h^1_{SI}, h^2_{PE}, h^2_{SI})$.

Supposons que la source 1 affirme $x \in A$ et la source 2 affirme $x \in B$ avec $A, B \neq X$. La manière de combiner ces informations dépendra de l'hypothèse choisie sur l'état des sources. On va donc obtenir une fonction multivoque $\Gamma : \mathcal{H} \to 2^X$ qui donne pour chaque hypothèse élémentaire le résultat de la fusion à effectuer entre les deux informations.

1. Supposons les deux sources sincères.
   (a) Si elles sont toutes les deux pertinentes, on doit conclure $x \in A \cap B$;
   (b) Si la source 2 (resp. 1) est non-pertinente on en conclut $x \in A$ (resp. B).
   (c) Sinon $x \in X$.
2. Supposons la source 1 sincère et la source 2 non-sincère.
   (a) Si elles sont toutes les deux pertinentes, on doit conclure $x \in A \cap B^c$;
   (b) Si la source 2 (resp. 1) est non-pertinente on en conclut $x \in A$ (resp. B^c).
   (c) Sinon $x \in X$.
3. Supposons la source 2 sincère et la source 1 non-sincère.
   (a) Si elles sont toutes les deux pertinentes, on doit conclure $x \in A^c \cap B$;
   (b) Si la source 2 (resp. 1) est non-pertinente on en conclut $x \in A^c$ (resp. B).
   (c) Sinon $x \in X$.
4. Supposons les deux sources non-sincères.
   (a) Si elles sont toutes les deux pertinentes, on doit conclure $x \in A^c \cap B^c$;
   (b) Si la source 2 (resp. 1) est non-pertinente on en conclut $x \in A^c$ (resp. B^c).
   (c) Sinon $x \in X$.

On obtient donc les quatre connecteurs binaires $A \cap B$, $A^c \cap B$, $A \cap B^c$, et $A^c \cap B^c$ en variant la sincérité des sources supposées pertinentes. Notons que certaines hypothèses élémentaires sont incompatibles avec les informations reçues. Si les informations sont conflictuelles ($A \cap B = \emptyset$), le cas 1a est impossible : soit l'une des deux sources n'est pas pertinente, soit l'une des deux sources ment. Le cas $A \cap B^c = \emptyset$ exclut l'hypothèse 2a, et de même $A \cup B = X$ exclut le cas où les deux sources mentent.

D'autres connecteurs logiques peuvent être obtenus en considérant des hypothèses non élémentaires non triviales $H \subset \mathcal{H}$ sur la connaissance relative à l'état des sources. En théorie, il y a beaucoup de telles hypothèses (2^{16}). En pratique, seules certaines hypothèses sont intéressantes à étudier. En effet, le résultat est trivial ($x \in X$) dès que H contient une hypothèse élémentaire de la forme $(\neg PE, h^1_{SI}, \neg PE, h^2_{SI})$, par exemple.

Un premier type de méta-connaissance non-triviale consiste à faire une hypothèse sur le nombre de sources sincères et/ou pertinentes faute de connaissance individualisée sur chaque source. Les cas intéressants sont les suivants (les autres hypothèses plus faibles qui s'expriment de la sorte n'induiraient aucune information) :

– Les sources sont toutes les deux pertinentes, et au moins une est sincère. C'est la disjonction des hypothèses 1a, 2a, et 3a. On en déduit $x \in A \cup B$.
– Les sources sont toutes les deux pertinentes, dont exactement une est sincère. C'est la disjonction des hypothèses en 2a et 3a. On en déduit $x \in A \oplus B$ (*ou exclusif*).
– Les sources sont toutes les deux pertinentes, et au plus une est sincère. C'est la disjonction des hypothèses 2a, 3a, et 4a. On en déduit $x \in A^c \cup B^c$
– Les sources sont toutes les deux sincères, et au moins une est pertinente. C'est la disjonction des deux hypothèses en 1b et de l'hypothèse 1a. On en déduit encore $x \in A \cup B$. Le résultat serait le même si on suppose les sources sincères dont *exactement* une est pertinente.

On peut aussi connaître une dépendance entre les sources. Par exemple, savoir que les sources sont toutes les deux pertinentes, mais la source 1 est sincère si et seulement si la source 2 l'est aussi. C'est la disjonction des hypothèses 1a et 4a, ce qui donne $x \in (A \cap B) \cup (A^c \cap$

B^c), et qui correspond au connecteur d'équivalence logique. On pourrait de même retrouver le connecteur $A \cup B^c$ en supposant que

– les sources sont toutes les deux pertinentes, et qu'il est impossible qu'à la fois la source 1 mente et que la source 2 soit sincère ;
– ou encore que soit la source 1 est sincère et l'autre n'est pas pertinente, soit la source 2 ment et la première n'est pas pertinente.

Il s'agit alors de l'implication *si* B *alors* A, qui correspond ici à dire que " si la source 2 ment, alors la source 1 est sincère" (dans le cas de sources pertinentes).

On peut ainsi retrouver *presque tous* les connecteurs binaires de la logique propositionnelle (sauf $A \perp B = \emptyset$, qu'on n'avait déjà pas dans le cas d'une seule source si on suppose que le résultat du traitement doit être logiquement cohérent). Ce qui est intéressant ici c'est que chaque connecteur logique peut se réinterpréter comme le résultat d'une hypothèse relativement au comportement global des sources d'information, en termes de sincérité et de pertinence.

Notons qu'en recherchant le bon connecteur qui construise l'information imprécise résultante, on élimine une partie de l'information dont on dispose. Par exemple, on retrouve $x \in A \cup B$ dans plusieurs situations. Pourtant dans chacune d'elle l'information qui résulterait d'une connaissance plus précise sur les sources est différente :
– si les sources sont toutes les deux sincères, et *exactement* une est pertinente, alors soit on saurait $x \in A$ soit on saurait $x \in B$ (si on savait laquelle était pertinente) ;
– si les sources sont toutes les deux pertinentes, et au moins une est sincère, alors soit on saurait $x \in A \cap B^c$ soit on saurait $x \in A^c \cap B$ soit on saurait $x \in A \cap B$ (si on savait lesquelles sont sincères).

Dans les deux cas, *on en déduit* $x \in A \cup B$, mais les (méta)-connaissances originelles sont bien distinctes. Pour exprimer ces nuances il faudrait faire appel à la logique modale, en notant $\Box$ la modalité du savoir, car la formule $\Box A \vee \Box B$ y est différente de la formule

$$\Box(A \cap B^c) \vee \Box(A^c \cap B) \vee \Box(A \cap B).$$

4 Une règle de combinaison générale intégrant sincérité et pertinence

Dans cette section on envisage trois situations : soit on sait quelque chose de certain sur le comportement des sources qui fournissent des informations incertaines, soit les sources fournissent des témoignages clairs mais on doute de leur sincérité et de leur pertinence, soit à la fois les informations fournies, et la sincérité ainsi que la pertinence des sources sont incertaines. Ce dernier cas est le plus général.

4.1 Hypothèse de comportement des sources connue avec certitude

Supposons maintenant que l'on sache de façon certaine qu'une hypothèse (imprécise) $H \subset \mathcal{H}$ de comportement des deux sources est correcte. Soit $\otimes_H$ l'opération ensembliste correspondant au connecteur logique induit par H comme indiqué ci-dessus. Supposons que la source 1 (resp. 2) fournisse une allocation de masse m_1 (resp. m_2). On suppose de plus que les sources sont indépendantes au sens précis suivant : si on interprète $m_i(A)$ comme la probabilité que la source i fournisse l'information $x \in A$, alors la probabilité que la source 1 fournisse l'information $x \in A$ et la source 2 fournisse conjointement l'information $x \in B$ est le produit $m_1(A) \cdot m_2(B)$.

Dans ce cas, la probabilité affectée à la possibilité d'interpréter l'information conjointe fournies par les sources sous la forme $x \in C \subseteq X$ est

$$m(C) = \sum_{A,B:C=A\otimes_H B} m_1(A) \cdot m_2(B). \quad (4)$$

Ce résultat est la simple conséquence du fait que si la source 1 affirme $x \in A$ et la source 2 affirme $x \in B$, alors sous l'hypothèse H, on doit en conclure que c'est $x \in C$ qui est crédible. Il y a donc 15 variantes de cette règle de combinaison, incluant la règle conjonctive non-normalisée de Smets [13] et la règle disjonctive (Dubois et Prade [2]). Notons que si $A \otimes_H B = \emptyset$ pour deux ensembles focaux A et B issus de chacune des sources respectives, cela correspond à un conflit non plus seulement entre les deux sources dans l'espace X, mais entre les deux sources et l'hypothèse de comportement H, dans l'espace $\mathcal{H} \times X$. Plusieurs attitudes sont possibles : on peut soit renormaliser le résultat comme dans la règle de Dempster, ce qui revient à supposer que l'hypothèse H est correcte, et à conditionner sur l'hypothèse que les sources ne peuvent se contredire ; soit rejeter l'hypothèse de comportement H au profit d'une autre qui soit compatible avec les informations fournies par les sources.

Notons que si les fonctions de croyance m_i sont consonantes, donc représentables par des distributions de possibilité $\pi_i : X \to [0, 1]$, on peut, si l'on souhaite effectuer la fusion à l'intérieur du cadre possibiliste [3], remplacer la combinaison (4) par un connecteur logique flou qui généralise $\otimes_H$ au cadre multivalué.

4.2 Témoignages simples et méta-connaissance incertaine

Il est naturel de vouloir représenter l'incertitude quant au comportement des sources par une allocation de masse $m_{\mathcal{H}}$ sur l'espace $2^{\mathcal{H}}$ des hypothèses, plutôt qu'une distribution de probabilité sur $\mathcal{H}$. Supposons que les informations fournies par les sources sont de simples témoignages de la forme $x \in A$ et $x \in B$ respectivement. Dans ce cas le résultat de la fusion est une allocation de masse m sur 2^X définie par :

$$m(C) = \sum_{H : A \otimes_H B = C} m_{\mathcal{H}}(H). \qquad (5)$$

Cette allocation de masse induit en fait une distribution de probabilité sur les 15 connecteurs binaires induits par les hypothèses H :

$$p_{\mathcal{H}}(\otimes) = \sum_{H : \otimes_H = \otimes} m_{\mathcal{H}}(H).$$

Si l'une des sources est non informative ($B = X$), il ne reste que trois connecteurs possibles (qui donnent $C = A, A^c$ ou X) et on retrouve l'interprétation de l'information émise par une seule source (1).

Cette approche est générale au sens où les comportements des sources ne sont pas supposés indépendants. Si on suppose cette « méta-indépendance » entre les sources, on aura $m(H) > 0$ seulement si $H = H_1 \times H_2$ avec $H_i \subset \mathcal{H}_i$, et $m_{\mathcal{H}}(H) = m_{\mathcal{H}_1}(H_1) m_{\mathcal{H}_2}(H_2)$. Par exemple supposons des sources sincères et de probabilités de pertinence respectives indépendantes p_1 et p_2. Il est facile de vérifier qu'il est équivalent de combiner les témoignages affaiblis de chaque source par la règle conjonctive, ou d'appliquer la règle ci-dessus avec la fonction de croyance d'allocation de masse

$$\begin{aligned}
m_{\mathcal{H}}(PE_1, PE_2) &= p_1 \cdot p_2 \\
&\quad (A \otimes_H B = A \cap B); \\
m_{\mathcal{H}}(PE_1, \neg PE_2) &= p_1 \cdot (1 - p_2) \\
&\quad (A \otimes_H B = A); \\
m_{\mathcal{H}}(\neg PE_1, PE_2) &= (1 - p_1) \cdot p_2 \\
&\quad (A \otimes_H B = B); \\
m_{\mathcal{H}}(\neg PE_1, \neg PE_2) &= (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \\
&\quad (A \otimes_H B = X).
\end{aligned}$$

4.3 Cas général

On suppose maintenant que les informations transmises par les sources indépendantes sont des fonctions de croyance m_1 et m_2. Les deux opérations de fusion (4) et (5) se généralisent en considérant qu'on choisit d'abord une opération de fusion $\otimes$ avec une probabilité $p_{\mathcal{H}}(\otimes)$ et qu'on applique alors la combinaison $\otimes$ entre les ensembles focaux de m_1 et m_2 :

$$
\begin{aligned}
m(C) &= \sum_{H} m_{\mathcal{H}}(H) \sum_{A,B:C=A\otimes_H B} m_1(A)m_2(B) \\
&= \sum_{\otimes} p_{\mathcal{H}}(\otimes) \sum_{A,B:C=A\otimes B} m_1(A)m_2(B).
\end{aligned}
$$

Il conviendrait d'étudier les propriétés de cette méthode générale de fusion de sources fournissant des informations indépendantes. En particulier, on peut se demander si, comme dans le cas de sources sincères de pertinences indépendantes, on peut, de façon équivalente, soit appliquer la règle ci dessus, soit interpréter d'abord l'information fournie par chaque source en fonction de sa sincérité et de sa pertinence (avec l'équation (1)) puis combiner les résultats à l'aide d'un connecteur logique approprié.

L'extension de cette approche au cas de n sources plus ou moins certainement sincères et/ou pertinentes ne pose pas de difficulté théorique. Cependant, la complexité de l'approche va croître exponentiellement (car il y aura 4^n hypothèses élémentaires de comportement des sources soit une complexité en 2^{4^n} pour la fonction de croyance exprimant la méta-connaissance sur les sources dans le cas général).

5 Discussion

L'idée d'opérations de fusion de fonctions de croyances basées sur une extension d'autres opérations ensemblistes que la conjonction n'est pas nouvelle (Dubois et Prade [2], Yager [15]). La généralisation de la disjonction aux fonctions de croyance avait été trouvée par Smets [10],[11] en définissant le théorème de Bayes généralisé.

Plus récemment, Smets [12] avait introduit ce qu'il appelait des $\alpha-$jonctions, qui sont des opérations d'agrégation de fonctions de croyance dépendant d'un paramètre α. Selon que ce paramètre vaille 0 ou 1, l'α-conjonction coïncide avec l'extension de la conjonction ou de l'équivalence, et l'α-disjonction coïncide avec l'extension de la disjonction ou du *ou exclusif*. Les α-conjonctions ont pour élément neutre l'allocation de masse vide, tandis que le α-disjonctions ont pour élément neutre l'allocation de masse contradictoire $m(\emptyset) = 1$. Dans sa thèse, Pichon [7][8] analyse ces opérations en termes de sincérité des sources et note que l'équivalence logique étendue aux fonctions de croyances correspond à deux sources qui sont ensemble sincères ou non, et que le *ou exclusif* correspond au cas où une seule source est sincère.

Ces règles de combinaison avaient été définies axiomatiquement par Smets [12] comme les seules opérations de combinaison ayant une structure de semi-groupe et s'exprimant comme une transformation linéaire d'allocation de masse par une matrice stochastique, mais leur sens restait obscur. Pichon [7] parvient à les interpréter en considérant des allocations de masse auxiliaires sur l'espace des hypothèses $\mathcal{H}$ de comportement des sources. Ainsi, l'α-conjonction s'obtient en supposant que :

– les deux sources sont pertinentes et soit toutes deux sincères, soit toutes deux non-sincères (c'est-à-dire que l'opérateur $\otimes$ est l'équivalence logique) ;
– la croyance dans l'hypothèse que l'une au moins des sources est sincère, conditionnellement à chaque valeur $x \in X$, est égale à α.

L'α-conjonction s'obtient alors en définissant un réseau de croyance sur $X \times \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, et en y appliquant la règle conjonctive non-normalisée pour propager l'incertitude compte tenu des contraintes logiques induites par l'hypothèse de comportement des sources. L'α-disjonction s'obtient de manière similaire en partant d'hypothèses différentes sur la sincérité des sources.

L'approche que nous avons proposée dans cet article revient à combiner par la règle conjonctive non-normalisée les deux fonctions de croyances sur X avec une troisième sur $\mathcal{H}$ exprimant la méta-connaissance sur le comportement des sources, en imposant des contraintes logiques sur les 4-uplets (A, B, C, H) à savoir $C = A \otimes_H B$. Elle est donc à la fois plus simple et plus générique que les jonctions de Smets [12]. Elle est plus simple parce que les α-jonctions font intervenir des connaissances supplémentaires sous la forme de fonctions de masse sur $\mathcal{H}$ conditionnement à chaque valeur $x \in X$. Cependant, notre approche considère des hypothèses de comportement des sources variées et plus générales.

On peut rapprocher le modèle de méta-connaissance à la base des α-jonctions de celui de l'affaiblissement contextuel [6], qui généralise l'affaiblissement en introduisant des degrés de croyance en la fiabilité de la source, conditionnellement à chaque valeur $x \in X$. On voit qu'il est donc possible d'envisager une famille d'opérateurs généralisant non seulement l'affaiblissement et les règles de combinaison conjonctive et disjonctive, mais également l'affaiblissement contextuel et les α-jonctions, en considérant différents réseaux de croyance sur $X \times \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$. L'étude approfondie des propriétés des différents opérateurs ainsi obtenus reste à mener. L'apprentissage d'un modèle de comportement des sources en confrontant l'information fournie par ces sources à la vérité de terrain (comme cela a été fait dans un cadre très simple pour l'affaiblissement [4] et l'affaiblissement contextuel [6]) est également une perspective intéressante.

6 Conclusion

Nous avons proposé une famille d'opérations d'agrégation de fonctions de croyance qui intègre la méta-connaissance d'un agent sur la sincérité et la pertinence des sources d'information à fusionner. Ce cadre généralise considérablement la notion d'affaiblissement de Shafer qui ne concerne que la pertinence des sources. Les résultats obtenus s'appliquent à tous les domaines où les sources d'information sont elles-mêmes des agents intelligents susceptibles de mentir, indépendamment de leur compétence à fournir des informations.

Références

[1] A.P. Dempster. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Ann. Math. Statistics* 38 : 325-339, 1967.

[2] D. Dubois, H. Prade. A set-theoretic view of belief functions : logical operations and approximations by fuzzy sets. Int. J. Gen Syst 12(3) :193-226, 1986.

[3] D. Dubois, H. Prade. La fusion d'informations imprécises. Traitement du Signal, 11(6) : 447-458, 1994.

[4] Z. Elouedi, K. Mellouli, P. Smets. Assessing Sensor Reliability for Multisensor Data Fusion Within the Transferable Belief Model, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B, 34(1),782-787, 2004.

[5] D. Mercier, T. Denœux, M.-H. Masson. A parameterized family of belief functions correction mechanisms. In L. Magdalena, M. Ojeda-Aciego, J.L. Verdegay (eds) : Proceedings of IPMU'08, pp. 306-313, Torremolinos (Malaga), June 22-27, 2008.

[6] D. Mercier, B. Quost, T. Denoeux. Refined modeling of sensor reliability in the belief function framework using contextual discounting, Information Fusion, Vol. 9, pages 246-258, 2008.

[7] F. Pichon, Fonctions de Croyance : Décompositions Canoniques et Règles de Combinaison. Thèse, Université de Technologie de Compiègne, 2009.

[8] F. Pichon, T. Denœux. Interpretation and Computation of alpha-Junctions for Combining Belief Functions. Sixth Int. Symp. on Imprecise Probability : Theories and Applications (ISIPTA '09), Durham, United Kingdom, July 2009.

[9] G. Shafer. A mathematical theory of evidence. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1976.

[10] P. Smets. Un modèle mathématico-statistique simulant le processus du diagnostic médical. Thèse, Université Libre de Bruxelles, Belgique, 1978.

[11] P. Smets. Belief functions : the disjunctive rule of combination and the generalized Bayesian theorem. International Journal of Approximate Reasoning, 9 :1-35, 1993.

[12] P. Smets. The α-junctions : combination operators applicable to belief functions. In : Gabbay et al. (eds.), Qualitative and Quantitative Practical Reasoning (ECSQARU-FAPR'97) Lecture Notes in Computer Science, 1244 : 131-153. Springer, 1997.

[13] P. Smets. The Transferable Belief Model for quantified belief representation. In : Gabbay, D. M., Smets, Ph. (eds.), Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems, vol. 1, 267-301. Kluwer, Dordrecht, 1998.

[14] P. Smets. Managing Deceitful Reports with the Transferable Belief Model. In Proc. of the 8th Int. Conf. on Information Fusion (FUSION '05), Philadelphia, PA, 2005.

[15] R. R. Yager. Arithmetic and other operations on Dempster-Shafer structures, Int. J. Man-Machines Studies, 25 :357-366, 1986.